This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

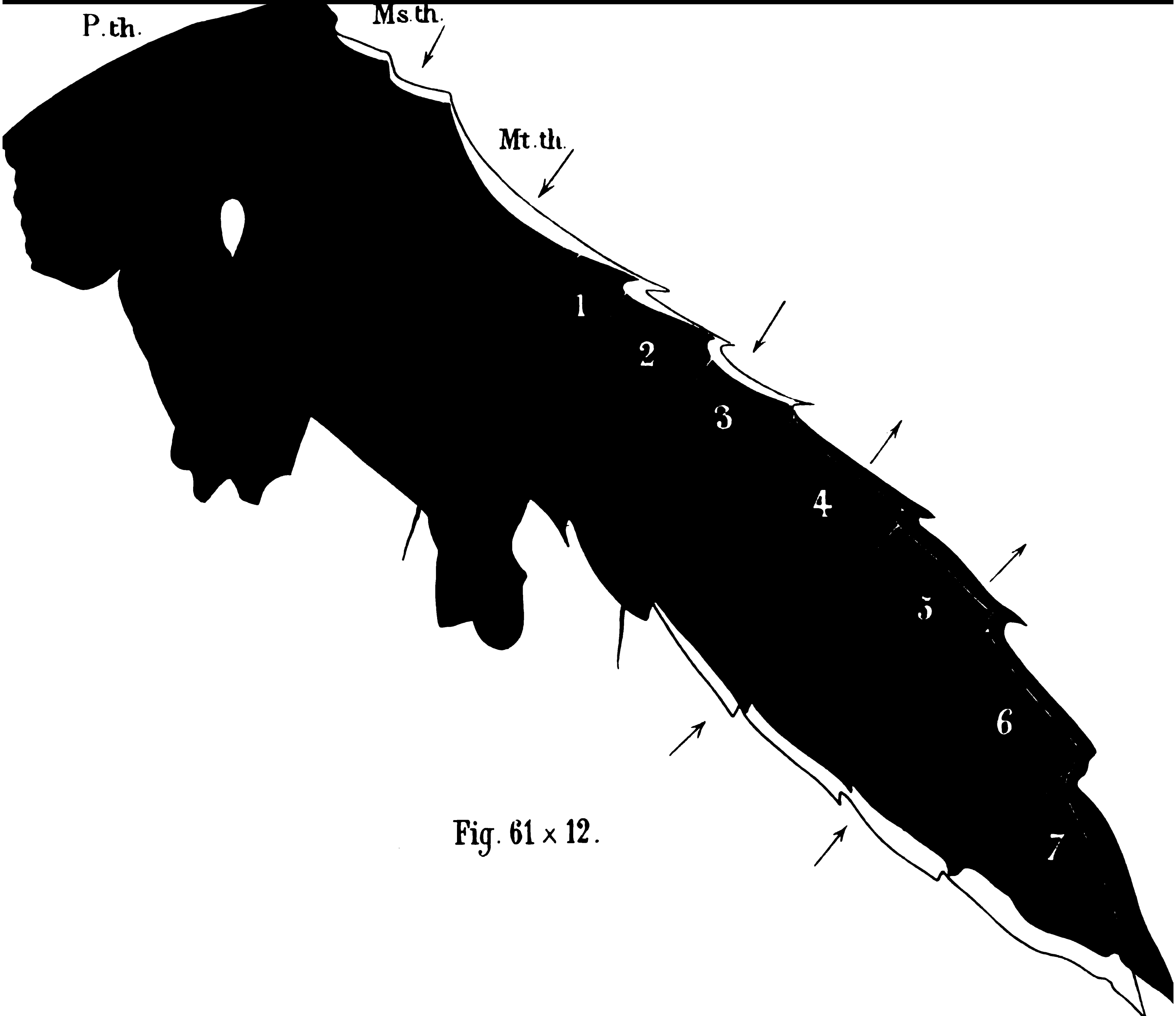


Fig. 61 × 12.

Mémoires de l'Académie royale des sciences, des ...

Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique

ACA 0150

Rebound 1938

Library of the Museum

OF

COMPARATIVE ZOÖLOGY,

AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

The gift of Académie Royale

No. 159

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS

DE BELGIQUE.

Digitized by Google

3762
12-33
Digitized by Google

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS

DE BELGIQUE.

TOME XLV.

BRUXELLES,
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.
rue de Louvain, 108.

1884

Sm

Digitized by Google

LISTE DES MEMBRES,

DES

CORRESPONDANTS ET DES ASSOCIÉS DE L'ACADÉMIE.

(1er juillet 1884.)

LE ROI, Protecteur.

M. Éd. Dupont, président pour 1884.
» J.-B.-J. Liagre, secrétaire perpétuel.

COMMISSION ADMINISTRATIVE.

Le directeur de la Classe des Sciences, M. Éd. Dupont.
» » des Lettres, M. Aug. Wagener.
» » des Beaux-Arts, M. Ern. Slingeneyer.
Le Secrétaire perpétuel, M. J.-B.-J. Liagre.
Le délégué de la Classe des Sciences, M. J.-S. Stas, trésorier.
» » des Lettres, M. Ch. Faider.
» » des Beaux-Arts, M. L. Alvin.

M. Marchal (Chev. Edm.), *Secrétaire-adjoint de l'Académie.*

Digitized by Google

CLASSE DES SCIENCES.

M. Éd. Dupont, directeur pour 1884.
» J.-B.-J. Liagre, secrétaire perpétuel.

30 MEMBRES.

Section des sciences mathématiques et physiques (15 membres).

M.	Stas, Jean-S.; à St-Gilles-lez-Bruxelles. . .	Élu le	14 décemb. 1841.
»	de Koninck, Laurent-G.; à Liège	—	15 décemb. 1842.
»	Melsens, Louis-F.-H.; à Bruxelles	—	15 décemb. 1850.
»	Liagre, J.-B.-Joseph; à Ixelles	—	15 décemb. 1853.
»	Houzeau, Jean-C.; à Bruxelles.	—	15 décemb. 1856.
»	Maus, Henri-J.; à Ixelles	—	15 décemb. 1864.
»	Donny, François-M.-L.; à Gand	—	15 décemb. 1866.
»	Montigny, Charles; à Schaerbeek.	—	16 décemb. 1867.
»	Steichen, Michel; à Ixelles	—	15 décemb. 1868.
»	Brialmont, Alexis-H.; à St-Josse-ten-Noode .	—	15 décemb. 1869.
»	Folie, François; à Liège	—	15 décemb. 1874.
»	Mailly, Édouard-N.; à Saint-Josse-ten-Noode	—	15 décemb. 1876.
»	De Tilly, Joseph; à Anvers	—	16 décemb. 1878.
»	Van der Mensbrugghe, G.; à Gand	—	14 décemb. 1883.
»	N.		

Section des sciences naturelles (15 membres).

M.	Van Beneden, Pierre-J.; à Louvain	Élu le	15 décemb. 1842.
»	de Selys Longchamps, le baron Edm.; à Liège.	—	16 décemb. 1846.
»	Gluge, Théophile; à Bruxelles	—	15 décemb. 1849.
»	Dewalque, Gustave; à Liège	—	16 décemb. 1859.
»	Candèze, Ernest; à Glain (Liège)	—	15 décemb. 1864.
»	Dupont, Édouard; à Ixelles	—	15 décemb. 1869.
»	Morren, Édouard; à Liège.	—	15 décemb. 1871.
»	Van Beneden, Édouard; à Liège	—	16 décemb. 1872.
»	Malaise, Constantin; à Gembloux.	—	15 décemb. 1873.
»	Briart, Alphonse; à Mariemont	—	15 décemb. 1874.
»	Plateau, Félix; à Gand.	—	15 décemb. 1874.

Digitized by Google

M. Crépin, François; à Bruxelles. . . . . . Élu le 15 décemb. 1875.
» Cornet, François-Léopold; à Mons . . . . — 15 décemb. 1878.
» Van Bambeke, Charles; à Gand . . . . . — 15 décemb. 1879.
» Gilkinet, Alfred; à Liège . . . . — 15 décemb. 1880.

CORRESPONDANTS (10 au plus).

Section des sciences mathématiques et physiques.

M. Henry, Louis; à Louvain . . . . Élu le 15 décemb. 1865.
» Valerius, Henri; à Gand . . . . — 15 décemb. 1869.
» Spring, Waltère; à Liège . . . . — 14 décemb. 1877.
» Mansion, Paul; à Gand . . . . — 15 décemb. 1882.
» N. . . . .

Section des sciences naturelles.

M. Mourlon, Michel; à Bruxelles. . . . . . Élu le 15 décemb. 1875.
» Delboeuf, J.; à Liège. . . . . — 14 décemb. 1877.
» Fredericq, Léon; à Liège . . . . — 15 décemb. 1879.
» Masius, Victor; à Liège. . . . . — 15 décemb. 1880.
» Renard, A.; à Uccle . . . . — 15 décemb. 1882.

50 ASSOCIÉS.

Section des sciences mathématiques et physiques (25 associés).

M. Airy, Georges Biddell; à Greenwich . . . Élu le 15 décemb. 1853.
» Kekulé, Auguste; à Bonn . . . . — 15 décemb. 1864.
» Bunsen, Robert-G.; à Heidelberg . . . . — 15 décemb. 1865.
» Catalan, Eugène-C.; à Liège . . . . . . — 15 décemb. 1865.
» von Baeyer, Jean-Jacques; à Berlin. . . . — 15 décemb. 1868.
» Kirchhoff, Gustave-Robert; à Heidelberg. . — 15 décemb. 1868.
» Hirn, G.-A.; à Colmar (Alsace) . . . . . — 16 décemb. 1872.
» De Colnet d'Huart; à Luxembourg . . . . — 15 décemb. 1873.
» Helmholtz, H.-L.-F.; à Berlin . . . . . — 15 décemb. 1873.
» Menabrea de Val-Dora, le Mis Ls-Fic; à Rome . — 15 décemb. 1874.
» Struve, Otto; à Poulkova . . . . — 15 décemb. 1874.
» Clausius, Rodolphe-J.-Em.; à Bonn. . . . — 15 décemb. 1875.
» Chevreul, M.-Eugène; à Paris. . . . . . — 15 décemb. 1875.
» Buys-Ballot, C.-H.-D.; à Utrecht. . . . . — 15 décemb. 1875.
Sa Majesté Dom Pedro II, d'Alcantara, empereur du Brésil; à Rio-de-Janeiro. — 15 décemb. 1876.

Digitized by Google

M.	WEBER, Guillaume; à Gottingue	Élu le	14	décemb.	1877.
»	BOUSSINGAULT, J.-B.-J.-D.; à Paris	—	16	décemb.	1878.
»	FAYE, H.; à Paris	—	16	décemb.	1878.
»	THOMSON, W.; à Glasgow	—	16	décemb.	1878.
»	PASTEUR, Louis; à Paris	—	15	décemb.	1879.
»	SCHIAPARELLI, Jean-Virginius; à Milan . . .	—	15	décemb.	1879.
»	GENOCCHI, Angelo; à Turin.	—	15	décemb.	1881.
»	TYNDALL, John; à Londres.	—	14	décemb.	1883.
»	N.				
»	N.				

Section des sciences naturelles (25 associés).

M.	OWEN, Richard; à Londres.	Élu le	17	décemb.	1847.
»	EDWARDS, Henri-Milne; à Paris	—	15	décemb.	1850.
»	DANA, James-D.; à New-Haven (États-Unis) .	—	15	décemb.	1864.
»	DAVIDSON, Thomas; à Brighton	—	15	décemb.	1865.
»	DE CANDOLLE, Alphonse; à Genève	—	15	décemb.	1869.
»	DONDERS, F.-C.; à Utrecht	—	15	décemb.	1869.
»	HOOKER, Jos.-Dalton; à Kew (Angleterre) . .	—	16	décemb.	1872.
»	RAMSAY, André-Crombie; à Londres. . . .	—	16	décemb.	1872.
»	STEENSTRUP, J.-Japetus-S.; à Copenhague . .	—	16	décemb.	1872.
»	HUXLEY, Thomas-Henri; à Londres. . . .	—	15	décemb.	1874.
»	PRINGSHEIM, Nathaniel; à Berlin	—	15	décemb.	1874.
»	VON DECHEN, Ern.-Henri; à Bonn.	—	15	décemb.	1875.
»	GOSSELET, Jules; à Lille	—	15	décemb.	1876.
»	DAUBRÉE, Auguste; à Paris	—	14	décemb.	1877.
»	VON KÖLLIKER, Albert; à Wurzbourg . . .	—	14	décemb.	1877.
»	DE SAPORTA, le marquis G.; à Aix (France). .	—	14	décemb.	1877.
»	VON SIEBOLD, Ch.-T.-E.; à Munich	—	16	décemb.	1878.
»	DE BARY, Antoine; à Strasbourg.	—	15	décemb.	1882.
»	GEGENBAUR, Charles; à Heidelberg	—	15	décemb.	1882.
»	KOWALEWSKY, Alex.; à Odessa	—	15	décemb.	1882.
»	DE QUATREFAGES DE BRÉAN, J.-Q.-A.; à Paris .	—	14	décemb.	1883.
»	STUR (Dionys) Rud.-J.; à Vienne.	—	14	décemb.	1883.
»	N.				
»	N.				
»	N.				

Digitized by Google

CLASSE DES LETTRES.

M. A. Wagener, directeur pour 1884.
» J.-B.-J. Liagre, secrétaire perpétuel.

30 MEMBRES.

Section des lettres et Section des sciences morales et politiques réunies.

M.	Gachard, Louis-Prosper; à Bruxelles . . .	Élu le	9	mai	1842.
»	Van Praet, Jules; à Bruxelles	—	10	janvier	1846.
»	De Decker, Pierre-J.-F.; à Schaerbeek. . .	—	10	janvier	1846.
»	Leclercq, M.-N.-J.; à St-Josse-ten-Noode. .	—	17	mai	1847.
»	de Witte, le baron Jean-J.-A.-M.; à Anvers .	—	6	mai	1851.
»	Faider, Charles; à Bruxelles	—	7	mai	1855.
»	Kervyn de Lettenhove, le bon J.-M.-B.-C.; à Saint-Michel (lez-Bruges)	—	4	mai	1859.
»	Chalon, Renier; à Ixelles	—	4	mai	1859.
»	Thonissen, J.-J.; à Louvain	—	9	mai	1864.
»	Juste, Théodore; à Ixelles.	—	5	mai	1866.
»	Nève, Félix; à Louvain.	—	11	mai	1868.
»	Wauters, Alphonse; à Bruxelles	—	11	mai	1868.
»	de Laveleye, Émile; à Liège	—	6	mai	1872.
»	Nypels, J.-S.-Guillaume; à Liège.	—	6	mai	1872.
»	Le Roy, Alphonse; à Liège.	—	12	mai	1873.
»	de Borchgrave, Émile; à Belgrade	—	12	mai	1873.
»	Liagre, J.-B.-Joseph; à Ixelles	—	5	mai	1874.
»	Wagener, Auguste; à Gand	—	10	mai	1875.
»	Willems, Pierre; à Louvain	—	14	mai	1877.
»	Tielemans, F.; à Ixelles.	—	6	mai	1878.
»	Rolin-Jaequemyns, Gustave; à Bruxelles . .	—	6	mai	1878.
»	Bormans, Stanislas; à Liège	—	5	mai	1879.

Digitized by Google

M.	Piot, Charles-G.-J.; à St-Gilles-lez-Bruxelles	Élu le	5	mai	1879.
»	Potvin, Charles; à Ixelles	—	9	mai	1881.
»	Stecher, J.; à Liège	—	9	mai	1881.
»	Laurent, François; à Gand	—	9	mai	1881.
»	Lamy, T.-J.; à Louvain	—	8	mai	1882.
»	Vandenpeereboom, Alphonse; à Bruxelles	—	7	mai	1883.
»	Scheler, Auguste; à Ixelles	—	5	mai	1884.
»	Henrard, Paul; à Anvers	—	5	mai	1884.

CORRESPONDANTS (10 au plus).

M.	Loise, Ferdinand; à Uccle	Élu le	12	mai	1873.
»	Gantrelle, J.; à Gand	—	9	mai	1881.
»	Loomans, C.; à Liège	—	9	mai	1881.
»	Tiberghien, Guillaume; à St-Josse-ten-Noode	—	8	mai	1882.
»	Roersch, L.; à Liège	—	8	mai	1882.
»	De Harlez, Charles; à Louvain	—	7	mai	1883.
»	Vanderkindere, Léon; à Ixelles	—	2	juillet	1883.
»	Henne, Alexandre; à Ixelles	—	5	mai	1884.
»	N.				
»	N.				

50 ASSOCIÉS.

M.	Ranke, Léopold; à Berlin	Élu le	15	décemb.	1840.
»	Leemans, Conrad; à Leyde	—	11	janvier	1847.
»	Nolet de Brauwere van Steeland, J.; à Vilvorde	—	7	mai	1849.
»	de Rossi, le chevalier J-B.; à Rome	—	7	mai	1855.
»	de Reumont, Alfred; à Borcette (Aix-la-Chapelle).	—	26	mai	1856.
»	de Czoernig, le baron Ch.; à Ischl (Autriche)	—	4	mai	1859.
»	Minervini, Jules; à Naples	—	4	mai	1859.
»	de Köhne, le bon Bernard; à St-Pétersbourg	—	13	mai	1861.
»	Cantù, César; à Milan	—	13	mai	1861.
»	Von Löher, François; à Munich	—	13	mai	1862.
»	De Vries, Mathieu; à Leyde	—	19	mai	1863.
»	von Arneth, le chevalier Alfred; à Vienne	—	9	mai	1864.
»	Renier, Léon; à Paris	—	10	mai	1865.
»	Mommsen, Théodore; à Berlin	—	5	mai	1866.
»	Von Döllinger, J.-J. Ignace; à Munich	—	5	mai	1866.

Digitized by Google

M.	STEPHANI, Ludolphe; à Saint-Pétersbourg . . .	Élu le	6 mai 1867
»	EGGER, Émile; à Paris	—	10 mai 1869.
»	VON SYBEL, Henri-Ch.-L.; à Berlin	—	10 mai 1869.
»	CARRARA, François; à Pise	—	9 mai 1870.
»	DE HOLTZENDORFF, le baron F.; à Munich	—	8 mai 1871.
»	BRUNN, Henri; à Munich	—	8 mai 1871.
»	D'ANTAS, le chevalier M.; à Londres	—	6 mai 1872.
»	ALBERDINGK THYM, Jos.-Alb.; à Amsterdam . . .	—	6 mai 1872.
»	CURTIUS, Ernest; à Berlin	—	6 mai 1872.
»	RIVIER, Alphonse; à Saint-Gilles	—	12 mai 1873.
»	FRANCK, Adolphe; à Paris	—	12 mai 1873.
»	DESMAZES, Charles; à Paris	—	4 mai 1874.
»	OPPERT, Jules; à Paris.	—	4 mai 1874.
»	JONCKBLOET, W.-J.-A.; à La Haye	—	4 mai 1874.
»	TENNYSON, Alfred; à Londres	—	10 mai 1875.
»	LEPSIUS, Richard; à Berlin	—	10 mai 1875.
»	DELISLE, Léopold; à Paris	—	10 mai 1875.
»	ARNTZ, Égide; à Ixelles	—	8 mai 1876.
»	CAMPBELL, F.-G.-H.; à La Haye	—	14 mai 1877.
»	BANCROFT, George; à Washington	—	14 mai 1877.
»	SARIPOLOS, Nicolas; à Athènes	—	6 mai 1878.
»	DI GIOVANNI, Vincenzo; à Palerme.	—	6 mai 1878.
»	COLMEIRO, Manuel; à Madrid.	—	10 mai 1880.
»	D'OLIVECRONA, Canut; à Stockholm.	—	10 mai 1880.
»	BOHL, Joan; à Amsterdam	—	9 mai 1881.
»	CANOVAS DEL CASTILLO, Antoine; à Madrid . . .	—	9 mai 1881.
»	CASTAN, Auguste; à Besançon	—	9 mai 1881.
»	GLADSTONE, W.-E.; à Londres	—	8 mai 1882.
»	GOMES DE AMORIM, Fr.; à Lisbonne.	—	8 mai 1882.
»	MILLER, Emmanuel; à Paris.	—	8 mai 1882.
»	WAITZ, George; à Berlin	—	5 mai 1884.
»	DARESTE, Rodolphe; à Paris	—	5 mai 1884.
»	BRÉAL, Michel; à Paris	—	5 mai 1884.
»	N.		
»	N.		

Digitized by Google

CLASSE DES BEAUX-ARTS.

M. E. Slingeneyer, directeur pour 1884.
» J.-B.-J. Liagre, secrétaire perpétuel

30 MEMBRES.

Section de Peinture :

M.	De Keyser, Nicaise; à Anvers	Nommé le	1er	décemb.	1845.
»	Gallait, Louis; à Schaerbeek	—	1er	décemb.	1845.
»	Portaels, Jean; à St-Josse-ten-Noode . .	Élu le	4	janvier	1855.
»	Slingeneyer, Ernest; à Bruxelles. . . .	—	7	avril	1870.
»	Robert, Alexandre; à St-Josse-ten-Noode.	—	7	avril	1870.
»	Guffens, Godfried; à Schaerbeek . . .	—	6	janvier	1876.
»	Wauters, Émile; à Bruxelles.	—	5	janvier	1882.
»	Clays, Paul-J.; à Schaerbeek.	—	1er	mars	1883.
»	Verlat, Charles; à Anvers.	—	10	janvier	1884.

Section de Sculpture :

M.	Geefs, Joseph; à Anvers	Élu le	9	janvier	1846.
»	Fraikin, Charles-Auguste; à Schaerbeek.	—	8	janvier	1847.
»	Jaquet, Joseph; à Schaerbeek	—	11	janvier	1883.
»	Degroot, Guillaume; à Bruxelles . . .	—	10	janvier	1884.

Section de Gravure :

M.	Demannez, Joseph; à St-Josse-ten-Noode.	Élu le	11	janvier	1883.
»	Biot, Gustave; à Ixelles	—	10	janvier	1884.

Section d'Architecture :

M.	Balat, Alphonse; à Ixelles	Élu le	9	janvier	1862.

Digitized by Google

M.	De Man, Gustave; à Ixelles.	Elu le	12	janvier	1865.
»	Pauli, Adolphe; à Gand.	—	6	janvier	1875.
»	Schadde, Joseph; à Anvers	—	10	janvier	1878.

Section de Musique :

M.	de Burbure, le chevalier Léon; à Anvers .	Élu le	9	janvier	1862.
»	Gevaert, Auguste F.; à Bruxelles . . .	—	4	janvier	1872.
»	Samuel, Adolphe; à Gand.	—	8	janvier	1874.
»	Radoux, Théodore; à Liège	—	3	avril	1879.
»	Benoit, Pierre; à Anvers	—	5	janvier	1882.

Section des Sciences et des Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :

M.	Alvin, Louis-J.; à Ixelles	Nommé le	1er	décemb.	1845.
»	Fétis, Édouard; à Bruxelles.	Élu le	8	janvier	1847.
»	Siret, Adolphe; à St-Nicolas	—	12	janvier	1866.
»	Liagre, J.-B.-Joseph; à Ixelles	—	5	mai	1874.
»	Stappaerts, Félix; à Bruxelles	—	6	janvier	1876.
»	Pinchart, Alexandre; à St-Josse-ten-Noode	—	11	janvier	1883.

CORRESPONDANTS (10 au plus).

Pour la Peinture :

M.	Dyckmans, Joseph-L.; à Anvers	Élu le	8	janvier	1847.
»	Markelbach, Alexandre; à Schaerbeek. .	—	1er	mars	1883.
»	Stallart, Joseph; à Ixelles	—	1er	mars	1883.

Pour la Sculpture :

» N. . . . .

Pour la Gravure :

M.	Meunier, Jean-Baptiste; à Ixelles . . .	Élu le	10	janvier	1884.

Pour l'Architecture :

M.	Beyaert, Henri; à Bruxelles.	Élu le	1er	mars	1883.

Pour la Musique :

M.	Busschop, Jules; à Bruges.	Élu le	11	janvier	1883.
»	Van Elewyck, le chev. X.; à Louvain . .	—	11	janvier	1883

Digitized by Google

Pour les Sciences et les Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :

M.	Marchal, le chev. Edmond-L.-J.-G.; à Saint-Josse-ten-Noode.	Élu le	1er mars	1883.
»	Hymans, Henri; à Ixelles	—	1er mars	1883

50 ASSOCIÉS.

Pour la Peinture :

M.	Haghe, Louis; à Londres	Élu le	8 janvier	1847.
»	Robert Fleury, Joseph N.; à Paris	—	7 janvier	1864.
»	Gérome, Jean-Léon; à Paris	—	12 janvier	1865.
»	de Madrazo, Frédéric; à Madrid	—	12 janvier	1865.
»	Bendemann, Édouard; à Dusseldorf	—	9 janvier	1868.
»	Meissonier, Jean-L.-E.; à Paris	—	7 janvier	1869.
»	Hébert, Aug.-Ant.-Ernest; à Paris	—	12 janvier	1871.
»	Becker, Charles; à Berlin	—	8 janvier	1874.
»	Frith, William-Powell; à Londres	—	8 janvier	1874.
»	Von Piloty, Charles; à Munich	—	6 janvier	1875.
»	Baudry, Paul; à Paris	—	10 janvier	1878.
»	Makart, Jean; à Vienne	—	5 janvier	1882.
»	Willems, Florent; à Paris	—	7 décemb.	1882.

Pour la Sculpture :

M.	de Nieuwerkerke, le comte Alf.; à Paris	Élu le	22 septemb	1852.
»	Cavelier, Pierre-Jules; à Paris	—	7 janvier	1864.
»	Monteverde, Jules; à Rome	—	8 janvier	1874.
»	Bonnassieux, Jean; à Paris	—	6 janvier	1876.
»	Guillaume, Eugène; à Paris	—	6 janvier	1876.
»	Thomas, Gabriel-Jules; à Paris	—	11 janvier	1883.
»	Kundmann, Charles; à Vienne	—	11 janvier	1883.
»	N.			

Pour la Gravure :

M.	Henriquel Dupont, Louis-P.; à Paris	Élu le	8 janvier	1847.
»	Oudiné, Eugène-André; à Paris	—	8 janvier	1857.

Digitized by Google

M. François, Alphonse; à Paris. . . . . . . Élu le 8 janvier 1874.
» Stang, Rudolphe; à Amsterdam . . . . . — 8 janvier 1874.

Pour l'Architecture :

M. Donaldson, Thomas L.; à Londres . . . . Élu le 6 février 1846.
» Leins, C.; à Stuttgart . . . . — 7 janvier 1864.
» Daly, César; à Paris . . . . — 12 janvier 1865.
» Labrouste, Théodore-F.-M.; à Paris . . . . — 9 janvier 1868.
» Vespignani, le comte Virginio; à Rome . . . — 12 janvier 1871.
» De Contreras, Raphaël; à Grenade . . . . — 8 janvier 1880.
» Raschdorff, J.-C.; à Berlin . . . . — 5 janvier 1882.
» N. . . . .

Pour la Musique :

M. Lachner, François; à Munich . . . . . . Élu le 8 janvier 1847.
» Thomas, Ch.-L.-Ambroise; à Paris. . . . . — 8 janvier 1863.
» Verdi, Joseph; à Busseto (Italie) . . . . . — 12 janvier 1865.
» Gounod, Félix-Charles; à Paris. . . . . . . — 4 janvier 1872.
» Basevi, Abraham; à Florence . . . . — 4 janvier 1872.
» Hiller, Ferdinand; à Cologne . . . . — 6 janvier 1876.
» Massé, Victor; à Paris . . . . — 4 janvier 1877.
» Limnander de Nieuwenhove, le baron Arm^{d}; à Moignanville (Oise). — 9 janvier 1879.

Pour les Sciences et les Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :

M. Ravaisson, Félix-J.-G.; à Paris . . . . . . Élu le 10 janvier 1856.
» Gailhabaud, Jules; à Paris . . . . — 9 janvier 1868.
» Lubke, Guillaume; à Stuttgart . . . . . . — 9 janvier 1873.
» Vosmaer, C.; à La Haye . . . . — 9 janvier 1873.
» Delaborde, le vicomte Henri; à Paris . . . — 8 janvier 1874.
» Sourindro Mohun Tagore, le radja; à Calcutta . — 4 janvier 1877.
» Schliemann, Henri; à Troie (Dardanelles) . . — 5 janvier 1882.
» Thausing, Charles; à Vienne . . . . — 11 janvier 1883.
» N. . . . .

Digitized by Google

NÉCROLOGIE.

CLASSE DES SCIENCES.

PLATEAU (J.), membre, décédé à Gand, le 15 septembre 1883.
DUPREZ (F.-J.), membre, décédé à Gand, le 14 mai 1884.
VON BISCHOFF, associé, décédé à Munich, en décembre 1882.
VALENTIN (G.-G.), associé, décédé à Berne, le 24 mai 1883.
SABINE (Ed.), associé, décédé à Londres, le 26 juin 1883.
HEER (O.), associé, décédé à Zurich, le 27 septembre 1883.
NILSSON (S.), associé, décédé à Lund, en décembre 1883.
SCHLEGEL (H.), associé, décédé à Leyde, le 17 janvier 1884.
DUMAS (J.-B.), associé, décédé à Cannes, le 11 avril 1884.
WURTZ (A.), associé, décédé à Paris, le 12 mai 1884.

CLASSE DES LETTRES.

POULLET (Edm.), membre, décédé à Louvain, le 12 décembre 1882.
CONSCIENCE (H.), membre, décédé à Ixelles, le 10 septembre 1883.
HEREMANS (J.), membre, décédé à Gand, le 13 mars 1884.
HYMANS (L.), correspondant, décédé à Bruxelles, le 22 mai 1884.
FARR (W.), associé, décédé à Londres, le 14 avril 1883.
LABOULAYE (Éd.), associé, décédé à Paris, le 25 mai 1883.
LENORMANT (Fr.), associé, décédé à Paris, le 2 décembre 1883.
MIGNET (F.), associé, décédé à Paris, le 23 mars 1884.

CLASSE DES BEAUX-ARTS.

FRANCK (J.), membre, décédé à S^t-Josse-ten-Noode, le 13 janvier 1883.
GEEFS (G.), membre, décédé à Schaerbeek, le 19 janvier 1883.
DE BRAEKELEER (F.), membre, décédé à Anvers, le 16 mai 1883.
JEHOTTE (L.), correspondant, décédé à Bruxelles, le 3 février 1884.
MANDEL (Ed.), associé, décédé à Berlin, en octobre 1882.
VON FERSTEL, associé, décédé en 1883.
DUMONT (A.-A.), associé, décédé à Paris, le 28 janvier 1884.
MERCURI (P.), associé, décédé à Bucharest, en mai 1884.

Digitized by Google

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XLV.

SCIENCES.

1. Mémoire sur les courbes du troisième ordre (seconde partie); par F. Folie et C. Le Paige.

2. Une Baleine fossile de Croatie, appartenant au genre Mésocète (avec 2 planches); par P.-J. Van Beneden.

3. Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce; par E. Catalan.

4. Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision (troisième supplément comprenant les années 1880, 1881, 1882); par J. Plateau.

5. Sur un point de la théorie des séries de Fourier; par P. Mansion.

6. Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries; par E. Catalan.

7. Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde; par F. Folie.

8. Recherches expérimentales sur les mouvements respiratoires des insectes (avec 7 planches); par F. Plateau.

BEAUX-ARTS.

9. Le réalisme. Son influence sur la peinture contemporaine; par Henri Hymans.

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

M. F. FOLIE,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

ET

M. C. LE PAIGE,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(SECONDE PARTIE.)

(Présenté à la Classe des Sciences, dans la séance du 4 mars 1882.)

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

HOMOGRAPHIE.

Dans la première partie de ce travail, nous avons exposé successivement les théories de l'homographie, de l'involution et du rapport anharmonique du troisième ordre.

Nous nous proposons maintenant d'en faire l'application aux cubiques.

Nous devrons faire connaître d'abord quelques conséquences se déduisant sans peine des résultats donnés au commencement de notre mémoire : nous nous bornerons d'ailleurs à rappeler les propositions que nous aurons à employer, en renvoyant, pour la démonstration, aux notes spéciales publiées sur ce sujet.

Nous avons dit : la relation

$$f = \Sigma a_{ikl} x_i y_k z_l = 0,$$

définit trois séries homographiques.

Parmi les covariants de la forme f, nous avons surtout fait remarquer les trois formes quadratiques Σ_1, Σ_2, Σ_3, et le covariant trilinéaire k.

On peut vérifier sans peine que les trois formes Σ ont un même discriminant Δ; nous l'avons appelé le *discriminant* de f.

Digitized by Google

Si Δ n'est pas nul, les covariants Σ, égalés à zéro, ont des racines distinctes.

Représentons par u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2, les facteurs linéaires de ces trois formes quadratiques : nous avons fait voir (*) que, dans ce cas, f peut s'écrire

$$f = \lambda u_1 v_1 w_1 + \lambda' u_2 v_2 w_2. \qquad (1)$$

Si, au contraire, $\Delta = 0$, deux cas peuvent se présenter.

Lorsque, en même temps que Δ, deux covariants Σ s'annulent identiquement, la forme f est décomposable (**); si cette condition n'est pas remplie, les trois covariants Σ sont des carrés, et la forme trilinéaire ne peut être ramenée à la forme canonique (1).

Comme seconde expression canonique de f, nous avons employé

$$f = \lambda_1(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta'_1 y_2)(z_1 - \delta''_1 z_2) + \lambda_2(x_1 - \delta_2 x_2)(y_1 - \delta'_2 y_2)(z_1 - \delta''_2 z_2) + \lambda_3(x_1 - \delta_3 x_2)(y_1 - \delta'_3 y_2)(z_1 - \delta''_3 z_2). \qquad (2)$$

Les propriétés dont nous venons de parler nous seront fort utiles dans la suite de ce travail.

THÉORÈME I. — *Le lieu des intersections des rayons homologues de trois faisceaux homographiques est une cubique, passant par les centres des trois faisceaux.*

Si nous représentons par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

les trois côtés d'un triangle qui a pour sommets les centres des faisceaux, les équations de trois droites passant par ces sommets pourront s'écrire

$$x_2\alpha - x_1\beta = 0, \quad y_2\beta - y_1\gamma = 0, \quad z_2\gamma - z_1\alpha = 0. \qquad (3)$$

(*) Voir, sur les formes trilinéaires, outre la première partie de ce travail, les Mémoires suivants de M. C. LE PAIGE : *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1048 et p. 1103; *Atti dell' Accademia de Nuovi Lincei*, t. XXXIV; *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 3e série, t. II, p. 40.

(**) Ire partie, p. 11.

Digitized by Google

Si ces droites appartiennent à trois faisceaux homographiques, nous aurons la relation

$$f = \Sigma a_{ikl} x_i y_k z_l = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

En éliminant les x, les y et les z entre les équations (3) et (4), nous trouvons, conformément au principe de la théorie des faisceaux (*), le lieu des points triples de ces intersections.

Nous avons ainsi l'équation

$$(a_{111} + a_{222})\alpha\beta\gamma + a_{112}\alpha^2\beta + a_{121}\alpha\gamma^2 + a_{211}\beta^2\gamma + a_{122}\alpha^2\gamma + a_{212}\alpha\beta^2 + a_{221}\beta\gamma^2 = 0, \quad . \quad (5)$$

équation d'une cubique passant par les centres des trois faisceaux.

Théorème II. — *Toute courbe du troisième ordre peut être engendrée par les intersections des rayons homologues de trois faisceaux homologues, ayant leurs centres en trois points quelconques de la courbe.*

En représentant (**) encore par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

les côtés d'un triangle qui a ses trois sommets en trois points quelconques d'une cubique C_3, l'équation de cette courbe peut s'écrire

$$A_{112}\alpha^2\beta + A_{113}\alpha^2\gamma + A_{122}\alpha\beta^2 + A_{223}\beta^2\gamma + A_{133}\alpha\gamma^2 + A_{233}\beta\gamma^2 + 2A_{123}\alpha\beta\gamma = 0. \quad . \quad . \quad (6)$$

Pour l'identifier avec l'équation (5), il suffira de poser

$$a_{111} = A_{123} + \theta; \quad a_{112} = A_{112}, \quad a_{121} = A_{133}, \quad a_{211} = A_{223},$$
$$a_{122} = A_{113}, \quad a_{212} = A_{122}, \quad a_{221} = A_{233}, \quad a_{222} = A_{123} - \theta.$$

La forme trilinéaire dépend, on le voit, d'une indéterminée θ.

Par suite, c'est d'une infinité de manières que l'on peut engendrer une

(*) F. Folie, *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 2e série, t. XLVI, p. 193; *Bull. de Darboux*, 2e série, t. III, p. 278.

(**) C. Le Paige, *Sur la théorie des formes trilinéaires*, C. R., t. XCIII, p. 264.

Digitized by Google

cubique donnée par les intersections de trois faisceaux homographiques, ayant leurs centres en trois points donnés de cette courbe.

Ceci va nous conduire à la démonstration de propriétés essentielles des cubiques.

Si nous calculons le discriminant de la forme trilinéaire

$$\begin{aligned} f = (A_{123} + \theta)x_1y_1z_1 + A_{112}x_1y_1z_2 + A_{133}x_1y_2z_1 + A_{223}x_2y_1z_1 + A_{113}x_1y_2z_2 + A_{122}x_2y_1z_2 \\ + A_{233}x_2y_2z_1 + (A_{123} - \theta)x_2y_2z_2, \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} = \theta^4 + 2\theta^2[A_{113}A_{223} - A_{123}^2 + A_{133}A_{122} + A_{112}A_{233}] + 4\theta[A_{122}A_{233}A_{113} - A_{112}A_{133}A_{223}] \\ + \big[A_{123}^4 + A_{223}^2A_{113}^2 + A_{133}^2A_{122}^2 + A_{112}^2A_{233}^2 - 2A_{123}^2(A_{223}A_{113} + A_{133}A_{122} + A_{112}A_{233}) \\ - 2A_{113}A_{223}A_{133}A_{122} - 2A_{133}A_{122}A_{112}A_{233} - 2A_{112}A_{233}A_{113}A_{223} \\ + 4A_{123}(A_{112}A_{133}A_{223} + A_{122}A_{113}A_{233})\big] \quad \ldots \ldots \quad (7) \end{aligned}$$

D'après cela, nous pouvons donner à θ une infinité de valeurs qui rendent Δ négatif; alors les trois équations

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = 0,$$

auront leurs racines réelles.

Pour toutes ces valeurs de θ, qui n'annulent pas Δ, la forme trilinéaire peut s'écrire

$$f = \lambda u_1v_1w_1 + \lambda' u_2v_2w_2,$$

ou, plus explicitement,

$$f = \lambda_1(x_1 - \delta_1x_2)(y_1 - \delta'_1y_2)(z_1 - \delta''_1z_2) + \lambda_2(x_1 - \delta_2x_2)(y_1 - \delta'_2y_2)(z_1 - \delta''_2z_2).$$

Nous nous occuperons tantôt de ce cas.

Mais, de plus, nous pouvons choisir θ de quatre manières distinctes, de telle sorte que Δ s'annule.

Alors puisque, en général, aucun des covariants Σ ne s'évanouit identiquement, ces trois covariants Σ sont des carrés, et la forme canonique (1) est impossible.

Digitized by Google

Il vient, en conséquence :

$$\Sigma_1 = (x_1 - \delta_1 x_2)^2; \quad \Sigma_2 = (y_1 - \delta_1' y_2)^2; \quad \Sigma_3 = (z_1 - \delta_1'' z_2)^2.$$

Les trois droites, représentées par les équations

$$\alpha - \delta_1\beta = 0; \quad \beta - \delta_1'\gamma = 0, \quad \gamma - \delta_1''\alpha = 0,$$

sont les côtés d'un triangle inscrit à la cubique.

En effet, d'après la propriété essentielle des formes Σ (*), si l'on donne à $\frac{x_1}{x_2}$ et à $\frac{y_1}{y_2}$ les valeurs δ_1, δ_1', $\frac{z_1}{z_2}$ est indéterminé.

Par suite, on a la propriété suivante, connue :

Théorème III. — *Étant donnés trois points sur une cubique, on peut, en général, inscrire à cette cubique, quatre triangles dont les côtés passent par ces trois points.*

La forme biquadratique (7) est assez remarquable.

Représentons-la par B_0^4.

Elle possède deux invariants

$$i = (BB')^4; \quad j = (BB')^2(B'B'')^2(B''B)^2.$$

On vérifie aisément que ces deux invariants i et j sont les deux invariants, multipliés par des facteurs numériques, de la forme ternaire (6), invariants que nous désignerons, suivant l'usage, par S et T.

Nous aurons

$$i = 4S, \qquad j = 8T.$$

En conséquence, le discriminant de la quartique B_0^4 est donné par

$$R = i^3 - 6j^2 = 64(S^3 - 6T^2).$$

Comme on le fait d'ordinaire, nous dirons que

$$S^3 - 6T^2$$

est le discriminant de la forme cubique.

(*) Ire partie, p. 6.

Digitized by Google

Ainsi :

Le discriminant du discriminant de la forme trilinéaire, regardé comme une fonction de θ, ne diffère, que par un facteur numérique, du discriminant de la cubique.

Si nous ne démontrons pas directement le caractère d'invariance des fonctions S et T, c'est afin de ne pas allonger inutilement notre travail, en revenant sur des points connus des géomètres : ce caractère ressortira d'ailleurs de ce qui va suivre.

On remarquera seulement, croyons-nous, combien la théorie que nous exposons introduit, d'une manière simple et naturelle, la notion des deux invariants fondamentaux de la forme cubique ternaire, invariants dont la découverte, on le sait, est due à M. Aronhold (*).

Nous allons faire voir, brièvement, comment on peut déduire, sans difficulté, de ce qui précède, l'interprétation des relations telles que

$$R = 0; \quad S = 0, \quad T = 0, \quad \text{etc.}$$

Si nous choisissons la relation d'homographie déterminée par une des valeurs de θ qui annulent Δ, les trois covariants Σ sont des carrés.

Mais on a la relation (**)

$$\frac{1}{2}\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 + \frac{1}{2}\Delta f^2 = -k^2,$$

k étant un covariant trilinéaire de f, dont l'expression développée est :

$$\begin{aligned}
k = & \left[a_{111}^2 a_{222} + 2a_{112}a_{121}a_{211} - a_{111}(a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122})\right]x_1y_1z_1 \\
& - \left[a_{112}^2 a_{221} + 2a_{111}a_{122}a_{212} - a_{112}(a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122} + a_{111}a_{222})\right]x_1y_1z_2 \\
& - \left[a_{121}^2 a_{212} + 2a_{111}a_{122}a_{221} - a_{121}(a_{112}a_{221} + a_{211}a_{122} + a_{111}a_{222})\right]x_1y_2z_1 \\
& - \left[a_{211}^2 a_{122} + 2a_{111}a_{212}a_{221} - a_{211}(a_{121}a_{212} + a_{112}a_{221} + a_{111}a_{222})\right]x_2y_1z_1 \\
& + \left[a_{122}^2 a_{211} + 2a_{112}a_{121}a_{222} - a_{122}(a_{111}a_{222} + a_{212}a_{121} + a_{112}a_{221})\right]x_1y_2z_2 \\
& + \left[a_{212}^2 a_{121} + 2a_{112}a_{211}a_{222} - a_{212}(a_{111}a_{222} + a_{221}a_{112} + a_{122}a_{211})\right]x_2y_1z_2 \\
& + \left[a_{221}^2 a_{112} + 2a_{211}a_{121}a_{222} - a_{221}(a_{111}a_{222} + a_{122}a_{211} + a_{121}a_{212})\right]x_2y_2z_1 \\
& - \left[a_{222}^2 a_{111} + 2a_{122}a_{212}a_{221} - a_{222}(a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122})\right]x_2y_2z_2. \quad \ldots \quad (8)
\end{aligned}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XXXIX.

(**) C. Le Paige, *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 3e série, t. II, p. 45.

Digitized by Google

Par suite, si $\Delta = 0$, k est le produit des racines carrées des trois covariants Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Supposons maintenant $R = 0$.

L'équation $\Delta = 0$ a une racine double, qui est en même temps racine de l'équation $\frac{d\Delta}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire de

$$\theta^3 + \theta\left[A_{113}A_{223} + A_{133}A_{122} + A_{112}A_{233} - A_{123}^2\right] + \left[A_{122}A_{233}A_{113} - A_{112}A_{133}A_{223}\right] = 0\,. \quad . \quad (9)$$

Or, si, dans l'expression de k, donnée plus haut, nous remplaçons les lettres a_{ikl} par les A_{ikl}, l'interprétation de (9) est aisée.

En effet, représentons par δ_1, δ'_1, δ''_1, comme nous l'avons fait ci-dessus, les racines doubles des Σ, on a

$$k = m(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta'_1 y_2)(z_1 - \delta''_1 z_2).$$

L'équation (9) revient à

$$\delta_1\delta'_1\delta''_1 = 1.$$

Comme nous savons que le covariant k est décomposable en trois facteurs linéaires, lorsque $\Delta = 0$, puisque les trois covariants Σ s'annulent identiquement, il suffit de vérifier que l'on a

$$\frac{-k_{222}}{k_{111}} = 1, \quad \text{ou} \quad k_{111} + k_{222} = 0.$$

Or

$$k_{111} = (A_{123} + \theta)^2(A_{123} - \theta) + 2A_{112}A_{133}A_{223} - (A_{123} + \theta)\left[A_{112}A_{233} + A_{133}A_{122} + A_{223}A_{113}\right],$$

$$-k_{222} = (A_{123} - \theta)^2(A_{123} + \theta) + 2A_{233}A_{122}A_{113} - (A_{123} - \theta)\left[A_{112}A_{233} + A_{133}A_{122} + A_{223}A_{113}\right].$$

L'équation

$$k_{111} + k_{222} = 0,$$

ne diffère donc pas de l'équation (9).

Par suite, les droites représentées par

$$\alpha - \delta_1\beta = 0, \quad \beta - \delta'_1\gamma = 0, \quad \gamma - \delta''_1\alpha = 0,$$

concourent.

Digitized by Google

Donc, pour la racine double de l'équation $\Delta = 0$, les trois côtés du triangle inscrit à la cubique concourent. Deux des quatre triangles coïncident et se réduisent à un point.

Il n'en peut être ainsi que si la cubique a un point double.

En conséquence, on retrouve ce théorème connu :

Lorsque le discriminant de la cubique s'annule, la courbe possède un point double.

Si l'on a, à la fois, $S = 0$, $T = 0$, ou, ce qui revient au même, $i = 0$, $j = 0$, l'équation $\Delta = 0$, possède, comme on le sait, un facteur triple.

On démontrerait, par une méthode analogue à celle que nous venons d'employer, que, dans ce cas, la cubique possède un point de rebroussement.

Comme nous le faisions observer plus haut, de ceci ressort le caractère d'invariance des fonctions S et T, car la propriété de posséder un point double ou un point de rebroussement se conserve dans la projection.

On sait encore que la forme biquadratique Δ est le carré d'une expression quadratique lorsque Δ ne diffère de son hessien que par un facteur.

Cette condition entraîne les deux relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} A_{122}A_{233}A_{113} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0, \\ A_{113}A_{223}A_{133}A_{122} + A_{133}A_{122}A_{112}A_{233} + A_{112}A_{233}A_{113}A_{223} - A_{123}(A_{112}A_{133}A_{223} + A_{122}A_{113}A_{233}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Et l'on voit sans peine que, dans ce cas, la cubique se décompose en une droite et une conique.

Il en est encore ainsi lorsqu'il est possible de déterminer une valeur de θ annulant identiquement un des covariants Σ : Σ_1, par exemple.

Nous avons vu (*) que, si $\Sigma_1 \equiv 0$, on a les conditions

$$a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} = 0,$$

$$a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212} = 0,$$

$$(a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211})(a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211}) = 0.$$

(*) 1re partie, p. 10.

Digitized by Google

Si nous remplaçons les a_{ikl} par les A_{ikl}, ces conditions deviennent

$$(A_{123} + \theta)A_{113} - A_{112}A_{133} = 0,$$
$$(A_{123} - \theta)A_{223} - A_{233}A_{122} = 0,$$

d'où l'on déduit :

et

$$\left.\begin{aligned} &2A_{123}A_{113}A_{223} - A_{113}A_{233}A_{122} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0; \\ &(A_{112}A_{233} - A_{113}A_{223})(A_{133}A_{122} - A_{113}A_{223}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (11)$$

De $\Sigma_2 \equiv 0$, ou de $\Sigma_3 \equiv 0$, on déduirait des conditions analogues :

$$\left.\begin{aligned} &2A_{123}A_{122}A_{133} - A_{113}A_{233}A_{122} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0, \\ &(A_{113}A_{223} - A_{122}A_{133})(A_{122}A_{133} - A_{112}A_{233}) = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (12)$$

$$\left.\begin{aligned} &2A_{123}A_{112}A_{233} - A_{113}A_{233}A_{122} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0, \\ &(A_{122}A_{133} - A_{112}A_{233})(A_{112}A_{233} - A_{113}A_{223}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (13)$$

Si l'un des systèmes (10), (11), (12) ou (13) est vérifié, la cubique est décomposable.

Ces quatre systèmes de conditions correspondent aux cas où la forme ternaire (6) a un facteur linéaire de la forme

$$p\alpha + q\beta + r\gamma,$$

ou d'une des formes

$$p\alpha + q\beta, \quad q\beta + r\gamma, \quad r\gamma + p\alpha.$$

Il y a encore le cas, tout à fait simple, où ce facteur est α, β, ou γ.

L'emploi des formes trilinéaires nous conduit encore à une notion importante, celle du *genre*.

D'après ce que nous venons de voir, nous pouvons considérer les rapports $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, comme caractérisant chaque terne de rayons homologues.

Pour avoir trois rayons donnant un point de la courbe, il faut que

$$x_1y_1z_1 = x_2y_2z_2.$$

Représentons par λ, μ, ν, les trois rapports donnés. Nous aurons, pour déterminer les différents points de la courbe, les équations

$$\left.\begin{aligned} &a_{111}\lambda\mu\nu + a_{112}\lambda\mu + a_{211}\mu\nu + a_{121}\nu\lambda + a_{122}\lambda + a_{212}\mu + a_{221}\nu + a_{222} = 0, \\ &\lambda\mu\nu - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (14)$$

Digitized by Google

Ces deux équations peuvent être considérées comme caractérisant une homographie du troisième ordre et du premier rang (*).

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème IV. — *Toute cubique peut être engendrée par les intersections des rayons homologues d'une* H_1^3.

Nous pourrons exprimer deux des rapports λ, μ en fonction du troisième.

En effet, en éliminant ν, par exemple, nous aurons :

$$\lambda^2(a_{112}\mu^2 + a_{122}\mu) + \lambda\left[a_{212}\mu^2 + (a_{111} + a_{222})\mu + a_{121}\right] + (a_{211}\mu + a_{221}) = 0.$$

Si nous employons les coefficients de la cubique, cette équation devient

$$\lambda^2(A_{112}\mu^2 + A_{113}\mu) + \lambda\left[A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133}\right] + (A_{223}\mu + A_{233}) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133} + \sqrt{P}}{2(A_{112}\mu^2 + A_{113}\mu)};$$

d'où

$$\nu = \frac{2(A_{112}\mu + A_{113})}{A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133} + \sqrt{P}} = \frac{A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133} - \sqrt{P}}{2(A_{223}\mu + A_{233})},$$

$$P = A_{122}^2\mu^4 + 4(A_{122}A_{123} - A_{112}A_{223})\mu^3 + (4A_{123}^2 + 2A_{122}A_{133} - 4A_{112}A_{233} - 4A_{113}A_{223})\mu^2 + 4(A_{123}A_{133} - A_{113}A_{233})\mu + A_{133}^2. \quad (15)$$

Cette forme P, égalée à zéro, donne un des groupes de ramification de (14).

On en déduit ce théorème :

Par un point donné, sur une cubique, on peut, en général, mener quatre tangentes à la courbe.

La forme P a les mêmes invariants que Δ.

Comme on vient de le voir, les coordonnées de la cubique peuvent, en général, s'exprimer à l'aide de fonctions rationnelles de μ et d'un radical carré portant sur P, expression du quatrième degré en μ.

La cubique la plus générale est donc du genre un.

(*) 1re partie, p. 13. Voir, sur le système de deux formes trilinéaires, un Mémoire de M. C. Le Paige, inséré aux *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*, t. XXXV, 1882.

Digitized by Google

Il n'en est plus de même quand le discriminant de Δ, et par suite de P, s'annule.

En effet, si l'on a seulement

$$i^3 - 6j^2 = 0,$$

ou, à la fois,

$$i = 0, \quad j = 0,$$

le radical ne portera plus que sur une expression quadratique de μ.

Nous avons vu, plus haut, que la courbe avait alors, soit un point double, soit un point de rebroussement.

Par suite,

Les cubiques à point double ou à point de rebroussement sont du genre zéro.

De la signification géométrique de l'équation $P = 0$, il résulte encore que, dans ces deux cas, les cubiques sont de la quatrième classe ou de la troisième.

Bien que ces théorèmes soient connus, nous n'avons pas cru inutile de faire voir qu'ils se déduisent facilement de la méthode que nous avons employée.

Ils découlent, en quelque sorte, immédiatement et nécessairement, de l'idée des faisceaux homographiques.

Nous aurions pu augmenter le nombre de ces propositions connues, ou nouvelles, qui dérivent de cette notion fondamentale : notre but n'étant pas d'écrire un traité des cubiques, mais un simple mémoire sur ces courbes, il nous a paru suffisant d'indiquer les méthodes générales.

Nous avons dit ailleurs (*) que notre méthode contient, comme cas particulier ou comme conséquence, les méthodes de Chasles, de Grassmann et de Schröter.

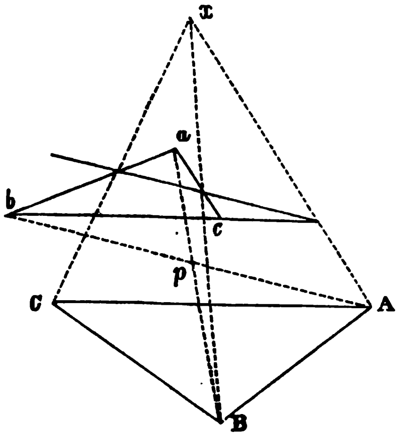
Cela est à peu près évident pour la première. En effet, si nous laissons fixe un rayon du premier faisceau, les deux autres appartenant à une H_1^2, décrivent une conique. A chaque rayon du premier faisceau, correspond une conique, et vice versâ. De plus, on s'aperçoit que les coniques correspondant aux différents rayons forment elles-mêmes un faisceau.

Quant à la seconde méthode, rappelons d'abord brièvement en quoi elle consiste.

(*) *Bull. de l'Acad.*, 3e série, t. I, p. 613.

Digitized by Google

Soient deux triangles ABC, *abc* : le lieu des points x tels que les droites xA, xB, xC rencontrent les côtés *bc*, *ca*, *ab* en trois points situés en ligne droite est une cubique passant par les sommets des triangles et en outre par les points r, r', r'', intersections des côtés *ab*, AB; *bc*, BC; *ca*, CA.



Comme nous le voyons, la relation d'homographie correspondant à ce mode de génération est complètement déterminée : elle a la forme

$$x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 = 0.$$

Les trois covariants Σ sont représentés par les droites A*b*, A*c*; B*c*, B*a*; C*a*, C*b*.

Il résulte de là que ces six droites constituent un système de deux trilatères se coupant en neuf points de la courbe (*).

En conséquence A*b*, B*a*, par exemple, se coupent en un point p de la courbe.

On voit, par suite, que le quadrilatère *ab*, AB, *a*B, *b*A a ses six sommets sur la courbe.

Les points a, A, b, B, c, C constitueront six points de Schröter; ils permettent de construire linéairement autant de points de la courbe qu'on le voudra, mais comme une suite discontinue. En effet, p, r forment un nouveau couple de points et on peut les employer comme on l'a fait pour a, A et ainsi de suite.

Nous nous bornons à cette simple indication : elle suffit pour montrer que le système de Grassmann se déduit, comme cas particulier, de notre méthode et de quelle manière celle-ci conduit aux points conjugués de Schröter.

(*) Voir plus bas les propriétés de ces trilatères.
Sur la méthode de Grassmann et sa comparaison avec celle de Schröter, voir un Mémoire de Clebsch, inséré aux *Math. Ann.*, t. V, p. 424.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

INVOLUTIONS.

THÉORÈME V. — *Toutes les cubiques ayant sept points communs sont coupées par une transversale et des points qui appartiennent à une* I_2^3 (involution de troisième ordre et du second rang).

Ce théorème se démontre pour ainsi dire sans calcul.

Prenons pour centres des trois faisceaux trois des sept points donnés.

L'équation de la cubique prendra la forme

$$C_3 \equiv A_{112}\alpha^2\beta + A_{113}\alpha^2\gamma + A_{122}\beta^2\alpha + A_{223}\beta^2\gamma + A_{133}\gamma^2\alpha + A_{233}\beta\gamma^2 + 2A_{123}\alpha\beta\gamma = 0.$$

Si, de plus, la cubique doit passer par quatre autres points donnés, il sera possible de déterminer linéairement quatre des paramètres en fonction des trois autres, de telle sorte que l'équation deviendra

$$C_3 \equiv \lambda' C_3' + \lambda'' C_3'' + \lambda''' C_3''' = 0.$$

De la résulte immédiatement le théorème énoncé.

Nous avons vu, précédemment, que toute cubique peut être engendrée par les intersections des rayons homologues de trois faisceaux homographiques.

Soit

$$f = 0,$$

l'équation d'homographie caractérisant une cubique donnée, équation qui contient, nous l'avons vu, une indéterminée θ.

Digitized by Google

f peut toujours prendre la forme (2)

$$f \equiv \lambda_1 (x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta'_1 y_2)(z_1 - \delta''_1 z_2) + \lambda_2 (x_1 - \delta_2 x_2)(y_1 - \delta'_2 y_2)(z_1 - \delta''_2 z_2)$$
$$+ \lambda_3 (x_1 - \delta_3 x_2)(y_1 - \delta'_3 y_2)(z_1 - \delta''_3 z_2) = 0.$$

La cubique peut donc toujours être représentée par une équation de la forme

$$C_3 \equiv \lambda_1 (\alpha - \delta_1 \beta)(\beta - \delta'_1 \gamma)(\gamma - \delta''_1 \alpha) + \lambda_2 (\alpha - \delta_2 \beta)(\beta - \delta'_2 \gamma)(\gamma - \delta''_2 \alpha)$$
$$+ \lambda_3 (\alpha - \delta_3 \beta)(\beta - \delta'_3 \gamma)(\gamma - \delta''_3) = 0,$$

ou

$$C_3 \equiv \lambda_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + \lambda_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 + \lambda_3 \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Nous avons ici un système de trois trilatères, en involution avec la courbe.

Lorsque nous n'imposerons aucune condition particulière à ces trois trilatères, nous dirons qu'ils sont involutifs avec la courbe.

Il résulte, de la forme même de l'équation (16), que l'on peut énoncer ce théorème :

THÉORÈME VI. — *Une transversale rencontre une cubique et un système de trois trilatères involutifs avec la courbe, en douze points qui sont en involution* I_2^3.

Cette même équation (16) peut être interprétée différemment.

En effet, la distance d'un point quelconque à la droite dont l'équation est $\alpha_1 = 0$, est proportionnelle à la fonction α_1, où l'on remplace les coordonnées par celles du point donné.

On arrive donc au théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'un point de la cubique aux côtés de trois trilatères involutifs.*

Mais nous pouvons particulariser davantage les systèmes de trilatères associés.

En effet, comme nous l'avons vu, nous disposons d'abord de l'indéterminée θ; ensuite, lorsque les coefficients de f sont entièrement déterminés par

Digitized by Google

le choix de θ, trois des neuf quantités δ sont encore complétement arbitraires (*).

Nous pourrons donc nous imposer les quatre conditions suivantes :

$$\delta_1 \delta_2'' \delta_3' = 1,$$

$$\delta_1' \delta_2 \delta_3'' = 1,$$

$$\delta_1'' \delta_2' \delta_3 = 1,$$

$$\delta_1' \delta_2'' \delta_3 = 1:$$

Les trois trilatères associés auront alors, outre les trois centres des faisceaux, quatre autres points communs.

Nous dirons, dans ce cas, qu'ils sont *trijugués.*

Les théorèmes VI et VII sont évidemment applicables à ces figures, dont nous verrons, par la suite, l'utilité.

THÉORÈME VIII. — *Toutes les cubiques qui ont huit points communs sont coupées, par une transversale, en des points qui appartiennent à une* I_1^3.

Ce théorème peut se démontrer comme le théorème V, mais il peut aussi être regardé comme une conséquence de cette proposition.

En effet, soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, les points donnés.

Toutes les cubiques qui passent par ces points appartiennent, à la fois, aux deux faisceaux

$$F_2^3(1, 2, \ldots, 6, 7) \quad \text{et} \quad F_2^3(1, 2, \ldots, 6, 8).$$

Par suite, elles déterminent, sur une transversale, les groupes communs aux deux involutions I_2^3, caractérisées par ces deux faisceaux.

Or ces groupes communs appartiennent à une I_1^3 (**).

(*) C. LE PAIGE, *Sur la théorie des formes trilinéaires,* ATTI DELL' ACC. DE' NUOVI LINCEI.
(**) 1re partie, p. 20.

Digitized by Google

De cette propriété découle, immédiatement, le théorème connu :

Théorème IX. — *Toutes les cubiques passant par huit points ont un même neuvième point commun.*

Soient, de nouveau, 1, 2, 3, ... 8 les points donnés, et soient C_3, C'_3, C''_3, etc., des cubiques qui passent par ces huit points.

Deux d'entre elles C_3, C'_3, par exemple, se coupent en un neuvième point 9.

Par 9, menons une transversale 9X qui coupe C_3 et C'_3 en des points ab, $a'b'$.

Or, *si dans une involution I_1^n, il existe un point tel qu'il lui corresponde deux groupes distincts de* (n—1) *points, cette involution se décompose en un point fixe* (*le point donné*) *et une involution* I_1^{n-1} (*).

(*) Ce théorème est presque évident, car soient

$$p_x = 0,$$

l'équation du point, et

$$a_x^{n-1} = 0, \quad b_x^{n-1} = 0,$$

l'équation des deux groupes qui lui correspondent. On pourra prendre comme groupes caractéristiques

$$p_x a_x^{n-1} = 0; \quad p_x b_x^{n-1} = 0,$$

et l'équation de l'involution deviendra

$$p_x a_x^{n-1} + \lambda p_x b_x^{n-1} = p_x (a_x^{n-1} + \lambda b_x^{n-1}) = 0.$$

Si cette démonstration ne paraissait pas suffisante, en voici une seconde, un peu moins simple.

Soient

$$a_x^n = 0, \quad b_x^n = 0,$$

les deux équations qui définissent deux groupes.

La relation entre les points en involution est donnée par

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(xy)} = 0;$$

Digitized by Google

Dans l'involution déterminée par les cubiques C_3, C_3', C_3'', etc., sur la transversale 9X, au point 9 correspondent les groupes distincts, *a, b ; a', b'* : par suite, le point 9 fait partie de tous les ternes de l'involution et toute cubique de ce faisceau passe par 9.

On sait que le théorème que nous venons d'établir peut se démontrer de bien des manières distinctes ; nous avons employé la méthode précédente afin de déduire, autant que possible, toutes les propriétés fondamentales des cubiques, des théories de l'involution et de l'homographie.

Corollaires. — I. *Si parmi les neuf points d'intersection de deux cubiques, il y en a six sur une conique, les trois autres sont sur une droite ; et réciproquement.*

II. *Si un triangle* ABC *rencontre une cubique en neuf points* c, c′, c″ ; a, a′, a″ ; b, b′, b″, *situés sur les côtés* AB, BC, CA, *on a la relation*

$$\frac{Ac.Ac'.Ac''.Ba.Ba'.Ba''.Cb.Cb'.Cb''}{Ab.Ab'.Ab''.Ca.Ca'.Ca''.Bc.Bc'.Bc''} = 1. \qquad \text{(Théor. de Carnot.)}$$

Menons les transversales cb'', $c'b'$ $c''b$, qui coupent la cubique en trois nouveaux points x, y, z, situés en ligne droite, et BC en trois points x', y', z'.

mais

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(xy)} = \Sigma C_{ik} x_1^i x_2^{n\ \ i-l} y_1^k y_2^{n-k-l} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

où C_{ik} est l'élément du résultant calculé par la méthode de Cauchy.

Si pour une détermination y_1, y_2, l'équation (17) a plus de $(n - 1)$ racines, cette équation doit être identique : par suite le résultant de a_x^n et de b_x^n sera nul et l'on aura

$$a_x^n + \lambda b_x^n = p_x(\alpha_x^{n-1} + \lambda \beta_x^{n-1}) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Digitized by Google

On a les égalités

$$\frac{Ac \cdot Bx' \cdot Cb''}{Ab'' \cdot Cx' \cdot Bc} = 1,$$

$$\frac{Ac' \cdot By' \cdot Cb'}{Ab' \cdot Cy' \cdot Bc'} = 1,$$

$$\frac{Ac'' \cdot Bz' \cdot Cb}{Ab \cdot Cz' \cdot Bc''} = 1.$$

D'où, en multipliant,

$$\frac{Ac \cdot Ac' \cdot Ac'' \cdot Cb \cdot Cb' \cdot Cb'' \cdot Bx' \cdot By' \cdot Bz'}{Ab \cdot Ab' \cdot Ab'' \cdot Bc \cdot Bc' \cdot Bc'' \cdot Cx' \cdot Cy' \cdot Cz'} = 1.$$

Mais les deux trilatères ac'', $a'c'$, $a''c$; AB, AC, $\overline{xz}$, sont en involution I_1^3 avec la cubique.

En employant une des formes de l'involution I_1^3 (*), on a

$$\frac{Bx' \cdot By' \cdot Bz'}{Ba \cdot Ba' \cdot Ba''} = \frac{Cx' \cdot Cy' \cdot Cz'}{Ca \cdot Ca' \cdot Ca''}.$$

En combinant avec l'égalité précédente, on trouve le résultat énoncé.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'on peut toujours, et cela d'une infinité de manières, choisir θ de telle sorte que la relation d'homographie, caractéristique de la cubique donnée, puisse se mettre sous la forme (1)

$$f \equiv \lambda_1(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta_1' y_2)(z_1 - \delta_1'' z_2) + \lambda_2(x_1 - \delta_2 x_2)(y_1 - \delta_2' y_2)(z_1 - \delta_2'' z_2).$$

Par suite, l'équation de la courbe peut toujours s'écrire

$$C_3 \equiv \lambda_1(\alpha - \delta_1\beta)(\beta - \delta_1'\gamma)(\gamma - \delta_1''\alpha) + \lambda_2(\alpha - \delta_2\beta)(\beta - \delta_2'\gamma)(\gamma - \delta_2''\alpha) = 0,$$

ou

$$C_3 \equiv \lambda_1\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

(*) C. Le Paige, *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques*, p. 41.

Digitized by Google

Les deux trilatères dont les côtés ont pour équations

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0,$$

se coupent en neuf points qui appartiennent à la cubique.

Nous avons dit que ces trilatères sont *conjugués* à la courbe (*).

Il résulte de l'équation (18) :

THÉORÈME X. — *Une transversale coupe la cubique et les côtés de deux trilatères conjugués en neuf points qui appartiennent à une* I_1^3.

La démonstration qui précède établit, du même coup, l'existence de ces systèmes de trilatères conjugués, passant par trois points pris à volonté sur la courbe.

On en déduit également la généralisation du théorème de Pappus.

THÉORÈME XI. — *Le rapport des produits des distances d'un point de la courbe, aux côtés de deux trilatères conjugués, est constant.*

COROLLAIRE. *A une cubique, on peut inscrire un système de deux quadrilatères conjugués.*

Nous appelons quadrilatères *conjugués* à une cubique, deux quadrilatères tels qu'un côté du premier rencontre tous les côtés du second, un seul excepté, en des points situés sur la courbe. Les côtés qui ne se rencontrent pas sur la courbe sont dits opposés (**).

Considérons les transversales 123, 1′2′3′; puis les droites 11′, 22′,

(*) F. FOLIE, *Fondement d'une Géométrie supérieure cart.*, p. 5.

(**) *Ibidem*, pp. 13 et 22. Voir dans le même travail une démonstration différente des théorèmes X, XI et XII.

Digitized by Google

33'; 12', 23', 31', qui déterminent deux nouvelles transversales 1''2''3'', $p''q''r''$.

Les deux quadrilatères

$$11'1'',\quad 22'2'',\quad 33'3'',\quad p''q''r'';$$

$$23'r'',\quad 31'p'',\quad 12'q'',\quad 1''2''3''$$

satisfont à la définition donnée plus haut.

L'existence de ces quadrilatères conjugués est importante, parce qu'elle permet d'établir un théorème remarquable, extension, aux cubiques, du théorème de Pascal.

Appelons $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$; $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$ les côtés de deux quadrilatères conjugués, δ_1, δ'_1; δ_2, δ'_2, etc., étant les côtés opposés, et conservons, pour le surplus, les notations précédentes.

Soient A et B les points d'intersection des deux premiers couples de côtés; menons la transversale AB.

Cette transversale rencontre la cubique en trois points a, b, c, et les côtés δ_3, δ'_3; δ_4, δ'_4 en des points p, p'; q, q', que nous supposerons distincts pour le moment.

Nous pouvons observer que les six droites

$$11'1'',\quad 22'2'',\quad 33'3'',\quad 123,\quad 1'2'3',\quad 1''2''3''$$

et

$$12'q'',\quad 23'r'',\quad 31'p'',\quad 123,\quad 1'2'3',\quad p''q''r'',$$

forment deux systèmes de trilatères conjugués.

AB rencontre le premier système en des points A, B, p; t, t', q' et le second, en des points A, B, p'; t, t', q.

Par suite, d'après le théorème X, les systèmes suivants sont en involution I_1^3 :

$$a,\ b,\ c;\quad A,\ B,\ p;\quad t,\ t',\ q';$$

$$a,\ b,\ c;\quad A,\ B,\ p';\quad t,\ t',\ q.$$

Digitized by Google

De là se déduisent les égalités

$$\frac{Aa.Ab.Ac}{At.At'.Aq'}=\frac{Ba.Bb.Bc}{Bt.Bt'.Bq'}=\frac{pa.pb.pc}{pt.pt'.pq'},$$

$$\frac{Aa.Ab.Ac}{At.At'.Aq}=\frac{Ba.Bb.Bc}{Bt.Bt'.Bq}=\frac{p'a.p'b.p'c}{p't.p't'.p'q}.$$

D'où

$$\frac{Aq'}{Aq}=\frac{Bq'}{Bq}.$$

En conséquence, q coïncide avec q', et de même p avec p'.

On en conclut ce théorème :

Théorème XII. — *Les côtés opposés de deux quadrilatères conjugués à une cubique se coupent en quatre points situés en ligne droite* (*).

Autrement encore :

Soient $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$; $\delta'_1\delta'_2\delta'_3\delta'_4$, deux quadrilatères conjugués à la courbe.

Par la notation $\delta_1(pqr)$, nous indiquerons que le côté δ_1 rencontre la cubique aux points p, q et r.

On aura ainsi, conformément à la définition :

$$\begin{array}{ll} \delta_1(pqr), & \delta'_1(p'p''p'''), \\ \delta_2(p'q'r'), & \delta'_2(qq''q'''), \\ \delta_3(p''q''r''), & \delta'_3(rr'r'''), \\ \delta_4(p'''q'''r'''). & \delta'_4(p, q', r''). \end{array}$$

$p'p''qq''rr'$ sont sur une conique, puisque la cubique $\delta_1\delta_2\delta_3$ rencontre la courbe donnée en neuf points, dont trois $p\,q'\,r''$ sont sur la droite δ'_4. (Théor. IX, corol. I.)

(*) F. Folie, F. G. S. C., p. 22.

Digitized by Google

Par suite, les droites $\delta_1\delta'_1$; $\delta_2\delta'_2$; $\delta_3\delta'_3$ se coupent en trois points situés sur une droite Δ (Théor. de Pascal).

De même $p' p''' q q''' p q'$ sont sur une conique.

$\delta_1\delta'_1$; $\delta_2\delta'_2$, $\delta_4\delta'_4$ se coupent sur une droite qui ne peut différer de Δ, puisqu'elle a, avec celle-ci, deux points communs.

On peut démontrer la même chose pour les autres combinaisons de trois couples de côtés opposés.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

RAPPORT ANHARMONIQUE.

Ainsi que nous venons de le voir, la cubique donnée peut toujours être représentée par l'équation

$$C_3 \equiv \lambda_1\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2\gamma_2 + \lambda_3\alpha_3\beta_3\gamma_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

où les équations :

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0; \quad \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0, \quad \alpha_3\beta_3\gamma_3 = 0,$$

représentent trois trilatères trijugués à la courbe.

Ces trois trilatères ont sept points communs. Nous appellerons *points trijugués* les six points composés des trois centres des faisceaux et des trois points d'intersection des côtés $\alpha_1, \beta_3, \gamma_2; \alpha_2, \beta_1, \gamma_3; \alpha_3, \beta_2, \gamma_1$.

Soit m un point quelconque de la courbe, dont les coordonnées sont p, q, r.

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6 les points trijugués; soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du point i, i prenant les valeurs 1, 2, 3 ..., 6.

L'équation (16) pourra s'écrire

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_3 + \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

chacun des déterminants représente l'aire d'un triangle : cette égalité devient donc

$$\lambda_1(m12)(m34)(m56) + \lambda_2(m14)(m36)(m52) + \lambda_3(m16)(m32)(m54) = 0.$$

Remplaçant l'aire par le produit de deux côtés et du sinus de l'angle compris, sinus que nous représenterons par (ik), on a :

$$\lambda_1 . m1 . m2(12)m3 . m4(34)m5 . m6(56) + \lambda_2 . m1 . m4(14)m3 . m6(36)m5 . m2(52) + \lambda_3 m1 . m6(16)m3 . m2(32)m5 . m4(54) = 0.$$

On en déduit encore

$$\lambda_1(12)(34)(56) + \lambda_2(14)(36)(52) + \lambda_3(16)(32)(54) = 0.$$

Si l'on divise par le premier terme, cette égalité devient :

$$1 + \lambda'_1 \frac{(14)(36)(52)}{(12)(34)(56)} + \lambda'_2 \frac{(16)(32)(54)}{(12)(34)(56)}.$$

Les quotients qui figurent dans le premier membre sont des rapports anharmoniques (*).

Nous les représenterons par

$$\mathfrak{J}^m_{462}, \quad \mathfrak{J}^m_{624},$$

pour indiquer à la fois, par l'indice supérieur, l'origine du faisceau des droites, et par l'indice inférieur, l'ordre de ces rayons.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XIII. — *Il existe une relation linéaire entre les rapports anhar-*

(*) Ire partie, p. 29.

Digitized by Google

moniques, du troisième ordre, du faisceau obtenu en joignant un point quelconque de la cubique à six points trijugués (*).

Soient m, m', m'', trois points de la courbe, on a les égalités

$$1 + \lambda'_1 \mathfrak{I}^{m}_{462} + \lambda'_2 \mathfrak{I}^{m}_{624} = 0,$$

$$1 + \lambda'_1 \mathfrak{I}^{m'}_{462} + \lambda'_2 \mathfrak{I}^{m'}_{624} = 0,$$

$$1 + \lambda'_1 \mathfrak{I}^{m''}_{462} + \lambda'_2 \mathfrak{I}^{m''}_{624} = 0.$$

On en déduit la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{I}^{m}_{462} & \mathfrak{I}^{m}_{624} \\ 1 & \mathfrak{I}^{m'}_{462} & \mathfrak{I}^{m'}_{624} \\ 1 & \mathfrak{I}^{m''}_{462} & \mathfrak{I}^{m''}_{624} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(19)}$$

Si nous exprimons le théorème sur la constance du rapport anharmonique des coniques, à l'aide des mêmes notations, nous obtiendrons la relation de forme tout à fait identique

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{I}^{m}_{42} \\ 1 & \mathfrak{I}^{m'}_{42} \end{vmatrix} = 0.$$

Le théorème XIII, ou celui qui est exprimé par l'équation (19), peut être ramené aisément au théorème VI, appliqué aux trilatères trijugués.

Supposons que les trois points m, m', m'' soient en ligne droite, et désignons par I, II, III; I', II', III'; I'', II'', III'', les points où cette droite rencontre les trois trilatères trijugués; puis, comme tantôt, par $m\alpha_1$, $m\alpha_2$, etc., les distances de m aux droites α_1, α_2, etc.

(*) C. Le Paige, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XLV, p. 94.

Digitized by Google

On a

$$2(m12) = \overline{12}.m\alpha;\quad 2(m'12) = \overline{12}.m'\alpha_1;\quad 2(m''12) = \overline{12}.m''\alpha_1,\quad \text{etc.}$$

De plus,

$$\frac{m\alpha_1}{m\mathrm{I}} = \frac{m'\alpha_1}{m'\mathrm{I}} = \frac{m''\alpha_1}{m''\mathrm{I}} = p,\quad (12) = \frac{2(m12)}{m1.m2}.$$

Par suite,

$$(12) = \frac{\overline{12}.m\alpha_1}{m1.m2} = p.\frac{\overline{12}.m\mathrm{I}}{m1.m2},$$

et d'autres formules analogues.

En introduisant ces expressions dans (19), on arrive à la relation

$$\begin{vmatrix} m\mathrm{I}.m\mathrm{II}.m\mathrm{III}. & m\mathrm{I}'.m\mathrm{II}'.m\mathrm{III}'. & m\mathrm{I}''.m\mathrm{II}''.m\mathrm{III}'' \\ m'\mathrm{I}.m'\mathrm{II}.m'\mathrm{III}. & m'\mathrm{I}'.m'\mathrm{II}'.m'\mathrm{III}'. & m'\mathrm{I}''.m'\mathrm{II}''.m'\mathrm{III}'' \\ m''\mathrm{I}.m''\mathrm{II}.m''\mathrm{III}. & m''\mathrm{I}'.m''\mathrm{II}'.m''\mathrm{III}'. & m''\mathrm{I}''.m''\mathrm{II}''.m''\mathrm{III}'' \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui exprime que les quatre ternes de points m, m', m''; I, II, III; I′, II′, III′; I″, II″, III″ appartiennent à une I_2^3 (*).

Les deux théorèmes XIII et VI sont donc, chacun en un certain sens, plus généraux l'un que l'autre, et cessent d'être complètement identiques, comme ils le sont dans la théorie des coniques.

A un autre point de vue, on peut signaler l'identité de forme entre les théorèmes XIII et VI.

En effet, si nous développons le déterminant (19), nous avons la relation

$$\mathfrak{J}^{m}_{462}\mathfrak{J}^{m'}_{624} - \mathfrak{J}^{m}_{624}\mathfrak{J}^{m'}_{462} + \mathfrak{J}^{m}_{624}\mathfrak{J}^{m''}_{462} - \mathfrak{J}^{m}_{462}\mathfrak{J}^{m''}_{624} + \mathfrak{J}^{m'}_{462}\mathfrak{J}^{m''}_{624} - \mathfrak{J}^{m'}_{624}\mathfrak{J}^{m''}_{462} = 0.$$

D'un autre côté, le théorème VI peut s'exprimer par l'égalité

$$\mathfrak{J}_{2'}\mathfrak{J}'_{3'} - \mathfrak{J}_{3}\mathfrak{J}'_{2'} + \mathfrak{J}_{1'}\mathfrak{J}'_{2'} - \mathfrak{J}_{2}\mathfrak{J}'_{1} + \mathfrak{J}_{3'}\mathfrak{J}'_{1'} - \mathfrak{J}_{1}\mathfrak{J}'_{3'} = 0\ (^{**}).$$

(*) C. Le Paige, *Mémoire sur quelques applications, etc.*, p. 37.
(**) Ire partie, p. 19.

Digitized by Google

Le théorème VI peut se conclure immédiatement du mode de génération des cubiques, en se rappelant la propriété suivante de l'homographie du troisième ordre et du second rang.

Si neuf points

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}$$

sont tels que les ternes de points obtenus en formant les termes du déterminant composé de ces neuf éléments appartiennent à l'homographie, les points triples de cette homographie sont en involution I_2^3 *avec les ternes composés des colonnes de ce déterminant* (*).

Les considérations qui précèdent ont pour but de faire voir jusqu'à quel point les théorèmes fondamentaux des cubiques s'impliquent entre eux.

Occupons-nous maintenant des trilatères conjugués.

Deux de ces trilatères se coupent en neuf points situés sur la courbe.

Choisissons six de ces intersections, de telle sorte que chacun des six côtés contienne deux de ces points ; nous excluons, par exemple, parmi les neuf intersections, les trois points pris comme centres des faisceaux.

Ces points seront les *sommets* des deux trilatères.

Alors, en partant de l'équation

$$C_3 = \lambda_1\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0,$$

et en faisant les calculs analogues à ceux qui précèdent, nous arrivons à cette propriété :

Théorème XIV. — *Le rapport anharmonique du faisceau de six droites,*

(*) C. Le Paige, *Atti dell' Accad. de' Nuovi Lincei,* mémoire cité.

Digitized by Google

obtenu en joignant un point quelconque de la cubique aux sommets de deux trilatères conjugués, est constant (*).

A son tour, le théorème XIV peut conduire au théorème X, et ce dernier peut se déduire immédiatement de la génération des cubiques.

Nous ne répéterons pas la démonstration de ces proprositions, démonstration entièrement semblable à celle que nous avons donnée plus haut pour les trilatères trijugués.

(*) F. Folie, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 2e série, t. XLIV, p. 473.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTIONS.

Nous devons maintenant appliquer les théories qui précèdent à la construction des cubiques. Pour y arriver, nous employerons les théories exposées dans le chapitre II, 1^re^ partie, et dans le chapitre II de la seconde partie, c'est-à-dire celles qui sont relatives à l'involution.

Nous commencerons par résoudre un certain nombre de problèmes fondamentaux dont nous aurons à nous servir ensuite.

Bien que nous ayons toujours traité jusqu'ici, suivant en cela l'ordre qui nous paraissait le plus logique, l'involution I_2^3 avant l'involution I_1^3, nous croyons préférable, dans le cas actuel, de suivre l'ordre inverse.

Nous aurons l'occasion de nous appuyer sur deux théorèmes, en quelque sorte évidents, que nous rappellerons d'abord, pour ne pas interrompre, dans la suite, l'ordre des déductions.

A.) *Toutes les coniques qui passent par trois points fixes, dont l'un situé sur une conique* C_2, *déterminent, sur cette conique, des points appartenant à une* I_2^3.

B.) *Toutes les coniques qui passent par quatre points fixes, dont l'un situé sur une conique* C_2, *déterminent, sur cette conique, des points appartenant à une* I_1^3.

Problème I. — *On donne sept points* $1, 1', 1''; 2, 2', 2''; 3$ *d'une involution* I_1^3; *construire les deux autres points du terne* $3, 3', 3''$.

Digitized by Google

Supposons que les sept points donnés soient distribués sur une droite quelconque.

Par 3, menons une droite arbitraire δ.

Joignons 1 et 2, 1′ et 2′ à deux points arbitraires I, I′ de δ.

Au trilatère 1′I′, 2I, II′, inscrivons un triangle dont les côtés passent respectivement par 1″, 2″ et a, intersection de 1I et de 2′I′ (*).

Soit δ' le côté de ce triangle, passant par a et I″, p, q ses sommets.

Les cubiques 1′I′, 1I, 1″I″ et 2′I′, 2I, 2″I″ se coupent en neuf points, dont six, I, I′, I″; p, q, a, sont situés sur les droites δ, δ'; les trois autres

$$(1'I', 2I) = \alpha''; \quad (1I, 2''I'') = \alpha'; \quad (1''I'', 2'I') = \alpha,$$

sont donc situés sur une droite δ''.

Les intersections de δ', δ'' avec la droite de 32″2′...1 déterminent les points 3′, 3″.

Ce problème a été résolu différemment par Poncelet et par M. Em. Weyr (**).

Problème II. — *On donne onze points 1, 1′, 1″; 2, 2′, 2″; 3, 3′, 3″; 4, 4′, d'une involution I_2^3; construire le douzième 4″.*

Première solution. Au moyen du problème précédent, complétons les involutions

$$1, 1', 1'', 2, 2', 2'', 4; \quad 1, 1', 1'', 3, 3', 3'', 4.$$

Nous obtenons ainsi des ternes

$$4 4_1' 4_1''; \quad 4_1 4_2' 4_2'',$$

qui appartiennent à l'involution donnée.

(*) Steiner, *Werke*, 1[ter] B[d], s. 511. Chasles, G. S., 1[re] éd., p. 222.

(**) Poncelet, *Traité des propriétés projectives, etc.*, t. II, p. 242.

Em. Weyr, *Gründzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*, pp. 23 et 37.

Pour les cas particuliers, même mémoire passim. Ce travail contenant la solution de la plupart des problèmes relatifs à une I_1^3, nous n'avons pas cru nécessaire de nous étendre sur ce sujet.

Digitized by Google

Mais, dans une involution I_2^3, à un point fixe correspondent des couples de points appartenant à une I_1^2.

Dans le cas actuel, cette involution quadratique est déterminée par les couples $4_1'4_1''$; $4_2'4_2''$. Il suffira donc de chercher le point $4''$, homologue de $4'$, dans cette involution.

Bien qu'il semble, à première vue, que l'on doive employer des constructions du second degré pour arriver à la détermination de $4''$, nous allons voir qu'il n'en est rien.

Nous pouvons toujours supposer que les points donnés soient transportés sur une conique, de telle sorte que nous ayons les points

$$x_1x_2x_3;\quad y_1y_2y_3,\quad z_1z_2z_3,\quad u_1u_2.$$

Menons les droites x_1x_2; y_1y_2 qui se coupent en B.

La droite u_1B déterminera, sur la conique, le point A.

x_3A et y_3A détermineront, par leurs intersections avec x_1x_2, y_1y_2, les points A′ et B′.

De même, x_1x_2 et z_1z_2 se coupent en un point B_1.

B_1u_1 donne le point A_1 et les droites x_3A_1, z_3A_1 donnent, par leurs intersections avec x_1x_2, z_1z_2, les points A_1', B_1'.

Les deux droites A′B′, $A_1'B_1'$ se coupent en un point $\bar{\omega}$.

En joignant $\bar{\omega}$ au point u_2, nous obtenons, sur la conique, le point u_3.

En effet, nous voyons que, par la première partie de la construction, celle qui donne la droite A′B′, nous avons déterminé le couple complétant, avec u_1, l'involution déterminée par les deux ternes $x_1x_2x_3$; $y_1y_2y_3$.

Car les couples de côtés opposés du quadrangle ABA′B′ sont des coniques satisfaisant aux conditions du théorème (B).

Nous pouvons remarquer, dans cette construction, que les couples de points x_1x_2; y_1y_2, z_1z_2 peuvent être imaginaires, ou être donnés par couples, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire de les construire individuellement, c'est-à-dire de chercher les intersections de la droite x_1x_2, par exemple, avec la conique.

Le couple u_1u_2 pourrait même être imaginaire sans que la construction devienne impossible.

Digitized by Google

En effet, supposons que l'on ait construit le groupe des éléments neutres, ou la droite qui, par ses intersections avec C_2, détermine ce groupe : cette droite coupe la droite u_1u_2 en un point S; il suffira de mener, par S, une droite qui coupe la conique en deux points réels $u'_1u'_2$: ces deux points peuvent être substitués à u_1u_2 pour la construction de u_3.

Pour le démontrer, observons que, à u_3, il correspond des couples de points u_1u_2, $u'_1u'_2$, etc., en involution. Les éléments neutres en font nécessairement partie, de telle sorte que u_1u_2 et ces deux points caractérisent l'involution.

Quant à la construction du groupe neutre (ou hessien des points triples), on peut faire usage de la solution suivante, ou chercher, par exemple, les involutions I_1^2, $I_1'^2$ correspondant à des points arbitraires p_1, p'_1 et construire le groupe commun à ces deux involutions. Toutes ces constructions sont d'ailleurs linéaires.

En effet, dans la solution précédente, il suffit de s'arrêter à la détermination du point ϖ, relatif à un point u_1. En déterminant de même un point ρ relatif à un autre point U_1, la droite $\varpi\rho$ est la droite cherchée.

Seconde solution. Nous avons vu que la relation d'homographie $f = 0$ peut s'écrire

$$f = \lambda_1 u_1 v_1 w_1 + \lambda_2 u_2 v_2 w_2 = 0,$$

ou

$$\lambda_1 (x_1 - \delta_1)(y_1 - \delta'_1)(z_1 - \delta''_1) + \lambda_2 (x_1 - \delta_2)(y_1 - \delta'_2)(z_1 - \delta''_2) = 0,$$

les x, y, z, et les δ représentant des distances à une origine fixe sur une droite, par exemple.

Par suite, si x_1, y_1, z_1; X_1, Y_1, Z_1, représentent deux groupes de l'homographie, on a

$$\frac{(x_1 - \delta_1)(y_1 - \delta'_1)(z_1 - \delta''_1)}{(X_1 - \delta_1)(Y_1 - \delta'_1)(Z_1 - \delta''_1)} = \frac{(x_1 - \delta_2)(y_1 - \delta'_2)(z_1 - \delta''_2)}{(X_1 - \delta_2)(Y_1 - \delta'_2)(Z_1 - \delta''_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Si les points appartiennent à une I_2^3, les trois covariants Σ deviennent identiques entre eux et au hessien des points triples (*).

(*) 1re partie, p. 17.

On a

$$\delta_1 = \delta_1' = \delta_1''; \quad \delta_2 = \delta_2' = \delta_2''.$$

De l'équation (20), on conclut que les deux points δ_1, δ_2, appartiennent à toutes les I_1^3, caractérisées par deux ternes quelconques de l'involution I_2^3 donnée.

Supposons maintenant que les trois groupes de points $x_1x_2x_3$; $y_1y_2y_3$; $z_1z_2z_3$ soient représentés sur une conique C_2, et rappelons-nous le mode suivant de représentation d'une I_1^3 :

Tous les triangles inscrits à une conique C_2 *et circonscrits à une seconde conique* Σ_2 *déterminent, par leurs sommets, une involution* I_1^3 (*).

Par suite, on retrouve ce théorème :

Lorsqu'on inscrit trois triangles à une conique C_2, *les trois coniques inscrites à ces triangles, pris deux à deux, ont une tangente commune.*

Cette tangente peut d'ailleurs se construire linéairement. Désignons-la par h.

Elle détermine, d'après ce qui précède, par son intersection avec C_2, les éléments neutres de l'involution donnée.

Mais, outre les neuf points $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$, qui nous ont servi à déterminer h, nous nous sommes donné deux points d'un terne : u_1, u_2.

La conique déterminée par les cinq tangentes x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, u_1u_2, h permettra de construire u_3, en achevant le triangle circonscrit, dont deux des sommets sont u_1, u_2 (**).

Il existe encore d'autres solutions de ces questions que nous n'exposerons pas, du moins pour le moment.

PROBLÈME III. — *Connaissant les points triples d'une involution* I_2^3, *et deux points d'un terne, compléter ce terne.*

(*) EM. WEYR. *Op. cit.*
(**) C. LE PAIGE, *Sitzb. der k. Akad. der Wiss. zu Wien*, Bd. LXXXIV, s. 236.

Digitized by Google

Supposons que les points triples t_1, t_2, t_3, et les deux points donnés u_1, u_2 soient sur une conique C_2.

Construisons les tangentes à la conique en t_1, t_2, t_3; ces trois tangentes constituent un nouveau triangle $T_1T_2T_3$.

Les côtés opposés t_1t_2, T_1T_2; t_2t_3, T_2T_3; t_3t_1, T_3T_1, des deux triangles se coupent en trois points α_3, α_1, α_2, situés sur une droite h.

Cette droite n'est autre chose que la hessienne des points triples; en effet, toutes les coniques qui passent par α_1, α_2, t_3 déterminent, sur C_2, une I_2^3 (théor. A).

Or, une droite quelconque, passant par t_3 constitue, avec h, une de ces coniques : par suite les deux intersections de h avec C_2 donnent bien les éléments neutres de l'involution.

Pour compléter le terne, il suffit de faire passer une conique par α_1, α_2, t_3, u_1, u_2; elle coupera C_2 en u_3; ce problème est linéaire, car on connaît déjà les trois points communs t_3, u_1, u_2.

La construction suivante mène d'ailleurs aisément à la détermination de u_3.

Joignons les points u_1, α_2 par une droite qui coupe C_2 en p.

La droite t_2p coupe h en k, et ku_2 rencontre la conique au point cherché u_3.

En effet, appelons h_1, h_2 les points d'intersection, réels ou imaginaires, de h avec C_2.

Les trois ternes $u_1h_1h_2$; u_1pt_2, $u_1u_2u_3$ font partie de l'involution. Donc u_3 est l'homologue de u_2 dans l'involution quadratique déterminée par les deux groupes h_1h_2, pt_2.

La construction précédente repose sur la détermination du groupe neutre de l'involution; mais cette détermination ne peut plus s'effectuer à l'aide des deux triangles $t_1t_2t_3$, $T_1T_2T_3$, lorsque deux des points triples t_2, t_3, par exemple, sont imaginaires.

Dans ce cas, on peut y substituer la détermination suivante de la droite h_1h_2.

Par t_1 menons la tangente à C_2. Cette tangente coupe la droite t_2t_3 en un point S.

Menons la seconde tangente St_1'.

Puis, par le même point S, une transversale $St_2't_3'$.

Les deux tangentes en $t_2't_3'$ se coupent en un point a situé sur t_1t_1'.

Digitized by Google

Les deux droites $t'_2 t'_1$, $t'_3 t'_1$, déterminent sur $t'_3 a$, $t'_2 a$, deux points A, B, et la droite AB passe par S.

A chaque droite $St'_2 t'_3$ correspond donc une droite SAB, et réciproquement. Il suffira de construire, dans cette H_1^2, le rayon correspondant à $St_2 t_3$.

La démonstration de cette construction serait un peu longue : il nous suffira de dire qu'elle repose sur le théorème suivant :

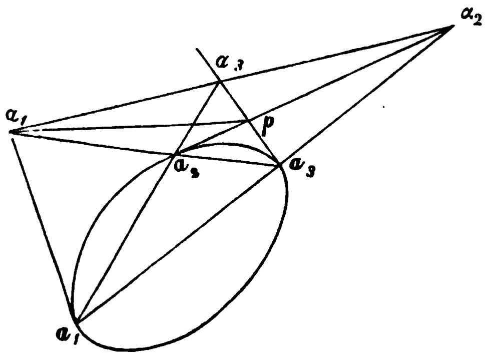
Les points triples d'une involution I_2^3 *forment un groupe de l'involution particulière* I_1^3 *qui a pour points triples les deux éléments neutres.*

Ce théorème se déduit immédiatement d'une propriété connue, des formes cubiques, à savoir qu'une telle forme peut toujours s'écrire :

$$a\zeta^3 + b\eta^3,$$

ζ et η étant les facteurs du hessien, propriété qui est un cas particulier du théorème que nous avons mentionné plus haut sur la forme canonique d'une forme trilinéaire (*).

D'après la remarque faite au problème II, la solution sera toujours possible, même si le groupe donné, $u_1 u_2$, est imaginaire.



La construction suivante de la hessienne des points triples est encore plus simple.

Soient a_1, a_2, a_3 les points triples; les tangentes à la courbe en a_1, a_2, a_3 déterminent, sur les côtés du triangle, les trois points, en ligne droite, α_1, α_2, α_3.

Soit, de plus, p, le pôle de $a_2 a_3$. On voit que $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$ est conjuguée harmonique de $\alpha_1 a_2 a_3$, par rapport aux deux droites $\alpha_1 p$, $\alpha_1 a_1$.

(*) C. Le Paige, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1049.

Comme il est toujours possible de construire le pôle de a_2a_3, même si ces deux points sont imaginaires, la construction précédente de la hessienne a toute la généralité désirable.

PROBLÈME IV. — *Construire les points triples d'une involution déterminée par trois ternes de points* $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$.

Soient t_1, t_2, t_3 les points triples.

Ils sont conjugués harmoniques des groupes $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ (*).

En conséquence, $t_1t_2t_3$ peut être regardé comme un terne appartenant à la fois aux trois involutions qui ont pour points triples les groupes $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$.

On est donc ramené à la solution de cette question :

PROBLÈME V. — *Construire le groupe commun à trois involutions* I_2^3, $I_2'^3$, $I_2''^3$, *données par leurs points triples.*

Supposons que ces points triples soient donnés par les équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0.$$

Les trois involutions sont alors définies par les équations :

$$a_0x_1x_2x_3 + a_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + a_2(x_1 + x_2 + x_3) + a_3 = 0, \quad . \; . \; . \quad (a)$$

$$b_0x_1x_2x_3 + b_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + b_2(x_1 + x_2 + x_3) + b_3 = 0, \quad . \; . \; . \quad (b)$$

$$c_0x_1x_2x_3 + c_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + c_2(x_1 + x_2 + x_3) + c_3 = 0. \quad . \; . \; . \quad (c)$$

Les groupes communs à (a) et à (b) forment une I_1^3; ceux qui sont communs à (b) et à (c) une involution $I_1'^3$.

Il faut donc construire les deux coniques d'involution de ces deux I_1^3, $I_1'^3$, ce qui est aisé puisqu'il suffit de construire deux groupes de ces involutions.

(*) 1re partie, p. 16, théor. II. Combiné avec la définition des points conjugués harmoniques, p. 22, théor. IX.

Digitized by Google

Ces deux coniques ont quatre tangentes communes. L'une est la hessienne du groupe $b_x^3 = 0$; les trois autres forment un triangle inscrit dont les sommets représentent les points cherchés.

Pour démontrer ce qui précède, il suffit d'éliminer x, par exemple, entre (a) et (b), puis entre (b) et (c); puis d'éliminer y entre les deux équations obtenues.

On trouve finalement l'équation

$$(bb')^2 b_x b'_x \left[(ab)(bc)(ca) a_x b_x c_x\right]^2 = 0 \text{ (*)},$$

ce qui démontre le théorème.

Quant à la construction d'un groupe de I_1^3, par exemple, choisissons un point p_1. A ce point, dans (a) et (b) correspondent deux involutions quadratiques faciles à construire, par le problème III; le groupe $p_2 p_3$, commun à ces deux involutions, constitue, avec p_1, un terne de I_1^3.

Nous nous sommes quelque peu étendus sur ces diverses questions, parce qu'elles nous seront utiles dans ce qui va suivre, et aussi parce qu'elles nous paraissent offrir quelque intérêt au point de vue de la représentation des formes algébriques.

En général, il suffit de connaître neuf points d'une cubique pour déterminer complètement la courbe, comme cela ressort immédiatement de ce qui précède.

La construction des cubiques reviendra donc à déterminer autant de points de la courbe qu'on le voudra, à l'aide de neuf points donnés.

Nous ramènerons ces questions à la solution de trois, ou plutôt de deux problèmes, car le premier ne nous sera même pas nécessaire, et, si nous le donnons, c'est afin de ne laisser de côté aucun des problèmes fondamentaux.

Problème VI. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer les intersections de cette courbe avec une droite* Δ.

(*) C. Le Paige, *Sitzb. der k. Akad. der Wiss. zu Wien*, Bd. LXXXIV, s. 235.

Digitized by Google

Soient 1, 2 ..., 6, a, b, c, les neuf points donnés.

Le faisceau de cubiques $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, a)$ détermine, sur Δ, une involution I_2^3 (théor. V, p. 15). Pour obtenir des ternes de cette involution, nous pourrons employer les cubiques décomposables (12345)(6a), (12346)(5a), (1345a)(23), par exemple (*).

Par le problème IV, nous déterminerons les points triples de cette involution.

En faisant la même chose pour les faisceaux $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, b)$, $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, c)$, nous n'aurons plus qu'à appliquer le problème V, car la cubique à construire, appartenant aux trois faisceaux, détermine, sur Δ, le groupe commun aux trois involutions.

Il peut se faire que les neuf points ne déterminent pas une cubique; nous verrons, au problème VIII, dans quel cas cela pourra se présenter.

Problème VII. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer les intersections de cette courbe avec une droite Δ qui passe par un des neuf points donnés.*

Soit c le point par lequel passe Δ.

Les deux faisceaux $F_2^3(1, \ldots, 6, a)$, $F_2^3(1, \ldots, 6, b)$ déterminent sur Δ deux involutions I_2^3. Dans chacune d'elles, au point c correspond une involution I_1^2, facile à déterminer par le problème III. Le groupe commun à ces deux involutions quadratiques est le couple d'intersections à construire.

Problème VIII. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer la troisième intersection de cette courbe avec une droite Δ qui passe par deux des neuf points donnés.*

Soient b et c les points situés sur Δ.

Le faisceau $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, a)$ détermine sur Δ une I_2^3.

(*) Par (12345), etc., nous désignons la conique passant par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5.

Par F_k^n, nous désignons les courbes d'ordre n en nombre k^{plement} infini qui passent par les points donnés.

Digitized by Google

Par le problème II, nous déterminerons le point qui complète le terne dont on connaît bc.

Si le groupe bc représente le hessien des points triples de l'involution caractérisée par le faisceau, le problème est indéterminé, car bc constituant, avec un point quelconque de Δ, un terne de l'involution, il existera une infinité de cubiques passant par les neuf points.

Il est donc toujours facile de déterminer si, par un groupe de neuf points donnés, il passe une seule cubique, ou s'il en passe une infinité.

Problème IX. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, construire un système de trilatères trijugués à la courbe.*

Soient 1, 2, ..., 9, les points donnés.

Choisissons-en quatre arbitrairement, 1, 2, 3, 4, par exemple.

Par le problème VIII, on peut contruire les points d'intersection 1', 2', 3' de la courbe avec les transversales 14, 24, 34.

Les points 11', 22', 33' sont six points trijugués.

Les trois systèmes de droites 13', 22', 31'; 12', 21', 33'; 11', 23', 32', constituent un système de trois trilatères ayant sept points communs avec la courbe.

Problème X. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, construire un système de trilatères conjugués à la courbe.*

Choisissons encore arbitrairement quatre points 1, 2, 3, 4. Puis déterminons les intersections 1', 3' des droites 12, 34 avec la courbe.

Les droites 13, 24, 1'3' coupent la courbe en trois nouveaux points 1'', 2'', 3'', situés en ligne droite.

Nous avons maintenant les deux systèmes suivants de trois droites 121', 343', 1''2''3''; 131'', 242'', 1'3'3'' qui constituent deux trilatères conjugués.

Problème XI. — *Construire une cubique dont on connaît neuf points.*

Digitized by Google

Première solution. A l'aide de ces neuf points, construisons un système de trois trilatères trijugués; puis prenons deux des neuf points donnés, 89, par exemple, non compris parmi les sommets des trilatères.

La transversale 89 coupe les trois trilatères en neuf points qui caractérisent une I_2^3.

Il suffira, par le problème II, de compléter le terne 89. Si nous employons deux autres points, 87, nous déterminerons un nouveau point de la courbe.

Celui-ci, joint au précédent, nous permettra d'en construire un troisième, et ainsi de suite, à l'aide d'intersections de lignes droites.

Seconde solution. A l'aide des neuf points, construisons un système de deux trilatères conjugués.

Puis autour d'un des neuf points donnés, 9, par exemple, non situé sur les côtés des trilatères, faisons pivoter une transversale.

Dans chacune de ses positions, cette transversale coupera les deux trilatères en deux ternes de points, caractérisant une I_1^3.

Il suffira, par le problème I, de compléter le terne dont 9 est un point.

Nous ferons observer que, de l'ensemble des constructions qui précèdent, il résulte que l'on peut construire, par des intersections de lignes droites, autant de points d'une cubique, qu'on le veut, étant donnés neuf points qui déterminent cette courbe.

En effet, cette question a été ramenée au problème VIII.

Dans le faisceau $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, a)$ que nous avons employé pour résoudre cette question, nous pouvons employer les cubiques décomposables suivantes :

$$(12345)(6a), \quad (12346)(5a), \quad (12456)(3a).$$

Ces cubiques donneront trois ternes de points :

$$x_1x_2x_3; \quad y_1y_2y_3; \quad z_1z_2z_3$$

sur la droite Δ.

Digitized by Google

Parmi ces points, les trois x_3, y_3, z_3 seront toujours réels.

Les trois couples x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2, intersections de Δ avec une conique, peuvent être imaginaires.

Mais, comme nous l'avons fait observer à l'occasion du problème II, cette circonstance importe peu.

En effet, il faut représenter les neuf points sur une conique C_2 quelconque. Voyons donc comment sera représenté, sur cette conique que nous pouvons choisir arbitrairement, et supposer donnée, par exemple, par cinq points A, B, C, D, E, un couple tel que x_1x_2.

Il faut trouver les intersections de Δ avec la conique (12345) (*).

Menons les droites 12, 23; 14, 24; 15, 25 qui détermineront, sur Δ, des couples α, α' ; β, β' ; γ, γ'.

Si parmi les cinq points A, B, C, D, E, nous en choisissons un arbitrairement, il faudra déterminer les intersections de cette conique avec les droites $A\alpha$, $A\alpha'$, ... $A\gamma'$, problèmes linéaires, puisque l'on connaît une des intersections A.

Nous obtenons ainsi, sur la conique C_2, six nouveaux points p, p'; q, q' ; r, r' qui définissent une homographie.

Par des intersections de lignes droites, il sera possible de trouver la droite qui, par ses intersections avec C_2, représente les points doubles de cette homographie.

Ces intersections représentent les intersections de Δ avec C_2. Elles peuvent être imaginaires, puisque, pour la solution du problème II, il nous suffit de connaître la droite qui unit ces deux points.

Nous n'entrerons pas dans le détail des modifications que cette construction peut présenter lorsqu'un certain nombre des points qui déterminent la cubique sont imaginaires, parce que ces questions touchent plutôt à la théorie des coniques.

On aurait, par exemple, à résoudre des questions analogues à la suivante :

(*) La solution de cette question est celle qui a été donnée par STEINER, *Werke*, I[er] Band, S. 512.

Digitized by Google

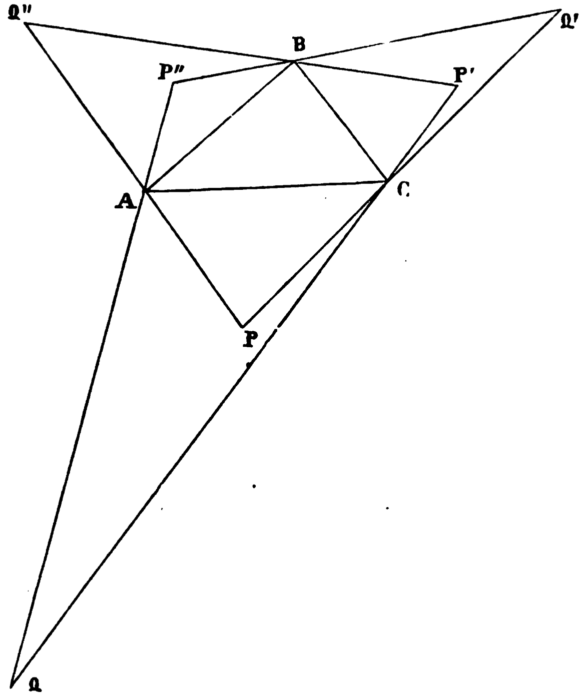
Trouver les intersections d'une droite Δ avec une conique passant par trois points et par les intersections d'une droite δ avec une conique C_2 (*).

De la remarque finale du problème II, il résulte même que les deux points de la cubique, passant par Δ, peuvent être imaginaires, sans que la solution cesse d'être possible.

Rien n'empêche, par exemple, que la cubique soit déterminée par quatre couples de points imaginaires et un neuvième point réel.

Nous avons vu, dans le chapitre premier, que les trois centres des faisceaux homographiques étant donnés, les trois covariants Σ sont représentés par un système de trilatères conjugués.

On peut donc demander de représenter en quelque sorte graphiquement les éléments de l'homographie, et, pour cela, de construire un système de trilatères conjugués passant par trois points situés sur la courbe.



Soient A, B, C les trois centres donnés.

Par A menons une transversale quelconque qui rencontre la courbe en deux points P'', Q, déterminés par le problème VII.

Ensuite P''B détermine Q'; Q'C, P; PA, Q''; Q''B, P'; P'C passera par Q.

En effet, la courbe donnée, et les deux trilatères P''AB; Q''BP', Q'CP; Q''AP, P''BQ', P'C ont huit

(*) Voir, par exemple, Fiedler, *Darstellende Geometrie*, 2^te Auf. s. 117.

points communs. Donc les trois cubiques passent par le même neuvième point, c'est-à-dire que $P'C$ coupe la courbe en Q.

Les droites $P''AQ$, $Q''AP$; $P''BQ'$, $Q''BP'$; $P'CQ$, $Q'CP$ représentent les trois covariants Σ.

L'une de ces six droites est choisie arbitrairement.

Parmi les six points P, P', P'', Q, Q', Q'' deux exigent une construction du second degré; mais la construction de tous les autres se fera par la ligne droite (*).

Nous sommes ainsi ramenés aux conclusions du chapitre premier.

Le choix arbitraire d'une des six droites correspond au choix de l'indéterminée θ; de plus, les trois covariants Σ ayant même discriminant, dès que l'une des racines de l'un d'eux est connue, les racines des autres peuvent s'en déduire par des équations linéaires.

Il est facile de voir qu'un système de cinq points, tels que $ABP''Q''C$, peut être employé pour la génération de la courbe par la méthode de Chasles : les quatre points $ABP''Q''$ constituant la base du faisceau de coniques, et C, le centre du faisceau de droites.

On voit que l'on peut prendre arbitrairement quatre de ces cinq points.

(*) Voir C. Le Paige, *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 509.

Digitized by Google

Digitized by Google

UNE

BALEINE FOSSILE DE CROATIE,

APPARTENANT AU GENRE *MÉSOCÈTE*,

PAR

P.-J. VAN BENEDEN,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences de l'Académie dans sa séance du 3 juin 1882.)

Digitized by Google

UNE

BALEINE FOSSILE DE CROATIE,

APPARTENANT AU GENRE *MÉSOCÈTE.*

Il y a trois ans, le Dr Pilar, professeur à l'Université d'Agram (Croatie), pendant un court séjour qu'il fit en Belgique, me fit part de la découverte d'ossements de Cétacés fossiles indéterminés qui se trouvaient depuis longtemps dans les galeries du Musée national de minéralogie et de géologie d'Agram, et qui avaient été déterrés dans les environs de cette ville.

M. Pilar, comprenant tout l'intérêt qui s'attache à la détermination de ces ossements, me fit obligeamment l'offre de me les communiquer, et, grâce au concours bienveillant du directeur du Musée de zoologie, le professeur Brusini, je reçus, quelque temps après, la collection complète, telle qu'elle avait été déposée dans les galeries. Toutes les pièces étaient encore entourées de la marne dans laquelle elles avaient été recueillies.

J'ai déjà fait part de cet envoi à l'Académie dans la séance du 3 février 1879, en faisant remarquer combien les restes de ces animaux de haute mer excitent l'intérêt, non-seulement au point de vue des affinités qu'ils ont avec les autres Cétacés, mais également au point de vue des changements qu'ont subis les mers d'Europe et surtout la mer Noire pendant la longue période de l'époque tertiaire; cette mer, intérieure aujourd'hui, qui nourrissait à l'époque de la

Digitized by Google

mollasse supérieure de Suisse des Baleines véritables, c'est-à-dire des Cétacés à fanons, ne renferme plus aujourd'hui que trois espèces de Cétacés, toutes les trois de la famille des Dauphins, et qui ne lui sont même pas propres, puisqu'on les trouve également dans la Méditerranée et dans l'Océan. Les eaux de la mer Noire dans lesquelles ces Baleines prenaient leurs ébats s'étendaient alors au sud jusqu'aux pieds de l'Himalaya et au nord couvraient en partie jusqu'à l'Autriche, la Bavière, le Wurtemberg et même la partie basse de la Suisse; la vallée du Danube communiquait avec la vallée du Rhône, et les Cétacés qui se rendaient de la mer Noire à la Méditerranée par ces vallées, ont laissé partout des traces de leur passage.

Les mammifères terrestres de cette époque étaient également bien différents de ceux d'aujourd'hui. C'était une riche et noble végétation qui recouvrait l'Europe à ce temps de la mollasse, dit un paléontologiste célèbre; les Pachydermes dominent encore parmi les mammifères terrestres, les Mastodontes apparaissent comme précurseurs des Éléphants et les Hipparions annoncent l'apparition des Chevaux.

Le travail que nous avons l'honneur de communiquer aujourd'hui a pour objet la description de ces ossements du Musée d'Agram; ils se composent d'une portion de crâne et de vertèbres appartenant à diverses régions du corps.

On a signalé depuis longtemps la présence de Cétacés fossiles dans le voisinage de la mer Noire; les premiers auteurs qui en ont fait mention, après Pallas, sont G. Fischer, qui a fait connaître des vertèbres de ces animaux dans les Mémoires de la Société des naturalistes de Moscou. Il les avait reçus du botaniste russe C.-A. Meyer.

En 1833 le professeur Rathke, visitant le Musée d'antiquités de Kertsch, y découvrit une portion de crâne de Cétacé fossile, provenant du promontoire de Takale dans la presqu'île de Taman, qui avait été déterrée avec d'autres ossements près de la forteresse d'Anapa. Le professeur de Königsberg fit connaître cette découverte dans les Mémoires des savants étrangers de l'Aca-

Digitized by Google

démie impériale de S[t]-Pétersbourg et reconnut parfaitement les affinités de ce nouveau Cétacé avec les Balénoptères qui vivent encore aujourd'hui.

Quelques années plus tard (1841), l'Académie des sciences de S[t]-Pétersbourg reçut directement quelques ossements recueillis, comme ceux décrits par Rathke, à Anapa; il y avait parmi eux une omoplate, un humérus, et une vertèbre caudale; le D[r] Brandt, directeur du Musée de l'Académie les rapporta avec raison au même animal que Rathke avait déjà fait connaître, mais, ne le croyant pas aussi voisin des Balénoptères que son confrère, il proposa le nom de *Cetotherium* en dédiant l'espèce au professeur de Königsberg.

Trois ans plus tard, Brandt, après avoir comparé d'autres matériaux, crut reconnaitre certaines affinités entre les *Cetotherium* et les *Siréniens* (wodurch die *Balœniden* und *Sirenien* einander etwas näher gebracht würden, dit-il). Il y a évidemment une erreur. Des restes de Siréniens étaient sans doute mêlés avec ceux de *Cetotherium*, et attribués au même animal.

Nordmann fait également mention, en 1860, dans sa Paléontologie de la Russie méridionale, de restes de Cétacés de Taman, de Kertsch et de Kischenew (Bessarabie) qui sont déposés au Musée d'Helsingfors. Le professeur de l'Université de Finlande cite parmi les *Balœnodea*, le *Cetotherium priscum*, dont il figure, planche XXVI, figures 1-2, un fragment de mandibule, provenant de Kertsch, et figures 5-6, même planche, une vertèbre lombaire, probablement, dit-il, de la presqu'île de Taman. Nordmann a figuré encore un fragment de côte de Kertsch, planche XXVI, figure 4, qu'il rapporte au même animal. Il fait mention aussi de Mystacocètes, trouvés en Bessarabie, et parmi lesquels il signale une autre espèce naine du même genre; il figure, entre autres, une caisse tympanique, des vertèbres de différentes régions et même un humérus.

La vertèbre de Kischinew, que le professeur de Helsingfors rapporte au genre *Balenoptera,* est attribuée par Brandt à un Cétodonte, sous le nom de *Delphinapterus* (*Pachypleurus*) *fockii.*

On a fait mention aussi d'une vertèbre de Baleine trouvée dans le bassin de la mer Caspienne.

On en a déterré également en 1865 dans les environs de Nikolajew, provenant d'un jeune animal, qui ont été envoyés au Musée de l'Académie impé-

Digitized by Google

riale des sciences de S[t]-Pétersbourg et dont Brandt a fait une espèce sous le nom de *Cetotherium Klinderi.*

Indépendamment de ces deux espèces, Brandt a encore établi le *Cetotherium helmerseni,* avec des ossements déterrés au promontoire de Tekla sur le bord de la mer Noire, le *Cetotherium priscum,* le *Cetotherium Mayeri* et le *Cetotherium ambiguum.*

Le *Cetotherium priscum* est le même animal qu'Eichwald avait nommé *Ziphius priscus.* Le *Cetotherium ambiguum* repose, pensons-nous, sur des vertèbres normales de *Pachyacanthus.*

De Verneuil a recueilli également pendant son voyage en Crimée, des vertèbres de Cétacés fossiles qui sont déposées au Muséum à Paris; Laurillard les attribuait à une petite espèce de Baleine, ou à une grande espèce de *Ziphius.*

Dans le voyage de Demidoff, Hyot fait mention également d'une vertèbre, trouvée dans l'argile rouge près de Ak-Burun et que Brandt rapporte au *Cetotherium priscum.* On a recueilli encore des ossements de Cétacés sur les bords du Dniester et du Bug à Kischenew et à Nicolajew, à l'est de la mer Noire.

Enfin, dans un travail sur les ossements de Cétacés d'Europe, fossiles et sous-fossiles, le D[r] Brandt passe en revue (1873) toutes les découvertes qui ont été faites sur les Cétacés de la mer Noire :

Nous citons ici les principaux travaux qui ont eu pour objet les ossements de Cétacés découverts dans le bassin de la mer Noire.

Pallas, *Kleine Art Cete, Bemerkungen auf einer Reise in die südlichen Staatthalterschaften des Russichen Reiches,* vol. II, p. 289.

G. Fischer, *Fischwirbel,* Mémoires de la Société des naturalistes de Moscou, t. VII, 1829, p. 298 Pl XXI.

Rathke, *Den lebenden Balenopteren verwandtes, aber davon abweichendes Thier,* Mém. des sav. étrang. de l'Acad. Imp. de S[t]-Pétersbourg, t. II, 1835.

F. Jäger, *Fossile Säugethiere von Wurtemberg,* Stuttgart, 1835, pl. I, fig. 26.

De Verneuil, *Formation tertiaire de la Crimée,* Mém. de la Soc. géologique de France, t. III, part. I, 1837.

Digitized by Google

EICHWALD, *Der gattung manatus*, Bull. scient. de l'Acad. imp. de St-Pétersbourg, t. VI, 1838.

EICHWALD, *Die Urwelt Russlands*, St-Pétersbourg, 1840.

J.-F. BRANDT, *Bullet. cl., phys., mathém., Acad. imp. des Sc. de St-Pétersbourg*, 1841, t. I, p. 146.

Al. v. NORDMANN, *Bullet. de l'Acad. imp. des Sc. de St-Pétersbourg*, t. I, p. 202.

H. v. MEYER, *Jahrbuch für Mineralogie*, 1841, 1842 et 1843; Paleontographica, vol. VI.

HYOT, *Voyage de Demidoff*, t. II, 1842.

H. v. MEYER, *Balænodon lintianus. N. Jahrb. für Mineralogie*, 1849, p. 549; 1850, p. 205.

EHRLICH, *Ueber die Nordöstlichen Alpen*, Linz, 1850.

EICHWALD, *Lethaea rossica ou Paléontologie de la Russie*. Stuttgart, 1853.

PICTET, *Traité de Paléontologie*, 2e édit., vol. I, p. 379, 1853.

GIEBEL, *Die Säugethiere*, p. 111.

NORDMANN, *Paléontologie Sudrusslands*, Helsingfors, 1860.

EICHWALD, *Bull. de natur. de Moscou*, 1860.

VAN BENEDEN, *La côte d'Ostende et les fossiles d'Anvers*, Bullet. de l'Acad. roy. de Belgique, 2me sér., t. XII, 1862, p. 479.

QUENSTEDT, *Handbuch der Petrefactenkunde*, 2 Aufl. Tubingen, 1867.

P.-J. VAN BENEDEN et Paul GERVAIS, *Ostéographie des Cétacés vivants et fossiles*, Paris, 1869.

J.-F. BRANDT, *Bullet. sc. d. l'Acad. impér. des sc. de St-Pétersbourg*, t. XVI, 1871.

— *Bemerkungen über die Bartenwale des Wiener Beckens*, *Sitzb. d. Wiener Akad.* Bd. LXV (1872).

— *Blicke auf die Zahnwale*, *Sitzb. d. Wiener Akad.* Bd. LXVII (1873).

— *Untersuchungen über die fossilen und subfossilen Cetaceen Europa's*, St-Pétersbourg, 1873, et *Ergänzungen zu den fossilen Cetaceen Europa's*, St-Pétersbourg, 1874, p. 30.

P.-J. VAN BENEDEN, *Les Thalassothériens de Baltringen* (Wurtemberg), Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 2me sér., t. XLI, n° 3; mars 1876.

P.-J. VAN BENEDEN, *Sur un envoi d'ossements de Cétacés fossiles de Croatie*, Bulletins de l'Académie royale de Belgique, 2me sér., t. XLVII, 1879.

Digitized by Google

On connaît aujourd'hui plusieurs Musées qui renferment des ossements de Cétacés recueillis dans le bassin de la mer Noire. Les principaux sont ceux de St-Pétersbourg : cabinet de la Société de Minéralogie, le Musée de l'Académie des sciences et l'Institut impérial des Mines. Ce sont les ossements qui ont été recueillis à la côte est de la mer Noire et de la mer d'Azov, à Kertsch et à la presqu'île de Taman, à Anapa.

Au Musée de l'Université d'Helsingfors se trouvent plusieurs pièces intéressantes des mêmes localités que Nordmann a fait connaître; indépendamment des Phoques, il fait mention de restes de *Cetotherium*, de *Balenoptera*, de plusieurs Delphinides et même, en exprimant toutefois un doute, d'une vraie Baleine. Le professeur d'Odessa fait mention d'abord des *Cetotherium* de Taman et de Kertsch, puis de restes du même ordre trouvés en Bessarabie.

A Paris, au Muséum d'histoire naturelle, on conserve les vertèbres rapportées de Crimée par de Verneuil. Le Musée de Tiflis possède également quelques ossements de Cétacés.

Le Musée de Vienne (*Hofmineralien Cabinet*) renferme depuis 1854 une vertèbre dorsale, découverte à Pod, près d'Agram, dit l'étiquette, et qui appartient sans doute au même animal que celui qui nous occupe. Le mot Pod, désigne, d'après M. Pilar, la même localité que Poduset. Nous avons vu également dans ce même Musée une vertèbre provenant du Leithakalk, recueillie dans les environs de Vienne même. Nous pouvons encore faire mention de débris de Delphinides déterrés dans les environs de cette ville et qui se trouvent en partie au Musée de minéralogie et en plus grand nombre dans le Musée particulier de Letocha. Ce sont presque tous Delphinides recueillis dans le *Tegel* de Hernals (environs de Vienne), qui correspond au terrain à fossiles d'Oeningen.

On possède au même Musée de minéralogie un humérus, que Brandt rapporte au *Cetotherium priscum*, qui a été déterré à Margarethen, dans le Leithakalk. Nous avons eu en main tous ces ossements des Musées de Vienne, de St-Pétersbourg et d'Helsingfors, et, à l'exception de l'humérus du Musée de Vienne, tous sont fort mal conservés; nous n'oserions du reste affirmer que la plupart des différences que présentent ces os ne sont pas des différences individuelles ou le résultat de modifications survenues par la fossilisation. Tous ces os sont très-lourds et imprégnés de fer.

Digitized by Google

A Linz on trouve au Vaderland. Museum un squelette assez complet d'un Cétacé recueilli dans les environs de cette ville et que nous avons fait connaître sous le nom de *Aulocetus*. Herman v. Meyer avait proposé le nom de *Balenodon lentianus*. Il est voisin de celui qui nous occupe.

Nous avons vu également des ossements de Cétacés au Musée de Munich, provenant de la mollasse des environs de Lindau. Nous pouvons citer encore des ossements de Cétacés recueillis dans la mollasse de Suisse, et que nous avons pu comparer à Zurich.

Nous avons vu une tête de Cétacé au Musée de Stuttgard qui a été recueillie à Oedenbourg en Hongrie. Elle appartient à un Ziphioïde et se trouve au château de Katzendries, propriété du comte de Beroldingen. Indépendamment de la tête, la région cervicale est conservée depuis la première jusqu'à la cinquième vertèbre.

Le Musée de Stuttgard possède également une vertèbre qui a beaucoup d'analogie avec celle de l'aulocète de Linz et qui provient de la mollasse supérieure d'Oberschwalben. Elle a été trouvée à côté de restes de *Squalodon* et d'*Halitherium*.

Entre Ulm et Biberach, sur la route qui conduit au lac de Constance, dans l'Oberschwalben, se trouve un endroit nommé Baltringen, qui est particulièrement riche en ossements d'animaux marins. Le pasteur Probst de Essendorf en possède de fort intéressants dans sa collection et qu'il a eu l'obligeance de me confier [1]. A côté des Squalodons on voit surtout des restes de deux Delphinides que H. von Meyer a désignés sous le nom de *Delphinus* (*Platyrynchus*) *canaliculatus* et *Orcopsis acutidens* [2]. Ces deux Cétacés paraissent avoir été extrêmement abondants à l'époque où la mollasse s'est déposée en Suisse et en Bavière. A côté d'eux vivaient encore deux autres Dauphins.

Il y a tout lieu de croire que tous ces ossements proviennent d'animaux contemporains qui hantaient la mer Noire à une époque où on pouvait la comparer par son extension et ses communications avec l'Océan atlantique.

[1] Van Beneden, *Les Thalassothériens de Baltringen*, Bullet. de l'Acad. roy. de Belgique, 2e sér., t. XLI; mars 1876.

[2] Ce Dauphin vivait également sur les côtes de Portugal. — Van Delli a figuré une de ses dents sous le nom de Physeter.

Digitized by Google

DESCRIPTION.

Parmi les ossements que M. Pilar a bien voulu nous communiquer, nous trouvons, comme nous l'avons dit, toute la partie postérieure d'une boite crânienne, le condyle d'une mandibule, plusieurs vertèbres appartenant à diverses régions du corps et un fragment de côte. Ces os semblaient d'abord provenir de deux individus différents, mais, après les avoir débarrassés de la marne qui les enveloppait, il n'était pas difficile de voir que quelques-unes de ces vertèbres, plus grandes que les autres, étaient des lombaires se rapportant exactement à une seule et même colonne vertébrale.

Boîte crânienne.

Les os qui constituent la boîte crânienne sont si parfaitement conservés que leurs caractères ne sont pas moins distincts que s'ils appartenaient à un Cétacé vivant : une des caisses tympaniques est encore en place et de chaque côté on voit l'apophyse mastoïde enchâssée dans la partie correspondante du temporal. La partie supérieure de la boîte crânienne est moins complète; la portion écailleuse de l'occipital est brisée, et toute la partie supérieure de l'occipital a pénétré dans la cavité crânienne. L'animal a sans doute été tué sur place.

En avant la boîte crânienne est tronquée obliquement à la hauteur du sphénoïde antérieur, de manière que le rostre manque; la coupe a mis en évidence, indépendamment du corps du sphénoïde, en dessous le vomer et le palatin, sur le côté le temporal et le pariétal, en haut l'occipital. Cette coupe, du reste fort irrégulière, doit avoir été faite quand la tête était solidement enchâssée dans la marne et c'est probablement au moment de l'extraction que la tête a été brisée. Il n'en est pas de même de la fracture de l'occipital qui a eu lieu probablement du vivant de l'animal, ou du moins,

Digitized by Google

pendant qu'il était encore en chair. Cette interprétation s'accorde avec le passage d'une lettre de M. Pilar au sujet de l'âge de la marne qui renferme ces ossements : « Le calcaire de Leytha est développé dans les environs de Sused, dit-il, et dans ce calcaire on trouve assez de restes pour qu'on puisse le ranger dans le Helvétien de Ch. Meyer. Or un bloc de ce calcaire de Leytha se trouve enchâssé dans les marnes grises, et, selon mon avis, il y est arrivé comme bloc erratique qui s'est précipité dans la mer du haut d'un rocher dolomitique rongé par les vagues. »

Le Cétacé entier a été pris sans doute dans cet éboulement et nous voyons les arcs neuraux de plusieurs vertèbres dorsales chevaucher sur le corps de l'os.

Ainsi, toutes les parties de la base du crâne sont, comme nous venons de le dire, parfaitement conservées; en arrière on voit les apophyses condyloïdes saillantes de l'occipital et entre elles le sillon qui les sépare sous forme d'une gouttière. Le condyle de gauche est seul en place; sa surface mesure, en suivant la courbure, 12 centimètres en longueur et 5 centimètres en largeur.

Le grand trou occipital n'est pas sans présenter un intérêt particulier : la direction de la surface articulaire du condyle montre que la tête n'est point articulée à l'atlas comme celle des Cétodontes, mais plutôt comme celle des Mystacocètes, c'est-à-dire qu'elle forme un angle avec la colonne vertébrale, au lieu de se placer dans l'axe du corps. Le Cétacé à fanons nage la bouche ouverte et le rostre levé, tandis que le Cétodonte tient la bouche fermée en poursuivant sa proie.

La partie squameuse ou écailleuse de l'occipital est brisée de manière que le bord même de l'os, qui forme la partie supérieure du trou occipital, a pénétré dans la cavité du crâne et a même bouché la partie supérieure de l'entrée. Le cerveau comme la partie antérieure de la moelle épinière ont dû être écrasés en même temps.

La face supérieure de cette portion de l'occipital présente une crête sur la ligne médiane, qui augmente d'arrière en avant et toute cette région, au lieu d'être bombé, présente une forte dépression; sur les bords il se relève au-dessus des pariétaux. Il en résulte que la boîte crânienne, au lieu d'être

Digitized by Google

arrondie à la surface est, au contraire, creusée comme dans les Aulocètes.

La portion écailleuse du temporal recouvre une grande partie du pariétal qui est remarquable par la grande épaisseur de ses parois. C'est dans la coupe, que nous figurons plus loin, que l'on voit bien ce développement extraordinaire. On voit fort bien aussi au-devant de la caisse tympanique, qui est placée à droite, on voit fort bien, disons-nous, la gouttière qui loge la trompe d'Eustache et son entrée dans un repli de l'os palatin. Tous les os de la boîte crânienne portent les traces d'une pression exercée obliquement de haut en bas.

La face inférieure de la portion basilaire de l'occipital est régulièrement unie entre les deux protubérances, à côté desquelles se trouve la caisse tympanique; ces protubérances existent dans plusieurs Mystacocètes fossiles et, dans le Cétacé qui nous occupe, c'est entre elles que l'on voit le bord postérieur du vomer; ces protubérances ont à peu près le volume des caisses tympaniques. Les Balénoptères vivantes ne montrent qu'une légère saillie à la place qu'elles occupent ici. A côté de ces protubérances on voit la cavité du temporal dans laquelle est logée la caisse tympanique. A la manière dont elle est sertie dans cet os on voit également bien que le Cétacé d'Agram est un Mystacocète.

Le vomer s'étend en arrière jusqu'au milieu des protubérances dont nous venons de parler et qui sont bien indiquées sur la planche qui accompagne ce travail; il recouvre le corps du sphénoïde. Le dessinateur n'a pas d'abord reproduit le bord postérieur de cet os, croyant sans doute, que la ligne transverse du bord libre est un repli accidentel. Sur la ligne médiane du vomer apparaît une crête, qui se développe d'arrière en avant et forme le commencement de la cloison qui sépare les fosses nasales. On voit donc parfaitement dans le dessin l'origine des évents. Le vomer représente bien les os en V des vertèbres crâniennes.

La caisse tympanique est remarquable par sa forme régulière; toute sa surface externe est parfaitement arrondie. Cette caisse, vue par-dessous, est comparativement large et son diamètre antéro-postérieur est un peu plus grand que son diamètre transverse : le premier mesure 7 centimètres, le second en mesure 4 $^{1}/_{2}$. En avant elle est terminée par une ligne légèrement oblique, qui remonte du bord externe au bord antérieur. En arrière la caisse

Digitized by Google

se rétrécit et prend une forme conique; sur le bord externe on voit, dans l'os en place, le repli derrière lequel se trouve l'orifice de la membrane du tympan. Cet os est figuré en place planche I. Nous l'avons figuré, seul, par sa face interne, planche II, figure 11. Il est remarquable surtout par la ligne diagonale qui le sépare en deux moitiés presque égales en étendue.

L'apophyse du tympanal, auquel nous avons conservé le nom de mastoïdienne et qui n'est pas sans offrir des caractères fort importants pour la distinction des genres et des espèces, est en place des deux côtés. Cette apophyse est étroite, allongée et se fait remarquer surtout par sa forme particulière, puisqu'elle conserve à peu près la même largeur dans toute son étendue. Sa longueur n'a rien d'extraordinaire; elle est plutôt grêle que massive et présente un bord saillant sur une grande partie de sa longueur. Elle est figurée des deux côtés en place, planche I. On la voit dans toute la largeur de la gouttière qui lui est formée par le temporal. Cette apophyse diffère notablement de toutes celles que nous connaissons dans les Cétacés fossiles d'Anvers; celle du *Plesiocetus hupschii,* figurée dans notre *Ostéographie,* planche XVI, figure 17, et celle du *Plesiocetus dubius,* figurée dans le même ouvrage, planche XII, figures 2, 3 et 4, sont celles qui s'en approchent le plus. Au-devant de cette apophyse, on voit une gouttière large, profonde et qui loge le conduit auditif externe. Derrière la caisse tympanique le temporal est creusé par une espèce d'entonnoir que nous avons vu également chez d'autres Mystacocètes fossiles.

Le palatin n'est visible que du côté droit de l'animal; à gauche il est complétement absent. Il n'offre quelque intérêt que par la coupe, qui le montre dans ses rapports avec les autres os du crâne; par son bord interne, il semble être la continuation du vomer, passe ensuite sous le pariétal et le temporal, puis se replie en dessous pour former le plancher des fosses nasales.

Le ptérigoïdien est représenté dans le dessin par une bande assez large située entre le tympanal et le palatin. Toute la partie postérieure est brisée de manière que la gouttière, qui établit la communication entre les fosses nasales et l'oreille moyenne, est mise à nu.

En comparant la base du crâne du Mésocète d'Agram avec cette même région des Balénoptères vivantes, on voit des différences notables qui les éloignent considérablement les uns des autres; d'abord, l'espace qui sépare

Digitized by Google

les condyles de l'occipital des os ptérigoïdiens est beaucoup plus grand dans les Mésocètes que dans les autres, et les condyles eux-mêmes sont plus éloignés entre eux; et ce qui distingue ensuite les espèces fossiles, c'est la forte tubérosité qui se trouve de chaque côté du tympanal et entre lesquelles il se forme une gouttière à laquelle conduisent les deux fosses nasales. Cette portion basilaire de l'occipital présente ainsi des caractères propres.

La partie postérieure du crâne des Mésocètes ne présente pas moins de différences, si on la compare avec cette même partie des Balénoptères actuelles; on est frappé d'abord de sa grande largeur, qui résulte de l'écartement des os temporaux et qui les rapproche plus des vraies Baleines que des Balénoptères. Il en résulte que le contour du temporal est changé complétement; cet os, vu par sa face inférieure, qui correspond au condyle de la mandibule, affecte une forme triangulaire dont la base est en dehors et le sommet en dedans; dans les Mésocètes, au contraire, l'os est peu étendu d'avant en arrière et le bord externe est parfaitement arrondi, au lieu de former la base d'un triangle. Il en résulte que la mandibule a beaucoup moins de jeu dans les Mésocètes et que le temporal laisse à nu la gouttière du conduit auditif, l'apophyse mastoïde et la partie postérieure de l'occipital.

Si nous comparons ensuite la partie supérieure du crâne dans ces deux Cétacés, nous voyons l'occipital s'étendre à peu près de la même manière en se rétrécissant en avant; mais sur le côté c'est à peine si le temporal déborde l'occipital dans la *Balœnoptera rostrata*, tandis que dans le Mésocète, ce temporal dépasse notablement l'occipital en dehors et élargit la base du crâne.

Nous ne pouvons ne pas faire remarquer que la forme que prend l'occipital en avant, dans sa partie qui constitue la voûte de la cavité crânienne, fait ressembler complétement les Mésocètes qui nous occupent aux espèces du même genre trouvées à Anvers, c'est-à-dire que, dans les uns comme dans les autres, cet os se termine en avant en pointe et se relève sur le côté; la voûte, au lieu d'être bombée, comme dans les crânes en général, est au contraire creusée au milieu. Les parois du crâne, formées par l'occipital, ont notablement plus d'épaisseur dans le Mésocète que dans la petite Balénoptère et le cerveau, à en juger par la cavité qui le loge, est bien moins volumineux et moins étendu en avant. Toute la boîte crânienne a pris de l'extension en largeur.

Digitized by Google

Le crâne du Mésocète d'Agram est brisé derrière l'os frontal de manière que nous avons une coupe transversale de cette région qui nous montre en dessous le corps du sphénoïde antérieur, en dessous de celui-ci la lame du vomer qui forme les parois de la partie inférieure des fosses nasales; en dehors de celui-ci le palatin formant les trois quarts des parois des fosses nasales; puis, sur le côté, en dehors, on voit le temporal aminci dans cette région et couvrant le pariétal qui a acquis une grande épaisseur; en haut on voit la partie antérieure de l'occipital, dont toute la partie qui forme la voûte du crâne est défoncée. Le crâne est séparé des os de la face comme si l'on avait fait une coupe pour juger des rapports des os entre eux; aussi, pour apprécier les affinités des Mésocètes avec les Balénoptères actuelles, avons-nous fait faire une coupe tranversale d'une tête de *Balænoptera rostrata*, passant en dessous, à travers le vomer, le sphénoïde et le palatin, sur le côté, à travers le temporal et le pariétal, en dessus, à travers l'occipital. Cette coupe correspond exactement avec la fracture du crâne de Mésocète.

En comparant cette coupe de *Balænoptera rostrata* avec celle de *Mesocetus*, on est frappé de voir une différence notable dans la disposition générale des os; la tête de ces derniers est étendue en largeur, à sa base surtout, et cette extension a lieu aux dépens de la hauteur, de manière que la boîte crânienne est notablement plus élevée dans cette espèce vivante que dans l'espèce fossile; le corps du sphénoïde a au moins deux fois plus de largeur que de hauteur, tandis que le corps du sphénoïde de la *Balænoptera rostrata* a le double en hauteur; le palatin consiste dans une lame qui se replie de manière à former une cavité qui s'étend horizontalement sous le sphénoïde dans le Mésocète et à peu près verticalement de bas en haut à côté du sphénoïde; c'est par cette cavité formée par le ptérigoïdien que l'oreille moyenne communique avec les fosses nasales.

Le frontal a une épaisseur considérable pour constituer les parois de la cavité crânienne dans le Mésocète, et le temporal le recouvre sur les flancs comme l'occipital le recouvre au-dessus; nous reproduisons ici ces deux coupes, qui, sans être faites au même point, montrent cependant la différence énorme qui éloigne ces Mystacocètes vivantes des fossiles.

Digitized by Google

Fig. 1.

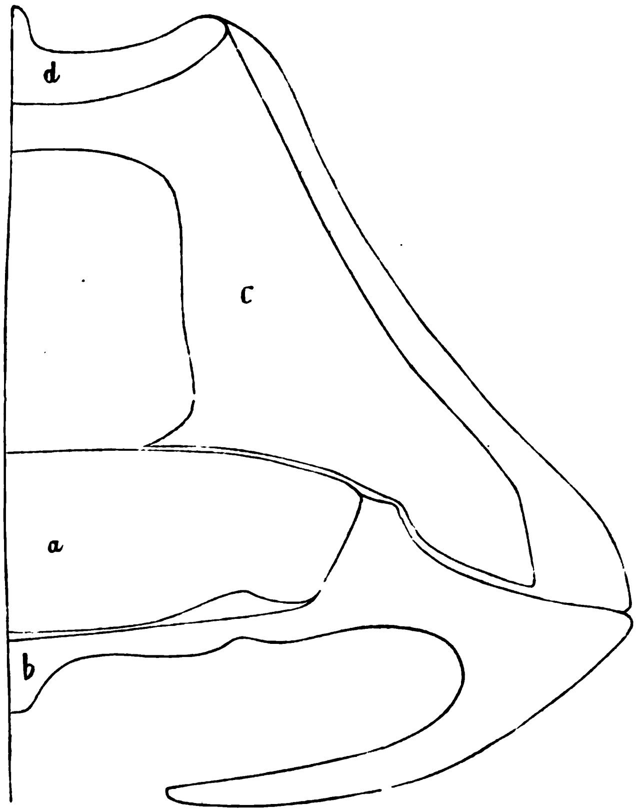


Fig. 2.

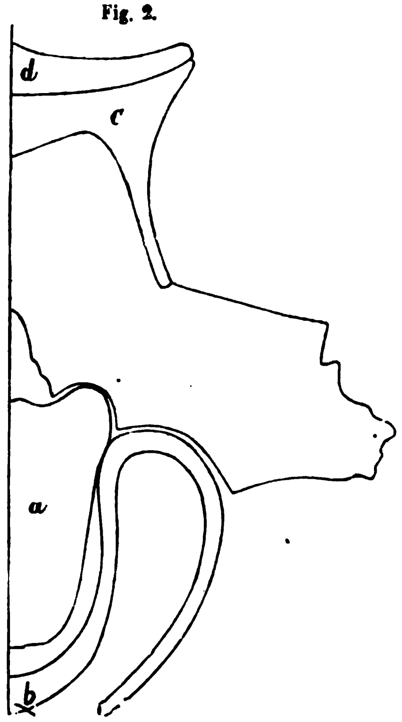


Fig. 1. Coupe du crâne de *Mesocetus agrami,* derrière le froutal.

Fig. 2. Coupe du crâne de *Balænoptera rostrata* à travers le frontal.

Dans les deux figures *a* indique le sphénoïde, *b* le palatin, *c* le pariétal, *d* l'occipital.

Digitized by Google

La mandibule du Cétacé d'Agram est représentée par la partie la plus importante de cet os, c'est-à-dire, par le condyle articulaire; cette partie de l'os, comme nous l'avons déjà fait remarquer, présente de grandes variations qui sont en rapport avec le genre de vie de l'animal. Ces variations sont en effet directement en rapport avec le régime et ont l'importance des dents des Mammifères terrestres.

Pour bien juger de cette importance il est bon de placer quelques mandibules de Baleines, de Balénoptères et de Dauphins les unes à côté des autres; de prime abord on est frappé du peu de ressemblance qui existe entre les Mystacocètes et les Cétodontes sous le rapport du condyle de la mandibule et de la face glénoïde du temporal; la face glénoïde est presque horizontale dans la Baleine franche, comme le montre le dessin de la tête publié par Cuvier, tandis que les Cétacés à dents ont cette surface presque verticale; dans les jeunes Baleines elle est entre les deux et l'on peut dire que les Baleines franches, jeunes, sont, sous ce rapport, également plus près des Dauphins que les adultes. Il résulte de cette disposition de la face glénoïde que la face articulaire du condyle doit présenter des modifications correspondantes dans sa forme, dans la place qu'il occupe et dans sa direction. On comprend le motif de ces modifications.

Les premiers, les Baleines franches, ne se nourrissent que de Mollusques et de Crustacés de petite taille qui fourmillent dans la mer et elles nagent la bouche ouverte pour engouffrer cette proie de petite dimension. C'est comme l'ouverture du chalut qui traîne au fond de la mer. Cette bouche ne se ferme guère; les Cétacés à dents qui se nourrissent de poissons, nagent la bouche fermée et ne l'ouvrent que pour happer la proie; ils ferment la bouche pour ne pas la laisser échapper.

Une Baleine véritable, qui rencontre un *banc de manger*, avance doucement et, nageant la bouche ouverte, engouffre l'eau avec les Crustacés ou Mollusques vivants; la mâchoire se relève ensuite légèrement avec ses *lippes*, la langue se rapproche du palais et l'eau est chassée à droite et à gauche à travers le treillis formé par les fanons.

La mandibule des Cétodontes est toute différente de celle des Mystacocètes: d'abord elle est droite, au lieu d'être courbée et, en général, vers le milieu de

Digitized by Google

sa longueur, elle s'élève insensiblement, de manière qu'elle est souvent plusieurs fois plus haute en arrière qu'en avant; l'os est tronqué en arrière et consiste dans une lame mince qui s'élève verticalement montrant une surface articulaire étroite vers le milieu de sa hauteur. Cette surface articulaire semble occuper le milieu de la hauteur; l'apophyse coronoïde s'élève pour ainsi dire au-dessus du condyle et l'échancrure sigmoïde est à peine distincte.

Comme différence entre la mandibule des Baleines et celle des Cétodontes on doit signaler encore l'entrée du canal dentaire; dans les premiers, il y a un orifice véritable à une certaine distance du condyle; dans les Cétodontes il n'y a pas d'orifice proprement dit : l'entrée commence immédiatement au devant du condyle et occupe toute la hauteur de l'os. La mandibule est pour ainsi dire formée de deux lames juxtaposées, laissant un certain espace entre elles, dont l'interne ne s'étend pas aussi loin en arrière que l'autre; l'espace qui sépare les deux lames fait fonction de canal dentaire. Autant cet os est épais et solide quand il y a des fanons autant il est mince et délicat quand il y a des dents.

Dans le mammifère en général, l'apophyse coronoïde est séparée du condyle par un col et une échancrure sigmoïde très distincte, tandis qu'ici, comme nous venons de le dire, l'échancrure sigmoïde est peu prononcée et l'apophyse coronoïde est élevée au-dessus du condyle. Le bord postérieur forme avec le bord inférieur à peu près un angle droit dans les divers Cétodontes. Entre cette mandibule de Baleine et la mandibule de Cétodonte on trouve tous les degrés intermédiaires dans des Balénoptérides, de manière que chaque modification correspond à une différence dans la manière de vivre de l'animal. Il y a donc, sous ce rapport, une différence très-grande entre le Cétacé à fanons et le Cétacé à dents. C'est cette considération qui nous a fait attacher une grande importance au condyle de la mandibule, pour établir des coupes génériques parmi ces grands Cétacés.

La face postérieure du condyle de Mésocète que nous décrivons est un peu plus haute que large, bombée vers le milieu et sur le bord externe couverte de sillons qui partent de la protubérance centrale. En dessus le condyle est entier, en dessous il est cassé juste à l'endroit qu'on peut appeler le col et qui loge le nerf du maxillaire inférieur avec les vaisseaux

Digitized by Google

qui l'accompagnent. Ce condyle a 8 centimètres en largeur, 9 en hauteur. Il est représenté planche XI, figure 10, vu de face. En dessus et en dessous nous avons complété le dessin. Ce n'est pas un condyle saillant et arrondi comme une tête de fémur ou d'humérus, c'est une surface aplatie et élargie avec des limites précises indiquées par des lèvres qui la bordent tout autour. La mandibule est tronquée et c'est par le milieu de la troncature que la face condyloïdienne s'adapte à la face glénoïde à peu près verticale. En dessous de la face du condyle on voit le bord interne de l'os s'échancrer pour loger le nerf et les vaisseaux qui se rendent au canal dentaire. La partie qui est en dessous de cette échancrure correspond au talon qui est extraordinairement développé dans l'*Erpétocète* dont nous avons parlé précédemment.

La face interne est remarquable par une excavation profonde qui s'étend en haut et une saillie arrondie à la partie inférieure qui doit servir de plancher au nerf, sous la protection du bord du condyle. L'échancrure sigmoïde ne commence pas immédiatement au-devant du bord du condyle; il y a une partie qui se trouve sur le même plan que lui. La face externe est ondulée comme l'interne et se creuse légèrement vers le milieu de sa hauteur. Comme l'os est brisé nous voyons parfaitement la différence de son épaisseur en dessus et en dessous; en dessus la mandibule s'amincit extraordinairement et n'a pas plus d'épaisseur qu'une feuille de carton; en dessous elle s'épaissit de manière qu'à la hauteur du col, elle a quatre ou cinq fois cette épaisseur. Nous ne pouvons rien dire ni du bord supérieur ni du bord inférieur; ils sont tous les deux brisés.

Colonne vertébrale.

La portion de crâne que nous venons de faire connaître est accompagnée de treize vertèbres, appartenant aux diverses régions du corps. Il n'y a que les vertèbres cervicales qui manquent. Ces vertèbres indiquent bien l'âge adulte de l'animal; si les dorsales ont encore leurs épiphyses libres, les caudales les ont au contraire complétement réunies, ce qui est conforme aux observations faites d'abord par Flower que la réunion des épiphyses com-

Digitized by Google

mence dans la région caudale. Ce qui prouve la justesse de cette observation, c'est que nous avons un squelette de femelle de *Globiceps,* qui est venue à la côte, dans un état de grossesse à terme, et dont les épiphyses de la région caudale sont soudées tandis que celles de la région dorsale sont encore toutes séparées.

Nous avons tout lieu de croire que la vertèbre que nous figurons planche II, figure 1, est la première dorsale, aussi bien, à en juger, par l'épaisseur du corps, l'origine et la direction du pédicule neural, la largeur du canal vertébral, que par la face articulaire de la côte qui est placée très-bas. Si nous comparons cette vertèbre à la première dorsale de la *Balænoptera rostrata,* nous trouvons que le corps est comparativement plus épais et que l'arc neural comme les apophyses sont plus robustes; l'impression de la tête de la côte est aussi plus accentuée. Nous avons tout lieu de croire que ce Cétacé de la mer Noire était plus solidement bâti que la petite *Balænoptera rostrata* des temps actuels.

La première dorsale à une épaisseur de 35 millimètres sur 95 de largeur et 65 de hauteur. Les épiphyses sont soudées tout en indiquant parfaitement leurs limites dans toute la circonférence.

Le canal vertébral est fort large, et le pédicule de l'arc neural qui indique ses limites est fort délicat.

La face latérale de la vertèbre est déprimée au milieu, et sur la ligne médiane légèrement bombée au-dessus; en dessous elle montre une saillie en forme de crête sur la ligne médiane et à côté de laquelle on voit une légère dépression.

Ce que cette vertèbre offre surtout de remarquable, c'est la forte surface articulaire pour la tête de la côte et le bord nettement relevé qui entoure toute cette surface.

Tous les caractères de la première vertèbre se reproduisent naturellement dans la vertèbre suivante; nous n'avons qu'à signaler son augmentation en diamètre antéro-postérieur. La crête médiane à la face inférieure est plus prononcée et s'étend d'une épiphyse à l'autre. La troisième vertèbre dorsale a une épaisseur de 50 millimètres en y comprenant les épiphyses; il est assez curieux de voir que l'épiphyse antérieure est en place et se trouve

Digitized by Google

accolée à l'épiphyse de la vertèbre précédente ; l'épiphyse postérieure manque. Il résulterait de ceci que l'épiphyse antérieure se soude mieux ou plus vite que la postérieure. Par suite du développement de la crête médiane à la face inférieure, la vertèbre devient carénée. Ces trois vertèbres ne se suivent pas, comme l'indique l'épiphyse antérieure. Quand nous disons troisième dorsale, nous voulons dire troisième de cette région qui est en notre possession et qui, à en juger par comparaison, est réellement la troisième en rang. Le pédicule de l'arc neural prend racine un peu plus haut que dans la vertèbre précédente. Cette vertèbre est représentée vue de face planche XI, figure 7 ; elle se fait remarquer par son étendue en largeur aux dépens de la hauteur ainsi que par la largeur du canal vertébral. Le disque mesure en largeur 10 centimètres, en hauteur 7 centimètres. Ces trois vertèbres sont représentées planche XI, figures 1, 2 et 3, vues de profil ; elles montrent fort distinctement la fossette articulaire. Ces fossettes sont placées très-bas dans la première dorsale et montent dans les vertèbres suivantes.

Au Cabinet de minéralogie de Vienne se trouve une vertèbre dorsale, sans indication de nom, provenant, d'après l'étiquette qui l'accompagne, de Pod, près d'Agram (Croatie). Elle a été remise en 1854. D'après l'épiphyse, elle provient d'un animal adulte ; sa facette articulaire est très-marquée immédiatement en dessous du pied du cercle neural, ce qui dénote qu'elle est postérieure à la troisième dorsale. Nous avons tout lieu de croire que c'est la cinquième dorsale. Nous ne doutons pas qu'elle ne provienne de la même espèce qui nous occupe ici.

Nous avons en outre cinq autres vertèbres de la même région dont on distingue aisément la place relative, par le diamètre antéro-postérieur qui augmente de vertèbre en vertèbre, par l'apophyse transverse qui prend naissance de plus en plus bas, ainsi que par le canal médullaire qui se rétrécit successivement. La première est figurée même planche, figure 4. Le disque ne mesure plus en largeur que 8 $^1/_2$ centimètres et 7 $^1/_2$ centimètres en hauteur. D'avant en arrière, en y comprenant les épiphyses, cette vertèbre mesure 7 centimètres. Comme la troisième dorsale ne mesure que 5 centimètres, il y a tout lieu de croire que c'est la cinquième et que la quatrième manque. A sa

Digitized by Google

face inférieure, cette vertèbre n'est pas carénée, mais on voit sur le côté une excavation assez profonde qui augmente depuis la ligne médiane jusqu'au pied de l'apophyse transverse. Les apophyses transverses s'élèvent encore très-haut, c'est-à-dire que le pédicule de l'arc est placé à la hauteur du canal vertébral, et l'apophyse proprement dite qui porte la côte s'élève peu de bas en haut, mais beaucoup plus de dedans en dehors. Le pédicule s'étend d'avant en arrière, c'est-à-dire dans presque toute la longueur de la vertèbre comme dans tous les Mystacocètes. Dans les Cétodontes, il y a toujours un grand espace entre les pédicules des vertèbres. En avant il s'élève presque sur le bord en disque et à la même distance que l'apophyse transverse et en arrière il n'est séparé du disque que par la longueur d'un centimètre. Nous n'avons pas de zygapophyses conservées. On en voit seulement des traces. Le corps à la longueur de 7 centimètres, à 1 millimètre près la hauteur est égale à la longueur et la largeur a près de 2 centimètres de plus, à la hauteur des apophyses transverses. L'arc neural est assez bien conservé pour juger de l'ampleur du canal vertébral. A la base, il mesure 4 centimètres en largeur et en hauteur 2 $^1/_2$ centimètres. La face antérieure porte son épiphyse en place et l'épiphyse postérieure de la vertèbre précédente est encore réunie. Cette dernière a faiblement glissé sur elle. La dorsale suivante, la cinquième a un $^1/_2$ centimètre de plus en longueur et en hauteur que la précédente, et elle a conservé la même largeur. La face inférieure est moins arrondie et mérite presque la qualification de carénée. L'apophyse transverse naît un peu plus bas et présente évidemment plus de largeur à sa base, et plus de solidité. Ni l'une ni l'autre de ces vertèbres ne portent de traces de facette articulaire pour les côtes.

La vertèbre qui suit a le pédicule de l'arc neural incomplet, de manière que l'on ne peut bien juger des dimensions du canal vertébral. Il n'a guère changé si on le compare avec celui de la vertèbre précédente. Le corps de la vertèbre a très-peu changé aussi; seulement son apophyse transverse naît un peu plus bas que dans la précédente. Les zygapophyses sont brisées jusqu'à la base et tout l'arc a été déplacé de manière qu'il a perdu sa direction naturelle. Le corps mesure en largeur 9 centimètres, en hauteur 1 centimètre de moins, et en longueur sans les épiphyses, également 9 centimètres.

Digitized by Google

La vertèbre suivante est intéressante sous divers rapports; d'abord son épiphyse antérieure manque en avant et l'on voit un fragment à la face postérieure de la vertèbre précédente qui a glissé de manière à ne plus couvrir que le quart du corps de la vertèbre; les apophyses transverses sont fort larges et s'étendent horizontalement vers le milieu du corps. Nous ne savons au juste quelle largeur elles atteignent. L'arc neural est incomplet; il a été brisé de manière qu'une partie du pédicule est seule conservée. C'est une fracture très-curieuse qui montre avec quelle violence tous ces os ont dû être mutilés avant de s'ensevelir dans la marne. Cette vertèbre a 9 centimètres de large, 8 de long, sous les épiphyses, et 7 $^1/_2$ de haut. La face inférieure est encore parfaitement arrondie et légèrement creusée en dessous de l'apophyse transverse.

La huitième vertèbre que nous possédons est une lombaire fort bien conservée, à l'exception de l'arc neural. Elle est figurée planche II, figure 5, vue de profil et figure 8 vue de face. Elle mesure un $^1/_2$ centimètre de plus en longueur et à peu près autant en hauteur; la face inférieure n'a guère changé, si ce n'est que la carène est devenue plus saillante. L'apophyse transverse naît un peu plus bas que dans la précédente; par la direction de cette apophyse comme par son origine on voit que ces dernières dorsales se suivent comme les trois premières. Le canal vertébral a considérablement perdu en largeur, puisqu'il ne mesure plus que 3 à 3 $^1/_2$ centimètres de largeur. Comme les vertèbres suivantes, elle a conservé ses deux épiphyses. Cette vertèbre, la neuvième en nombre, a la même largeur et ne diffère de la précédente ni en hauteur ni en largeur; la carène de la face inférieure se dessine plus nettement et les apophyses transverses se dirigent un peu plus en avant. En dessus comme en dessous de l'apophyse tranverse, elle est plus ou moins creusée à sa surface de manière que le bord du disque déborde légèrement. L'espace qui la sépare de l'arc neural est un peu plus grand. Le canal vertébral a 3 centimètres de large au milieu et le plancher est pourvu d'une crête sur la ligne médiane au moins dans la partie recouverte par l'arc neural. Un fragment d'apophyse logé dans le canal vertébral montre que ces os ont dû être pendant assez longtemps le jouet des vagues. Cette vertèbre s'allonge, en même temps que les deux diamètres,

Digitized by Google

vertical et transversal, de manière qu'elle est devenue plus volumineuse dans tous les sens; à la face inférieure, la carène est devenue plus saillante et le corps est plus profondément creusé au-dessus comme au-dessous de l'apophyse transverse. L'arc neural est devenu plus étroit et le plancher conserve les mêmes caractères. Au milieu il n'a plus que la largeur de 2 centimètres. Le corps mesure en largeur 10 $^1/_2$ centimètres, en hauteur 8 et en largeur, mesuré à la surface de l'épiphyse, 9. Il y a une lacune entre cette vertèbre et la première caudale que nous possédons. Cette vertèbre s'allonge un peu puisqu'elle mesure 10 centimètres et 2 ou 3 millimètres; en même temps la carène est plus prononcée à la face inférieure du corps et le côté est plus profondément creusé. Les apophyses transverses ne sont pas élargies avec la longueur du corps, à en juger par la racine qui se dirige plus obliquement de dedans en dehors et d'arrière en avant. En hauteur elle a au moins 9 centimètres et 10 en largeur. En comparant les vertèbres de la région caudale à celles de la *Balænoptera rostrata*, nous estimons que les cinq premières caudales manquent et que nous possédons les cinq suivantes.

Nous avons plusieurs vertèbres caudales qui se suivent à peu près; les premières sont comme ailleurs les plus grandes et les plus fortes de toute la colonne vertébrale. C'est dans cette région que l'effort est le plus grand pendant la natation. Il faut les examiner avec soin, quand elles ne sont pas complètes, pour reconnaître leur véritable position.

Il est à remarquer que les épiphyses de toutes ces vertèbres sont complétement soudées. La première a encore un canal vertébral distinct mais il est fort étroit, puisqu'il ne mesure pas plus de 1 centimètre dans sa plus grande largeur. Les apophyses transverses sont très-fortes, mais courtes. La saillie des surfaces articulaires des os en V est peu prononcée en avant, mais, au contraire, très-forte en arrière. Le disque est plus petit en avant qu'en arrière; il mesure en avant : hauteur, 10 centimètres, largeur 10 $^1/_2$ centimètres; la longueur du corps est de 11 centimètres. C'est la plus forte vertèbre que nous possédons de cet animal.

La vertèbre suivante est entière; le canal neural est naturellement plus étroit, mais il est encore complet; l'arc qui le protège porte au milieu une

Digitized by Google

apophyse épineuse peu saillante, mais à côté deux zygapophyses s'élèvent qui mesurent à leur base 1 centimètre d'épaisseur. L'apophyse transverse est très-forte et large, occupant presque toute la largeur de la vertèbre. La saillie articulaire des os en V en arrière est très-prononcée, de manière que la vertèbre vue de profil présente au milieu une profonde échancrure. Elle mesure en largeur $^1/_2$ centimètre de moins que la précédente et a, à peu de chose près, la même hauteur. Le disque en avant est plus fort qu'en arrière, de sorte que la grosseur diminue rapidement.

La vertèbre suivante subit peu de modifications; elle est bien conservée comme les deux précédentes et nous en pouvons par conséquent mieux juger les caractères. L'arc neural est complet avec son apophyse épineuse qui est très-courte et les deux zygapophyses sont un peu plus développées que dans celle dont nous venons de parler. Nous avons fait dessiner cette vertèbre, vue de face, planche II, figure 6. Les apophyses transverses sont beaucoup plus faibles et sont percées au milieu pour le passage de l'artère. En dessous la vertèbre est fortement échancrée au milieu quand on la voit de profil. Elle mesure en longueur 10 centimètres, autant en hauteur et 1 centimètre de plus en largeur.

La quatrième caudale présente encore un arc neural dont l'apophyse épineuse est représentée par un bourrelet sur la ligne médiane que l'on n'aperçoit même pas quand on la voit de profil. Les zygapophyses antérieures ont encore la grosseur d'une amande, tandis que les postérieures ne dépassent pas la grosseur d'un gros noyau de cerise. L'apophyse transverse manque complétement et on voit le trou de l'artère vers le milieu de l'espace qui devrait être occupé par elle. A sa face inférieure elle est creusée d'une gouttière longitudinale dans laquelle on peut loger un doigt. En avant et en arrière les facettes articulaires pour les os en V sont peu prononcées. Le disque est de forme ovale sur la face postérieure comme sur la face antérieure et celui de devant a ses deux diamètres, transversal et vertical, un peu plus grands que celui de derrière.

La dernière vertèbre que nous possédons est une cinquième caudale. Elle est complète comme les précédentes. Il existe encore un canal vertébral dans lequel on peut passer un tuyau de plume, mais tout l'arc neural est réduit

Digitized by Google

à une lame mince sans saillie qui recouvre le canal. C'est tout au plus si l'on peut dire qu'il existe encore des traces de zygapophyses. Sur les flancs, au lieu d'une apophyse transverse, la vertèbre présente une large gouttière d'un trou à l'autre, de manière qu'en avant comme en arrière le disque déborde légèrement. A la face inférieure, on voit une gouttière longitudinale profonde dans laquelle on pourrait cacher une amande, et des facettes articulaires faiblement creusées en avant et en arrière. La face antérieure est légèrement creusée; la postérieure, au contraire, est légèrement bombée; on pourrait dire à la rigueur qu'elle est procœlique.

Ainsi les cinq vertèbres dont nous venons de parler se suivent et leurs épiphyses sont complétement soudées en avant comme en arrière. On voit bien ici la confirmation de l'observation faite d'abord par M. Flower, que c'est à la région caudale que la coalescence des vertèbres avec leurs épiphyses commence et qu'elle peut être complète dans cette région, quand ailleurs elles sont encore séparées. Ces cinq vertèbres se distinguent en même temps en dessus par la gouttière vertébrale qui, dans la dernière que nous possédons, laisse à peine passer une plume de pigeon, en dessous par la gouttière qui résulte de la fusion des surfaces articulaires des os en V antérieures avec les postérieures. L'artère, au lieu de passer au milieu de la vertèbre entre les saillies de ces os, perce, comme dans tous les Cétacés, à travers les parois de la gouttière, puis entre l'apophyse transverse à travers le corps de l'os lui-même, et pénètre par une gouttière derrière l'arc neural dans le canal de la moelle. Ces cinq vertèbres se rapetissent rapidement : la première a encore en largeur 10 centimètres, la seconde, 9, la troisième, 8, la quatrième, 7, et la cinquième ne mesure plus que 5 centimètres. En hauteur comme en largeur on voit la même décroissance : la première mesure 10 centimètres de hauteur sur 11 de largeur; la suivante, 9 $^1/_2$ sur 10 $^1/_2$; la troisième s'allonge de haut en bas et la vertèbre, vue de face, prend une forme ovale; sur 9 $^1/_2$ centimètres de hauteur elle n'en a plus que 9 de largeur; la quatrième, sur 8 centimètres n'en mesure plus que 7 en travers, et la dernière, sur 8 en hauteur en a encore 7 en largeur; cette vertèbre diminue en largeur sans changer ses autres diamètres.

Digitized by Google

Côte.

Nous avons un fragment de côte qui est figuré planche XI, figures 12 et 13. La coupe ne nous offre rien de particulier, si ce n'est qu'elle indique une côte fort solide, aplatie en dedans comme en dehors, en dessus et en dessous, ce que nous ne trouvons ni dans les côtes des Balénoptères ni dans celles des Baleines.

MESOCETUS AGRAMI.

Tous les os dont nous venons de donner la description se rapportent à un seul animal, dont nous avons déjà fait mention en 1879 dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*.

C'est par la forme particulière du condyle de la mandibule, condyle qui occupe le milieu entre le condyle des *Mystacocètes* et celui des *Denticètes*, que le Mésocète se distingue surtout des genres voisins.

Si nous comparons les vertèbres que nous venons de décrire, avec celles du Musée de Linz, appartenant au genre *Aulocetus*, nous trouvons des différences notables surtout dans celles de la région caudale ; à Linz, il y a trois caudales qui se suivent. En comparant notre cinquième caudale, figurée planche XI, figure 9, avec les trois caudales, figurées par Brandt, planche XVIII, fig. 9^b, 10^c et 11^d nous voyons les zygapophyses élevées comme deux ailes dans ces dernières, tandis qu'elles dépassent à peine l'apophyse épineuse dans l'animal d'Agram, et cependant, à en juger par la direction des apophyses qui sont beaucoup plus développées dans l'animal de Linz, ces vertèbres devraient être plus voisines des dernières caudales.

Comme nous ne connaissons de l'Aulocète de Linz que la partie supérieure du crâne et de notre Mésocète seulement la partie inférieure, il est difficile d'apprécier le degré d'affinité qui existe entre la tête de ces deux Cétacés ;

Digitized by Google

mais nous pouvons comparer la base du crâne de notre Cétacé d'Agram avec le *Cetotherium* de Crimée figuré par Brandt, planche I, figure 2, et il résulte de cette comparaison que les caisses tympaniques sont placées beaucoup plus en dehors, dans le Cétacé de Crimée, que ses os palatins sont beaucoup plus allongés et que la saillie de la base de l'occipital, si caractéristique dans l'espèce d'Agram, fait complétement défaut ici.

Comme nous l'avons vu plus haut, ces ossements ont été recueillis dans les marnes à Podused, près d'Agram, en Croatie. Ces marnes sont moins anciens que le Leithakalk et ils peuvent être considérés comme contemporains des dépôts sarmatiques. Ces dépôts s'étendent jusqu'en Perse, se trouvent entre des couches marines et des couches saumâtres et représentent la fin d'un dépôt marin. Ces marnes appartiennent à une époque où la mer Noire couvrait encore une grande partie des pays qui sont émergés aujourd'hui.

On sait que le bassin de la mer Noire avait encore une grande extension à cette époque géologique, du moins si on le compare avec celui d'aujourd'hui; elle renfermait alors des Baleines véritables, des Dauphins, des Squalodons, des Phoques et des Siréniens. Les affluents et les embouchures nourrissaient sans doute comme aujourd'hui ces derniers Thalassothériens. Les Squalodons remplissaient probablement le rôle des Orques des temps actuels.

A la suite de soulèvements, les eaux se sont retirées, le bassin s'est rétréci, la mer est devenue insensiblement saumâtre, et tous les grands Cétacés propres à la mer Noire ont été successivement anéantis.

On est loin de l'époque où l'on croyait à l'existence d'une Baléuoptère propre à la Méditerranée, puisqu'on sait aujourd'hui d'une manière positive que tous les Cétacés que l'on observe dans cette mer intérieure viennent de l'Océan.

Digitized by Google

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

La base du crâne de grandeur naturelle vue par sa face inférieure; on reconnaît en dessous et en arrière les deux condyles de l'occipital, les ailes du même os, la caisse tympanique qui est en place d'un côté, les apophyses mastoïdes des deux côtés; en dedans de la caisse tympanique on aperçoit une forte saillie de l'occipital qui se termine en avant par une crête médiane; à côté de cette crête médiane on voit la partie antérieure du palatin et entre lui et la caisse le sillon qui loge la trompe d'Eustache.

PLANCHE II.

(Toutes ces figures sont de grandeur naturelle comme celle de la planche première.)

Fig. 1. Première vertèbre dorsale.
Fig. 2. Seconde vertèbre dorsale.
Fig. 3. Troisième vertèbre dorsale.
Fig. 4. Sixième vertèbre dorsale, vue de profil.
Fig. 5. Onzième vertèbre lombaire, vue de profil.
Fig. 6. Sixième vertèbre caudale, vue de profil.
Fig. 7. Troisième vertèbre dorsale, vue de face.
Fig. 8. Onzième vertèbre lombaire, vue de face. C'est la même représentée fig. 5.
Fig. 9. Cinquième vertèbre caudale, vue de face.
Fig. 10. Condyle de la mandibule.
Fig. 11. Caisse tympanique.
Fig. 12. Côte.
Fig. 13. Coupe de la côte.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR
L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES
DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 5 août 1882.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Le petit travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie peut être considéré comme un complément à deux Notes, déjà anciennes, relatives à la même question (*). Aujourd'hui, après avoir reproduit une partie de la seconde Note (en y faisant quelques corrections), je déduis, de la méthode qui y était indiquée, la plupart des formules connues; après quoi je donne diverses propriétés du *triangle de Lagrange,* et une interprétation géométrique de la *transformation de Landen.*

I. Intégrale d'Euler.

1. L'équation

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0 \qquad (1)$$

étant mise sous la forme

$$\Delta(y)dx + \Delta(x)dy = 0; \qquad (2)$$

observons que, pour rendre le premier terme intégrable, on peut le multiplier par $\frac{1}{\cos^2 x}$, ou encore par $\frac{1}{\cos^2 x\,[1 + \operatorname{tg}^2 x\,(\Delta y)^2]}$.

(*) *Bulletins,* février 1869; *Comptes rendus,* 25 mai 1874.

Digitized by Google

En effet,

$$\int \frac{\frac{\Delta(y)dx}{\cos^2 x}}{1+\operatorname{tg}^2 x(\Delta y)^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left[(\Delta y) \operatorname{tg} x\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Or,

$$\cos^2 x\left[1+\operatorname{tg}^2 x(\Delta y)^2\right] = 1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 y\left[1+\operatorname{tg}^2 y(\Delta x)^2\right].$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu de l'équation (2),

$$\frac{\Delta(y)dx}{\cos^2 x\left[1+\operatorname{tg}^2 x(\Delta y)^2\right]} + \frac{\Delta(x)dy}{\cos^2 y\left[1+\operatorname{tg}^2 y(\Delta x)^2\right]} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Soient, d'après la formule (3) :

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} x(\Delta y), \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} y(\Delta x); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

et, par conséquent, en posant

$$1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y = \mathrm{L}: \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \frac{(\Delta y)dx}{\mathrm{L}} - c^2 \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y dy}{\mathrm{L}(\Delta y)}, \\ d\beta &= \frac{(\Delta x)dy}{\mathrm{L}} - c^2 \frac{\sin x \cos x \sin y \cos y dx}{\mathrm{L}(\Delta x)}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

puis, en vertu des équations (1), (2) :

$$d\alpha + d\beta = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

L'intégrale cherchée est donc, indifféremment, $\alpha + \beta =$ *const.*, ou $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$ *const.*; savoir :

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg}\left[\operatorname{tg} x(\Delta y)\right] + \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left[\operatorname{tg} y(\Delta x)\right] = \mu, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{A})$$

$$\frac{\sin x \cos y(\Delta y) + \sin y \cos x(\Delta x)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y(\Delta x)(\Delta y)} = \operatorname{tg}\mu \ (*) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{B})$$

(*) Après avoir démontré cette formule, Legendre ajoute : « Si l'on prenait deux angles » auxiliaires α, β, tels que

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} x\Delta(y), \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} y\Delta(x),$$

» il en résulterait

$$\mu = \alpha + \beta,$$

» ce qui est un moyen de calculer aisément par les Tables de sinus. » Comment l'illustre auteur du *Traité des fonctions elliptiques* ne s'est-il pas aperçu que ces variables α, β réduisent l'équation (1) à la forme (8) ?

Digitized by Google

2. *Remarque.* D'après les valeurs (7) :

$$d(\alpha+\beta)=\left[\frac{dx}{(\Delta x)}+\frac{dy}{(\Delta y)}\right]\frac{(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y}{L}\;\ldots\ldots\quad (D)$$

Ainsi, *pour transformer, en une différentielle exacte, le premier membre de la proposée, il suffit de le multiplier par*

$$\lambda=\frac{(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y}{L}\;\ldots\ldots\ldots\quad (10)$$

Tout à l'heure, nous reviendrons sur ce sujet.

3. *Diverses formes de l'intégrale.* Dans (B), la somme des carrés des deux termes de la fraction est

$$\cos^2x\cos^2y+\sin^2x\sin^2y\,(1-c^2\sin^2x)\,(1-c^2\sin^2y)$$
$$+\sin^2x\cos^2y\,(1-c^2\sin^2y)+\sin^2y\cos^2x\,(1-c^2\sin^2x).$$

Si l'on écrit ainsi cette quantité :

$$Ac^4+Bc^2+C,$$

on a :

$$A=\sin^4x\sin^4y,$$
$$B=-\sin^2x\sin^2y\,(\sin^2x+\sin^2y)-\sin^2x\sin^2y\,(\cos^2x+\cos^2y)=-2\sin^2x\sin^2y,$$
$$C=\cos^2x\cos^2y+\sin^2x\cos^2y+\sin^2y\cos^2x+\sin^4x\sin^4y=1.$$

Par conséquent,

$$Ac^4+Bc^2+C=(1-c^2\sin^2x\sin^2y)^2.$$

La formule (B) donne donc, si l'on prend convenablement les signes :

$$\frac{\sin x\cos y\,(\Delta y)+\sin y\cos x\,(\Delta x)}{L}=\sin\mu,\;\ldots\ldots\ldots\quad (C)$$

$$\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y\,(\Delta x)(\Delta y)}{L}=\cos\mu.\;\ldots\ldots\ldots\quad (D)$$

4. *Suite.* Pour $x=0$, $y=\mu$, λ se réduit à $(\Delta\mu)=\sqrt{1-c^2\sin^2\mu}$. Je dis que l'on a toujours

$$\frac{(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y}{L}=(\Delta\mu);\;\ldots\ldots\ldots\quad (E)$$

Digitized by Google

de sorte que l'équation (E) est encore une intégrale. Cette proposition connue, assez visible *à priori*, sera démontrée si l'on vérifie que l'on a, identiquement (*),

$$\left[(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y\right]^2+c^2\left[\sin x\cos y(\Delta y)+\sin y\cos x(\Delta x)\right]^2=(1-c^2\sin^2 x\sin^2 y)^2, \quad (11)$$

ou

$$(1-c^2\sin^2 x)(1-c^2\sin^2 y)+c^4\sin^2 x\cos^2 x\sin^2 y\cos^2 y$$
$$+c^2\sin^2 x\cos^2 y(1-c^2\sin^2 y)+c^2\sin^2 y\cos^2 x(1-c^2\sin^2 x)=1-2c^2\sin^2 x\sin^2 y+c^4\sin^4 x\sin^4 y;$$

etc. (**).

5. *Remarque*. On a, simultanément,

$$\left.\begin{aligned}(1-c^2\sin^2 x\sin^2 y)^2&=\left[\sin x\cos y(\Delta y)+\sin y\cos x(\Delta x)\right]^2+\left[\cos x\cos y-\sin x\sin y(\Delta x)(\Delta y)\right]^2\\&=\left[(\Delta x)(\Delta y)-c^2\sin x\cos x\sin y\cos y\right]^2+\left[c\sin x\cos y(\Delta y)+c\sin y\cos x(\Delta x)\right]^2\end{aligned}\right\}. \quad (12)$$

Voici donc *un carré décomposé, de deux manières différentes, en une somme de deux carrés.*

6. *Une transformée de l'équation* (1). D'après l'intégrale (C) :

$$d\left[\frac{\sin x\cos y(\Delta y)+\sin y\cos x(\Delta x)}{L}\right]=0,$$

ou

$$\sin x\, d\left[\frac{\cos y(\Delta y)}{L}\right]+\sin y\, d\left[\frac{\cos x(\Delta x)}{L}\right]+\frac{\cos x\cos y}{L}\left[(\Delta y)dx+(\Delta x)dy\right]=0;$$

ou, en vertu de la proposée,

$$\sin x\, d\left[\frac{\cos y(\Delta y)}{L}\right]+\sin y\, d\left[\frac{\cos x(\Delta x)}{L}\right]=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Cette équation (13) est la *transformée* dont il s'agit. Comme on peut l'établir *à priori* (***), il en résulte une *seconde méthode* d'intégration, sur laquelle nous n'insisterons pas.

(*) En vertu de (C).
(**) Nous supprimons ce dernier calcul : il n'offre aucune difficulté.
(***) Par un calcul assez long.

Digitized by Google

7. *Courbes intégrales.* Chacune des équations (A), (B), (C), (D), (E), si l'on y attribue à μ une valeur déterminée, représente une certaine courbe. *Ces cinq courbes sont identiques.* En effet, elles coupent, en un même point, l'axe des ordonnées (*); et chacune pourrait être construite, par points, au moyen de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\Delta y)}{(\Delta x)}.$$

Cette *courbe intégrale* coïncide encore avec les lignes ayant pour équations, soit

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y \,(\Delta x)(\Delta y) = \cos \mu, \quad \ldots \ldots \quad \text{(F)}$$

soit

$$\int_0^x \frac{dx}{(\Delta x)} + \int_0^y \frac{dy}{(\Delta y)} = \int_0^\mu \frac{dz}{(\Delta z)} \; (^{**}) \quad \ldots \ldots \quad \text{(G)}$$

J'ignore si la discussion de ces *courbes intégrales,* probablement très épineuse, a été faite.

8. *Système orthogonal.* Ces courbes, *de première espèce,* que l'on peut représenter aussi par

$$F(x) + F(y) = F(\mu), \quad \ldots \ldots \quad \text{(H)}$$

sont orthogonales aux *courbes de seconde espèce,* ayant pour équation

$$-E(x) + E(y) = F(\nu) \quad \ldots \ldots \quad \text{(K)}$$

En effet, pour les premières,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\Delta y)}{(\Delta x)};$$

et, pour les autres,

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{(\Delta x)}{(\Delta y)}.$$

(*) La constante μ est l'*ordonnée à l'origine.*

(**) Pour éviter toute difficulté, j'écris, sous le signe $\int$, z au lieu de μ.

Digitized by Google

II. Sur l'équation $Mdx + Ndy = 0$.

9. *Du multiplicateur* λ. Rappelons une proposition connue :

Si

$$\lambda(Mdx + Ndy) = du,$$

et que

$$\theta(Mdx + Ndy) = dv;$$

on a

$$\theta = \lambda f(u).$$

Voici une remarque complémentaire :

Si u *est fonction du multiplicateur* λ, *tout autre multiplicateur est donné par la formule*

$$\theta = \varphi(\lambda). \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

10. *Suite.* On a trouvé, ci-dessus :

$$\lambda = \frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{L}, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$u = \frac{\sin x \cos y (\Delta y) + \sin y \cos x (\Delta x)}{L} \quad \ldots \ldots \quad (C)$$

D'ailleurs, $\lambda = \Delta(\mu)$ est fonction de $u = \sin \mu$ (*). Conséquemment, la formule (14) est applicable, et l'on a ce théorème (**) :

1°
$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\varphi(\lambda)$$

est une différentielle exacte ;

2° *Si*
$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\theta$$

est une différentielle exacte,

$$\theta = \varphi(\lambda);$$

(*) $\lambda^2 = 1 - c^2u^2$.

(**) Énoncé, en partie, dans les *Comptes rendus*.

Digitized by Google

3° *Si*

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\varphi(\lambda) = dv,$$

on peut prendre, comme intégrale de l'équation (1),

$$v = const.$$

11. *Application.* Soit

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 = [(\Delta\mu)]^2.$$

Alors

$$dv = \left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right][(\Delta\mu)]^2.$$

Cette expression peut être réduite. En effet,

$$\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)} = \frac{d\mu}{(\Delta\mu)};$$

donc

$$dv = (\Delta\mu)\,d\mu = d\,.\,\mathrm{E}(\mu).$$

Et comme

$$d\,.\,\mathrm{E}(\mu) = (\Delta x)\,dx + (\Delta y)\,dy - c^2 d\,(\sin x \sin y \sin\mu) \text{ (*)},$$

il s'ensuit que :

1° *La quantité*

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right]\left[\frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right]^2$$

est une différentielle exacte, identiquement égale à

$$(\Delta x)\,dx + (\Delta y)\,dy - c^2 d\left[\sin x \sin y \frac{\sin x \cos y\,(\Delta y) + \sin y \cos x\,(\Delta x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right];$$

(*) *Legendre*, t. I, p. 43.

Digitized by Google

2° *Une intégrale de l'équation* (1) *est*

$$\int_0^x (\Delta x)\,dx + \int_0^y (\Delta y)\,dy - \int_0^\mu (\Delta z)\,dz = c^2 \sin x \sin y \frac{\sin x \cos y\,(\Delta y) + \sin y \cos x\,(\Delta x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y} \text{ (*)}. \quad \text{(L)}$$

12. *Vérification.* La première partie du théorème consiste en l'égalité

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right](\Delta\mu)^2 = (\Delta x)\,dx + (\Delta y)\,dy - c^2 d.(\sin x \sin y \sin\mu) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Comme les deux membres sont des fonctions symétriques, il suffit de vérifier que

$$\frac{(\Delta\mu)^2}{(\Delta x)} = (\Delta x) - c^2 \sin y \left[\sin\mu \cos x + \sin x \cos\mu \frac{d\mu}{dx}\right].$$

Or,

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{(\Delta\mu)}{(\Delta x)} \text{ (**)}.$$

Donc l'égalité devient

$$(\Delta\mu)^2 = (\Delta x)^2 - c^2 \sin y \left[\sin\mu \cos x\,(\Delta x) + \sin x \cos\mu\,(\Delta\mu)\right].$$

Il resterait à remplacer, par leurs valeurs, $\sin\mu$, $\cos\mu$, $(\Delta\mu)$. Mais il est plus court d'employer la formule

$$\sin y = \frac{\sin\mu \cos x\,(\Delta x) - \sin x \cos\mu\,(\Delta\mu)}{1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2 x}.$$

On trouve ainsi, après une réduction évidente,

$$(\sin^2 x - \sin^2\mu)(1 - c^2 \sin^2\mu \sin^2 x) = \sin^2 x \cos^2\mu\,(1 - c^2 \sin^2\mu) - \sin^2\mu \cos^2 x\,(1 - c^2 \sin^2 x)$$
$$= (\sin^2 x - \sin^2\mu) - c^2 \sin^2\mu \sin^2 x\,(\cos^2\mu - \cos^2 x);$$

ce qui est identique.

(*) Autrement dit, *l'intégrale immédiate*

$$\int_0^x \frac{dx}{(\Delta x)} + \int_0^y \frac{dy}{(\Delta y)} - \int_0^\mu \frac{dz}{(\Delta z)} = 0,$$

peut être remplacée par (L).

(**) On arrive à la même conclusion en observant que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} = \frac{(\Delta x)(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{L\,(\Delta x)}.$$

Digitized by Google

13. *Remarque.* Le théorème précédent (11) semble en défaut dans le cas où, comme l'a fait M. Despeyrous (*), on met la proposée sous la forme

$$\left[\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)}\right] \frac{\cos x \cos y\,(\Delta x)\,(\Delta y)}{\text{L}} = 0.$$

En effet, le *multiplicateur,* $\frac{\cos x \cos y\,(\Delta x)\,(\Delta y)}{\text{L}}$, *n'est pas fonction de*

$$\lambda = \frac{(\Delta x)\,(\Delta y) - c^2 \sin x \cos x \sin y \cos y}{\text{L}}.$$

Mais *la quantité*

$$\frac{\cos x \cos y\,(\Delta y)}{\text{L}}\,dx + \frac{\cos y \cos x\,(\Delta x)}{\text{L}}\,dy$$

n'étant pas une différentielle exacte (**), l'exception n'est qu'apparente.

(*) Sturm, *Cours d'Analyse,* t. II, p. 329.

(**) Cette proposition, assez visible par le calcul effectué au paragraphe (6), peut être prouvée directement, comme il suit.

La condition

$$\frac{d\text{M}}{dy} = \frac{d\text{N}}{dx}$$

devient, dans le cas actuel,

$$\cos x \left[\text{L}\,(\Delta y) + \text{L} \cos y \frac{c^2 \cos y}{(\Delta y)} + \cos y\,(\Delta y) \frac{c^2 \sin^2 x \cos y}{\text{L}}\right] \sin y$$

$$= \cos x \left[\text{L}\,(\Delta x) + \text{L} \cos x \frac{c^2 \cos x}{(\Delta x)} + \cos x\,(\Delta x) \frac{c^2 \sin^2 y \cos x}{\text{L}}\right] \sin x.$$

Or, pour $x = 0$, $y = \mu$, cette égalité, qui devrait être *identique*, se réduit à

$$\left[(\Delta \mu) + c^2 \frac{\cos^2 \mu}{(\Delta \mu)}\right] \sin \mu = 0;$$

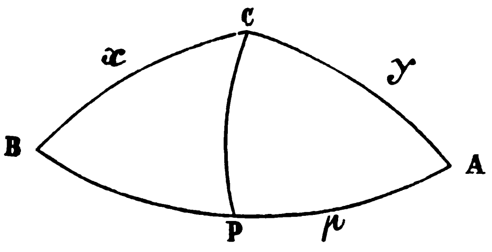
puis à

$$\sin \mu = 0.$$

III. Sur le triangle de Lagrange (*).

14. *Préliminaires.* Soit ACB un triangle sphérique, dans lequel

$$AB = \mu, \quad CB = x, \quad CA = y.$$



Il en résulte (**) :

$$\cos C = -(\Delta\mu), \quad \cos A = (\Delta x), \quad \cos B = (\Delta y),$$

$$\frac{\sin A}{\sin x} = \frac{\sin B}{\sin y} = \frac{\sin C}{\sin \mu} = c.$$

De plus, si l'on abaisse l'arc CP perpendiculaire à BA, on a :

$$\cos A = \cot y \operatorname{tg} AP, \quad \cos B = \cot x \operatorname{tg} BP;$$

ou

$$\operatorname{tg} AP = \operatorname{tg} y\,(\Delta x), \quad \operatorname{tg} BP = \operatorname{tg} x\,(\Delta y) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Ces valeurs sont celles que nous avons désignées par β, α (1) (***). Donc

$$BP = \alpha, \quad AP = \beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

(*) *Théorie des fonctions*, (1813), p. 116.

(**) Legendre, *Fonct. ellipt.*, t. I, p. 20.

(***) Legendre ne fait pas cette dernière remarque; mais, après avoir fait observer que la considération du triangle de Lagrange conduit à

$$\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)} = 0,$$

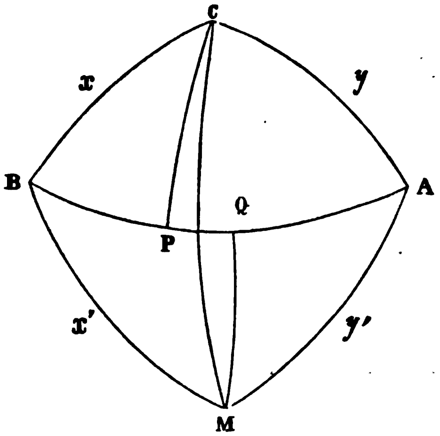
il ajoute :

« Ainsi, une application fort simple de la trigonométrie sphérique aurait suffi pour trouver » l'intégrale algébrique complète de l'équation transcendante

$$\frac{dx}{(\Delta x)} + \frac{dy}{(\Delta y)} = 0. \text{ »}$$

Digitized by Google

15. *Suite.* Si l'arc AB, dont la longueur est constante, glisse entre les côtés de l'angle C, cet arc enveloppe une certaine courbe sphérique, facile à construire par points. Menons, en effet, les arcs AM, BM, respectivement perpendiculaires à CA, CB; et soit M leur point d'intersection. Il est visible que M est, relativement à BA, le *centre instantané de rotation* (*). Conséquemment, *le point* Q, *commun à l'enveloppée* AB *et à l'enveloppe, est la projection sphérique de* M.



Cela posé, soient

$$BQ = \alpha', \quad AQ = \beta', \quad BM = x', \quad AM = y' :$$

il s'agit d'évaluer α' ou β'.

On a, par les triangles rectangles CBM, CAM,

$$\cos x \cos x' = \cos y \cos y'.$$

Le triangle BAM donne

$$\cos x' = \cos\mu \cos y' + \sin\mu \sin y' \sin A.$$

De plus, dans le triangle AQM,

$$\operatorname{tg}\beta' = \sin A \operatorname{tg} y'.$$

On tire, des deux premières équations, en éliminant $\cos x'$,

$$\operatorname{tg} y' = \frac{\cos y - \cos x \cos\mu}{\cos x \sin\mu \sin A};$$

(*) Si cette proposition n'est pas admise *à priori*, on peut la démontrer au moyen de l'angle tétraèdre OACBM, O étant le centre de la sphère. Quand l'angle OAB glisse entre les faces du dièdre OBCA, il tourne autour de la droite OM; etc.

Digitized by Google

ou, parce que le numérateur égale sin x sin μ cos B :

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} x \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Conséquemment,

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} x \cos B,$$

ou

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} x \,(\Delta y); \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

et, à cause de la symétrie,

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} y \,(\Delta x). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Chacune des formules (18), (19) détermine la position du point Q sur le côté mobile AB.

16. *Remarque.* La comparaison des valeurs (16), (18), (19) donne :

$$AQ = BP, \quad BQ = AP.$$

Ainsi :

Quand un quadrilatère sphérique a deux angles opposés droits A, B; *les projections* (sphériques) *de deux côtés opposés, sur la diagonale* AB, *sont égales* (*).

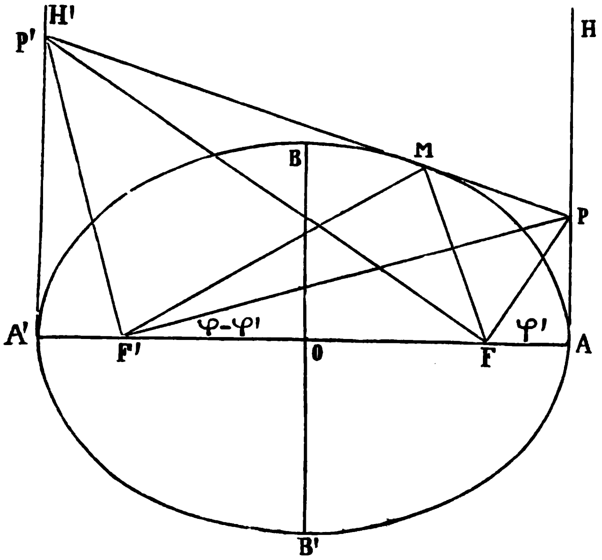
IV. Substitution de Landen.

17. Jacobi a donné une élégante interprétation géométrique de la *formule de Landen* (**). En voici une autre, moins simple que celle de l'illustre Géomètre, mais assez remarquable.

(*) Pour le quadrilatère plan, cette propriété est *intuitive*.
(**) Ou *Échelle de Lagrange*. Bertrand, *Calcul intégral*, p. 657.

Digitized by Google

Soit une ellipse ABA'B', dans laquelle



$$OA = OA' = 1, \quad OF = OF' = c.$$

1° Si l'on mène les rayons vecteurs relatifs à un point quelconque de la courbe, et que l'on fasse

$$MFA = 2\varphi', \quad MF'A = 2\varphi' - 2\varphi,$$

on a

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{1-c}{1+c}\operatorname{tg}\varphi'. \quad (20)$$

En effet, PP' étant la tangente en M, limitée aux tangentes indéfinies HA, A'H', en A, A'; PF, PF' sont, d'après une propriété connue, les bissectrices de AFM, AF'M. De plus,

$$AP = AF \operatorname{tg}\varphi' = AF' \operatorname{tg}(\varphi - \varphi');$$

etc. (*).

2° Les bissectrices FP, FP', des angles AFM, A'FM, sont perpendiculaires entre elles. *Si donc l'angle droit* PFP' *tourne autour de* F, *l'hypoténuse* PP', *du triangle variable* PFP', *enveloppe l'ellipse.* De même pour PF'P'. En outre, le point de contact M est facile à déterminer. Enfin, l'angle P'PH égale φ.

3° On a, dans le triangle MFF' :

$$FM = 2c\frac{\sin(2\varphi - 2\varphi')}{\sin(4\varphi' - 2\varphi)}, \quad F'M = 2c\frac{\sin 2\varphi'}{\sin(4\varphi' - 2\varphi)};$$

(*) Le théorème exprimé par l'équation (20), assez peu connu, je crois, peut être énoncé ainsi :

Dans toute ellipse, les tangentes des demi-anomalies vraies, d'un même point, ont un rapport constant.

On déduit facilement, de cette propriété, la relation entre *l'anomalie vraie* et *l'anomalie excentrique*.

Digitized by Google

donc

$$\sin(4\varphi' - 2\varphi) = c\left[\sin(2\varphi - 2\varphi') + \sin 2\varphi'\right];$$

ou, par la suppression d'un facteur commun,

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

formule de Landen ou de Lagrange (*).

4° On tire, de l'équation (20),

$$\cos(\varphi - \varphi') = \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{4c}{(1+c)^2}\sin^2\varphi'}},$$

ou

$$\cos\varphi' = \cos(\varphi - \varphi')\,\Delta(c', \varphi'); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

pourvu que l'on suppose

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

5° L'équation (21) donne, immédiatement,

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta(c, \varphi); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

et, si l'on divise par $\cos\varphi$ les deux membres,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi'}{c + \cos 2\varphi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

6° On déduit, de cette valeur :

$$\sin\varphi = \frac{\sin 2\varphi'}{(1+c)\Delta(c', \varphi')}, \quad \cos\varphi = \frac{c + \cos 2\varphi'}{(1+c)\Delta(c', \varphi')}; \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

(*) *Legendre*, t. I, p. 79. On voit qu'il est plus simple de prendre d'abord la relation (20), mise, si l'on veut, sous la forme

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = b' \operatorname{tg}\varphi'.$$

Digitized by Google

puis, à cause de

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \cos\varphi \cos 2\varphi' + \sin\varphi \sin 2\varphi' :$$

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \frac{c \cos 2\varphi' + 1}{(1 + c)\Delta(c', \varphi')} \quad \text{. . . . .} \quad (26)$$

Mais

$$\cos(2\varphi' - \varphi) = \Delta(c, \varphi); \quad \text{. . . . .} \quad (23)$$

donc

$$(1 + c)\Delta(c, \varphi)\Delta(c', \varphi') = 1 + c\cos 2\varphi' \ (^*). \quad \text{. . . . .} \quad (27)$$

7° En différenciant l'équation (21), on a

$$\cos(2\varphi' - \varphi)(2d\varphi' - d\varphi) = c\cos\varphi d\varphi,$$

ou

$$2\Delta(c, \varphi) d\varphi' = [c\cos\varphi + \cos(2\varphi' - \varphi)] d\varphi.$$

D'après les formules (25), (26), le coefficient de $d\varphi$ est

$$\frac{c^2 + 2c\cos 2\varphi' + 1}{(1 + c)\Delta(c', \varphi')} = \frac{(1 + c)^2 - 4c\sin 2\varphi'}{(1 + c)\Delta(c', \varphi')} = (1 + c)\Delta(c', \varphi');$$

donc l'équation différentielle, entre φ' et φ, se réduit à

$$\frac{d\varphi'}{\Delta(c', \varphi')} = \frac{1 + c}{2} \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)} \quad \text{. . . . .} \quad (28)$$

En conséquence,

$$F(c', \varphi') = \frac{1 + c}{2} F(c, \varphi) \quad \text{. . . . .} \quad (29)$$

Ce dernier calcul me semble, non plus court, mais plus simple que celui que l'on trouve dans le *Traité des fonctions elliptiques*.

(*) On arrive plus rapidement à cette relation, peut-être nouvelle, en exprimant que P'F *est la somme des projections de* P'F' *et de* FF'.

Digitized by Google

ADDITION.

V. Éléments d'un quadrilatère sphérique.

18. Dans la figure de la page 13, on a

$$\cos CM = \cos x \cos x'.$$

Nous avons trouvé

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} x \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Mais :

$$\sin A = c \sin x, \qquad \cos B = (\Delta y);$$

donc

$$\operatorname{tg} y' = \frac{(\Delta y)}{c \cos x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

On tire, de cette formule,

$$\sin y' = \frac{(\Delta y)}{\sqrt{1 + c^2 - c^2(\sin^2 x + \sin^2 y)}}, \qquad \cos y' = \frac{c \cos x}{\sqrt{1 + c^2 - c^2(\sin^2 x + \sin^2 y)}}; \quad (31)$$

puis, par un changement de lettres :

$$\sin x' = \frac{(\Delta x)}{\sqrt{1 + c^2 - c^2(\sin^2 x + \sin^2 y)}}, \qquad \cos x' = \frac{c \cos y}{\sqrt{1 + c^2 - c^2(\sin^2 x + \sin^2 y)}}. \quad (32)$$

Conséquemment,

$$\cos CM = \frac{c \cos x \cos y}{\sqrt{1 + c^2 - c^2(\sin^2 x + \sin^2 y)}} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Digitized by Google

Il résulte, de cette valeur :

$$\left.\begin{aligned} \sin CM &= \sqrt{\frac{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}}, \\ \cot CM &= \frac{c \cos x \cos y}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

19. Représentons par θ, ψ les angles BMC, AMC, dont la somme est AMC = M. Les triangles rectangles BMC, AMC donnent :

$$\cos \theta = \cot MC \cdot \operatorname{tg} x', \qquad \cos \psi = \cot MC \cdot \operatorname{tg} y';$$

c'est-à-dire :

$$\cos \theta = \frac{\cos x (\Delta x)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

$$\cos \psi = \frac{\cos y (\Delta y)}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$\sin \theta = \sin x \sqrt{\frac{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

$$\sin \varphi = \sin y \sqrt{\frac{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

20. On a

$$\sin M = \sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi,$$

ou

$$\sin M = \sqrt{1 + c^2 - c^2 (\sin^2 x + \sin^2 y)} \left[\frac{\sin x \cos y (\Delta y) + \sin y \cos x (\Delta x)}{1 - c^2 \sin^2 x \sin^2 y}\right].$$

Le second facteur équivaut à sin μ.

Digitized by Google

Donc, finalement,

$$\frac{\sin M}{\sin \mu} = \sqrt{1 + c^2 - c^2(\sin^2 x + \sin^2 y)} \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

(*) Pour vérifier ce résultat, il suffit d'observer que, dans le triangle AMB :

$$\frac{\sin M}{\sin \mu} = \frac{\cos A}{\sin x'} = \frac{(\Delta x)}{\sin x'}.$$

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE

DES

PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION;

PAR

J. PLATEAU,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE,
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES,
DE L'ACADÉMIE DE BERLIN, ETC.

TROISIÈME SUPPLÉMENT [1],

COMPRENANT LES ANNÉES 1880, 1881 ET 1882.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 3 février 1883.)

---

[1] Voir, pour l'ouvrage et le premier supplément, le t. XLII, et pour le deuxième supplément, le t. XLIII des *Mém. de l'Acad. royale de Belgique.*

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE

DES

PRINCIPAUX PHÉNOMÈNES SUBJECTIFS DE LA VISION.

PREMIÈRE SECTION.

Génération et persistance des impressions sur la rétine.

1860. ROGERS. *On our inability from the retinal impression alone to détermine which retina is impressed.* (Proceed. of the American Association, p. 192.)

Le titre indique suffisamment la question traitée; expériences.

1864. NICOLAÏDÈS. *Sur le lieu des intersections de deux courbes mobiles.* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2me série, t. III, p. 39.)

A cause de la relation avec le second des articles J. Plateau 1828, avec les articles Le François 1829, et l'article Van der Mensbrugghe 1863, dans la Bibliographie simple qui suit la première section analytique.

1867. WEBER. *Theorie des Anorthoscops und der Anorthoscopischen Figuren.* (Zeitschrift für Mathematik und Physik [Schlömilch], 12me année, p. 133.)

1875. MAYER. *Researches in Acoustics.* (Philos. Magaz., 4me série, t. XLIX, p. 352.)

Persistance des impressions auditives; son étude; emploi d'un disque percé tournant.

1876. KLEINER. *Zur Theorie der intermittirenden Netzhautreizung.* (Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, Neue Folge, t. XIV, p. 133.)

Recherche, au moyen de disques tournants à secteurs blancs et noirs, de la relation entre le degré d'éclairement et la durée d'intermittence due au passage des secteurs noirs, pour la plus petite vitesse qui donne une teinte uniforme. La courbe qui représente cette relation paraît être une hyperbole équilatère.

Digitized by Google

1877. HELMHOLTZ. *Lehre von den Tonempfindungen.* (4^me^ édition, p. 234.)

Persistance des impressions auditives.

1878. MUYBRIDGE. *Photographies instantanées.* (Journ. anglais Nature, t. XXVI, 1882, p. 196, 2^me^ colonne.)

Représentations par la photographie des phases successives et très rapprochées d'un mouvement rapide, tel que celui du galop d'un cheval, etc.

1879. EUSTIS. *A new method of studying wave motions.* (Proceedings of the American Academy of arts and sciences, new series, t. VII. De mai 1879 à mai 1880, p. 218.)

Pointe de platine mise électriquement en vibration de manière à plonger, à des intervalles égaux, dans une couche de mercure couverte d'un voile de lycopode; les étincelles éclairent les ondes formées.

SCHWARTZ. *Effect of distance on appreciation of color.* (Ibid., ibid., p. 229.)

Bande étroite de papier coloré appliquée sur un fond blanc ou noir et observée à differentes distances : pour un éloignement suffisant, la sensation de la couleur disparaît.

TROWBRIDGE. *Simple apparatus for illustrating periodic motions.* (Ibid., ibid., p. 232.)

Modification de la méthode de Lissajous.

KÜHNE. *Chemische Vorgänge in der Netzhaut.* (Handbuch der Physiologie von Hermann, t. III, p. 235; voir à partir de la page 326.)

Examen chimique de l'action de la lumière sur la rétine.

COHN. *Détermination du sens chromatique à la lumière solaire directe et à la lumière électrique.* (Supplément aux Klinische Monatsblätter fur Augenheilkunde, Stuttgard, 1880. Voir les Ann. d'oculistique 12^me^ série, t. III, p. 68.)

Distances auxquelles des surfaces d'un millimètre de diamètre et teintes des différentes couleurs sont reconnues comme présentant ces couleurs, tant à la lumière solaire qu'à la lumière électrique.

1880. REYNAUD. *Le Praxinoscope-théâtre.* (Journ. La Nature, n° du 7 février.)

Modification du Praxinoscope (voir à 1878 Reynaud dans le 2^me^ supplément).

FERNET. *Analyse des phénomènes lumineux produits par les décharges électriques dans les gaz raréfiés.* (Comptes rendus, t. XC, p. 680.)

Emploi du miroir tournant.

Digitized by Google

1880. Lechat. *Des vibrations à la surface des liquides.* (Ibid., ibid., p. 1545.)

Large faisceau de lumière parallèle ou à peu près tombant obliquement sur la surface du liquide, et réfléchissant l'image de celle-ci sur un écran blanc.

Charpentier. *Sur la sensibilité de l'œil aux différences de lumière.* (Ibid., t. XCI, p. 49.)

Recherche de la différence d'intensité qui doit exister entre deux lumières successives de même nature pour que l'œil juge ces deux lumières inégales.

Sur la sensibilité différentielle de l'œil pour de petites surfaces lumineuses. (Ibid., ibid., p. 240.)

Pour deux surfaces lumineuses contiguës très petites, il faut une différence d'éclat considérable pour que l'œil puisse la distinguer : pour deux carrés de 2mm de côté, et observés à la distance de 3 mètres, elle a dû être de 0,60.

Sur les variations de la sensibilité lumineuse suivant l'étendue des parties rétiniennes excitées. (Ibid., ibid., p. 995.)

Au-dessous de certaines dimensions d'une image rétinienne, le minimum de sensibilité diminue, et cela proportionnellement à l'étendue de la surface excitée.

Sur la sensibilité visuelle et ses rapports avec la sensibilité lumineuse et la sensibilité chromatique. (Ibid., ibid., p. 1075.)

Si, dans une obscurité complète, plusieurs espaces très petits sont éclairés d'une lumière graduellement croissante, ce n'est qu'à partir d'une certaine intensité que l'œil perçoit et distingue nettement les points en question (sensibilité visuelle). — Si les points sont éclairés par une couleur simple saturée, la couleur est perçue avant que les points soient distingués (sensibilité chromatique).

Sur la quantité de lumière nécessaire pour percevoir la couleur d'objets de différentes surfaces. (Ibid., t. XCII, p. 92.)

Petits carrés colorés, l'un de 12mm de côté, l'autre de grandeur successivement croissante, à partir de 0mm,7, observés dans l'obscurité à la distance de 20 centimètres.

Le sens de la lumière et le sens des couleurs. (Archives d'Ophthalmologie, novembre et décembre.)

La sensibilité pour la lumière et la sensibilité pour les couleurs sont deux fonctions différentes de l'appareil visuel; expériences remarquables.

Napoli. *Un nouveau photomètre.* (Séances de la Société française de Physique, séance du 19 mars.)

Les deux lumières à comparer sont placées à la même distance de l'écran, et l'on affaiblit la plus intense au moyen d'un disque percé tournant.

Digitized by Google

1880. MERCADIER. *Sur la détermination des éléments d'un mouvement vibratoire.* (Journ. de Physique de D'Alméida, t. IX, pp. 217 et 282.)

Lignes obscures dans l'ombre commune de deux styles légers fixés l'un au corps vibrant, l'autre à un diapason connu.

GOVI. *Sur une nouvelle expérience destinée à montrer le sens de la rotation imprimée par les corps à la lumière polarisée.* (Comptes rendus, t. XCI, p. 517.)

Expérience curieuse fondée sur la persistance des impressions.

DECHARME. *Formes vibratoires des pellicules circulaires de liquide sapo-saccharique.* (Ibid., ibid., pp. 625 et 666.)

Faits analogues à ceux que l'auteur a observés sur les bulles; voir à 1879, dans le 2me supplément.

H. DUFOUR. *Appareil pour montrer les courbes de M. Lissajous.* (Bullet. de la Société vaudoise des sciences naturelles, 2me série, t. XVII, p. 79.)

Application de la méthode de projection de M. Terquem (voir l'article 1877 Terquem dans le premier supplément) : les courbes sont tracées sur un écran par l'image d'un point lumineux produite au foyer d'une petite lentille, le point lumineux et la lentille étant mis en vibration.

ROOD. *Newton's use of the term Indigo with reference to colour of the spectrum.* (Journ. de Silliman, 3me série, t. XIX, p. 135.)

Emploi des disques tournants à secteurs colorés.

On the effects produced by mixing white with coloured light. (Ibid., t. XX, p. 81.)

Emploi de disques tournants présentant des secteurs colorés alternant avec des secteurs blancs; le résultat est toujours l'addition d'une certaine quantité de violet.

CARMICHAEL. *Presentation of sonorous vibrations by means of a revolving lantern.* (Ibid., t. XIX, p. 312.)

Un jet de gaz d'éclairage soumis à des vibrations sonores brûle à l'intérieur d'un tube de mica, lequel tourne rapidement dans un plan; l'anneau lumineux apparent se montre dentelé.

THOMPSON (Silvanus). *A new illustration of persistence of vision.* (Journ. of the Franklin Institute, 3me série, t. LXXIX, p. 53.)

L'explication de Tobin est insuffisante (voir l'article 1879 Tobin dans le 2me supplément).

KÖNIG. *Untersuchungen über die Schwingungen einer Normalstimmgabel.* (Ann. de Wiedemann, t. IX, p. 394.)

Emploi d'un microscope oscillant et des procédés de Lissajous.

Digitized by Google

1880. Bresina. *Ueber die Schwingungen der Luft in der chemischen Harmonika.* (Progr. Archigymnasium Soest, 1880-1881, p. 1.)

Emploi d'un miroir en mouvement.

Grossmann. *Ueber die Messung der Schärfe des Farbensinnes.* (Centralblatt f. pr. Augenheilk., t. IV, p. 298.)

L'appréciation de la couleur varie avec la distance et avec l'étendue de la surface colorée. Les couleurs qui se reconnaissent le plus loin sont le vert et le jaune, etc.

1881. Montigny. *De l'intensité de la scintillation pendant les aurores boréales.* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 3me série, t. I, p. 231.)

Emploi encore de son scintillomètre (voir les articles 1856 et 1864 Montigny, dans la Bibliographie simple qui suit la première section analytique).

J. Plateau. *Quelques expériences sur les lames liquides minces.* (Ibid., ibid., t. II, p. 8.)

Exemple curieux de longue persistance d'une impression.

Rosenstiehl. *Détermination des couleurs qui correspondent aux sensations fondamentales, à l'aide des disques rotatifs.* (Comptes rendus, t. XCII, p. 244.)

Les trois teintes fondamentales sont l'orangé, un jaune vert et un bleu : elles reproduisent, par le mélange de leurs sensations deux à deux, le rouge, le vert et le bleu les plus intenses.

Détermination des sensations colorées fondamentales, par l'étude de la répartition des couleurs complémentaires dans le cercle chromatique. (Ibid., ibid., p. 357.)

Même sujet.

Discussion de la théorie des trois sensations colorées fondamentales. (Ibid., ibid., p. 1286.)

Caractères de ces sensations.

Détermination de la distance angulaire des couleurs. (Ibid., t. XCIII, p. 207.)

Emploi des disques tournants à secteurs colorés.

Recherches sur les lois de la vision des couleurs. (Bullet. de la Société industrielle de Mulhouse, séance du 28 septembre 1881. Le Mémoire a été imprimé à Mulhouse en 1882.)

Développement du contenu des articles ci-dessus. Applications.

Digitized by Google

1881. CHARPENTIER. *L'examen de la vision au point de vue de la médecine générale.* Paris.

Détermination de la limite du champ visuel; étude de la sensibilité visuelle, de la sensibilité chromatique et de l'acuité visuelle.

NICOTRA. *Recherches sur les sons résultants.* (Journ. de Physique de D'Alméida, t. X, p. 33.)

Effets de la persistance des impressions auditives.

DECHARME. *Formes vibratoires des pellicules circulaires de liquide sapo-saccharique.* (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, 5me série, t. XXII, p. 302.)

Mémoire in-extenso (voir, plus haut, l'article 1880 Decharme).

CROVA. *Projection des figures de Lissajous avec des différences de phases variables à volonté.* (Journ. de Phys. de D'Alméida, t. X, p. 253.)

Emploi d'un aimant pour faire varier les phases.

LATCHINOFF. *Le dynamomètre optique.* (Journ. L'Électricien, t. I, p. 36.)

Application ingénieuse de la persistance des impressions.

MACÉ DE LÉPINAY et NICATI. *Recherches sur la comparaison photométrique des diverses parties d'un même spectre.* (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, 5me série, t. XXIV, p. 289.)

L'auteur vérifie le fait déjà signalé par Newton et contesté par Draper, que l'intensité maxima est dans le jaune, etc.

Contribution à l'étude du champ visuel des couleurs. (Archives d'Ophthalmologie, t. I, pp. 437 et 506.)

La sensibilité est la moindre pour la lumière rouge et le champ visuel est aussi le plus étroit.

. . . . *Les Zootropes.* (Journ. La Nature, n° 448, 10me année, p. 71.)

Modification simple du Praxinoscope (voir l'article 1878 Reynaud, dans le 2me supplément); modification du Thaumatrope (voir l'article 1825 Paris, dans la Bibliographie simple qui suit la Bibliographie analytique de la 1re section).

FORBES et YOUNG. *Nouvelles expériences pour mesurer la vitesse de la lumière.* (Journ. anglais Nature, t. XXIV, p. 135.)

Méthode de Fizeau modifiée (voir l'article 1849 Fizeau dans la Bibliographie simple qui suit la Bibliographie analytique de la 1re section).

Experimental Determination of the Velocity of white and of coloured light. (Proceedings de la Soc. Royale de Londres, t. XXXII, p. 247.)

Idem; la lumière colorée marche d'autant plus vite qu'elle est plus réfrangible.

Digitized by Google

1881. SPOTTISWOODE. *The electrical discharge, its forms and its functions.* (Journ. anglais Nature, t. XXIV, pp. 546 et 569.)

Emploi du miroir tournant.

LORD RAYLEIGH. *Experiments on colour.* (Ibid., t. XXV, p. 64; voir p. 66.)

Appareil faisant tourner rapidement sur elle-même l'image de l'ensemble immobile de deux disques de Maxwell, ensemble qu'on peut ainsi ajuster pendant la rotation.

WEAD. *On combining colour disks.* (Ibid., ibid., p. 266.)

Modification de l'appareil ci-dessus.

BULL. *A new method of examining and numerically expressing the colour perception.* (Transact. of the Intern Med. Congress, Londres, t. III, p. 49.)

ROOD. *Théorie scientifique des couleurs et leurs applications à l'art et à l'industrie.* Traduction française, Paris.

Étude générale du sujet. — P. 177 : à cause d'une illusion due à la persistance des impressions, les photographies instantanées de la mer agitée ne représentent pas exactement l'aspect des vagues.

V. FREY et V. KRIES. *Ueber Mischung von Spectralfarben.* (Archiv. de Reichert et Dubois, p. 336.)

Les proportions de deux couleurs spectrales nécessaires pour produire par leur mélange une teinte déterminée, varient avec les observateurs, etc.

GLAN. *Ueber Apparate zur Untersuchung der Farbenempfindungen.* (Archiv. für die gesammten Physiologie, t. XXIV, p. 307.)

Divers appareils pour la comparaison et pour le mélange des couleurs spectrales.

DOBROWOLSKY. *Ueber die Veränderung der Empfindlichkeit des Auges gegen Spectralfarben, bei wächselnder Lichtstärke derselben.* (Archiv. de Pflüger, t. XXIV, p. 189.)

L'œil est beaucoup plus sensible au bleu qu'au rouge.

URBANTSCHITSCH. *Zur Lehre von Schallempfindung.* (Ibid., ibid., p. 574.)

Persistance des impressions auditives.

Ueber das An- und Abklingen akustischer Empfindungen. (Ibid., t. XXV, p. 323.)

Génération et persistance de ces impressions.

Digitized by Google

1881. Koenig. *Ueber die Beobachtung der Luftschwingungen in Orgelpfeifen.* (Ann. de Wiedemann, t. XIII, p. 569; voir p. 580.)

Emploi du miroir tournant.

Lommel. *Einfaches Verfahren die Stroboskopischen Erscheinungen für viele gleichzeitig sichtbar zu machen.* (Carl's Repertorium, t. XVII, n° 7, p. 463.)

Un faisceau de lumière vive reçu sur la face postérieure d'un disque de Phénakisticope en rotation est renvoyé par un miroir sur la face antérieure du disque.

Dvořák. *Ueber einige akustische Bewegungserscheinungen, insbesondere über das Schallradiometer.* (Bullet. de l'Acad. de Vienne, 2me partie, t. LXXXIV, octobre.)

Emploi de la méthode stroboscopique pour montrer la formation des anneaux de fumée sous l'influence de vibrations énergiques.

V. Fleischl. *Physiologisch-optische Notizen.* (Bullet. de l'Acad. de Vienne, 3me partie, t. LXXXIII, p. 199.)

Nous ne pouvons savoir d'une manière immédiate si nous voyons monoculairement ou binoculairement.

Stricker. *Beiträge zur Kenntniss der Organgefühle.* (Med. Jahrb. der kk. Gesellsch. der Aertze zu Wien, p. 545.)

Objections contre l'assertion ci-dessus de Von Fleischl.

1882. Montigny. *Notice sur une particularité de l'aurore boréale du 2 octobre 1882, et sur l'accroissement d'intensité de la scintillation des étoiles pendant les aurores boréales.* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 3me série, t. IV, p. 303.)

Toujours emploi de son scintillomètre.

Macé de Lépinay et Nicati. *Recherches expérimentales sur le phénomène de Purkinje.* (Journ. de Phys. de D'Alméida, 2me série, t. I, p. 33.)

Étude de l'acuité visuelle correspondante à chacune des couleurs du spectre.

Relation entre la loi de Bouguer-Masson et le phénomène de Purkinje. (Comptes rendus, t. XCIV, p. 785.)

Le rapport entre la plus petite différence perceptible d'éclat de deux espaces juxtaposés de même couleur et l'éclat de l'un d'eux, est constant pour toutes les couleurs simples tant qu'on n'approche pas trop du violet; mais il va ensuite en augmentant.

Hurion. *Détermination des ventres des tuyaux sonores à l'aide des flammes manométriques.* (Journ. de Phys. de D'Alméida, 2me série, t. I, p. 136.)

Emploi du miroir tournant.

Digitized by Google

1882. Marey. *Sur la reproduction, par la photographie, des diverses phases du vol des oiseaux.* (Comptes rendus, t. XCIV, p. 683.)

Description d'un appareil perfectionné; les images successives disposées sur un Phénakisticope reproduisent l'aspect de l'oiseau qui vole.

Bichat et Blondlot. *Oscillations du plan de polarisation par la décharge d'une batterie. Simultanéité des phénomènes électrique et optique.* (Ibid., ibid., p. 1590.)

Emploi du miroir tournant.

L. L. *Les roues d'une voiture et la photographie.* (Journ. La Nature, 10me année, n° 471, p. 19.)

Dans la photographie instantanée d'une voiture traînée par un cheval au trot, la partie supérieure des roues paraît beaucoup moins nette que la partie inférieure; pourquoi.

..... *Le Phénakisticope de projection.* (Ibid., ibid., n° 473, p. 64.)

Petit appareil propre à être placé dans les lanternes de projection ordinaires, et projetant sur un écran les effets agrandis.

Reynaud. *Le Praxinoscope à projection.* (Ibid., ibid., n° 492, p. 337.)

Modification du Praxinoscope. (Voir, dans le 2me supplément, l'article 1878 Reynaud.)

Charpentier. *Sur la durée de la perception lumineuse dans la vision directe et dans la vision indirecte.* (Comptes rendus, t. XCV, p. 96.)

Mesure du temps qui s'écoule entre l'instant de l'apparition d'une lumière devant l'œil, et celui de la perception de cette lumière. Pour l'auteur et la lumière du jour, ce temps est, en moyenne, dans la vision directe, de 0″,13; il est plus considérable dans la vision indirecte. Etc.

Sur la visibilité des points lumineux. (Ibid., ibid., p. 148.)

Influence du diamètre des points lumineux, de leur distance à l'œil, de leur éclairement.

Nouvelles recherches sur la sensibilité de la rétine. (Archives d'Ophthalmologie, mai et juin.)

La quantité minima de lumière nécessaire pour distinguer l'un de l'autre deux points lumineux voisins est indépendante de leur écartement, et cet éclairement est en raison inverse de leur surface. — Photométrie physiologique. — Etc.

Recherches sur la distinction des points lumineux. (Ibid., juillet-août.)

Nouvelles vérifications de la loi établie dans le travail précédent; seulement l'écartement des points lumineux ne doit pas dépasser, dans l'œil, la largeur de la *fovea centralis.* L'éclairement minimum est indépendant du nombre des points lumineux.

Digitized by Google

1882. CHARPENTIER. *Étude de l'influence de la coloration sur la visibilité des points lumineux.* (Archives d'Ophthalmologie, novembre et décembre.)

La loi en question est indépendante de la coloration des points.

Note complémentaire relative à l'influence de la surface sur la sensibilité lumineuse. (Archives d'Ophthalmologie, novembre et décembre.)

Les variations du diamètre de la pupille sont sans influence sur la loi.

Description d'un Photoptomètre différentiel, Paris.

Appareil propre à étudier une série de questions, telle que la plus petite différence perceptible d'intensité entre deux espaces lumineux contigus.

ROSENSTIEHL. *De l'emploi des disques tournants pour l'étude des sensations colorées. Intensité relative des couleurs.* Extrait. (Comptes rendus, t. XCIV, p. 1411.)

De la sensation du blanc et des couleurs complémentaires. (Ibid., t. XCV, p. 1275.)

Propriétés de la lumière blanche obtenue par l'union de deux couleurs simples complémentaires ou d'un plus grand nombre de couleurs simples.

De l'intensité relative des couleurs. (Séances de la Soc. française de physique, avril-juillet, p. 103.)

Emploi des disques tournants à secteurs colorés pour déterminer l'intensité de coloration d'une couleur matérielle donnée, etc.

Recherches sur les lois de la vision des couleurs. Trois conférences (Bullet. de la Société industrielle de Rouen, mars-avril.)

Développements étendus.

F. GALTON. *A rapid-view instrument for momentary attitudes.* (Journ anglais Nature, t. XXVI, p. 249.)

Instrument au moyen duquel l'œil reçoit directement une impression instantanée, ou plusieurs impressions instantanées successives séparées par de courts intervalles, et distingue ainsi les diverses phases d'un mouvement rapide.

LORD RAYLEIGH. *Further observations upon liquid jets.* (Proceed. de la Société royale de Londres, t. XXXIV, p. 130.)

Étude détaillée de l'action des sons sur une veine liquide lancée horizontalement, etc. Emploi du disque percé tournant.

Digitized by Google

1882. Bowditch et Hall. *Optical illusions of motion* (The Journal of Physiology de Foster, t. III, p. 297.)

Études des illusions décrites par Silvanus Thompson. (Voir l'article 1877 Silvanus Thompson, dans le 2me supplément.)

Worthington. *On impact with a liquid surface.* (Proceed. de la Soc. royale de Londres, t. XXXIII, p. 347 et t. XXXIV, p. 217.)

Éclairement instantané par l'étincelle électrique.

Chodin. *Ueber die Abhängigkeit der Farbenempfindung von der Lichtstärke.* (Collection de Preyer des Mémoires de physiol., 1re série, 7me livr.; cité sans date par Albert dans l'article ci-après.)

Lorsque l'éclairement diminue, ce ne sont pas le bleu et le violet, mais le jaune, l'orangé et le vert qui prédominent.

Albert. *Ueber die Aenderung des Farbentones von Spectralfarben und Pigmenten bei abnehmender Lichtstärke.* (Ann. de Wiedemann, t. XVI, p. 129.

Objections contre les conclusions de Chodin.

Schelske. *Versuche über Farbenmischungen.* (Ibid., ibid., p. 349.)

Recherche, au moyen de l'appareil de Helmholtz à prisme et à collimateurs, des couples de couleurs spectrales qui donnent du blanc par leur mélange, et des couples qui donnent une couleur spectrale déterminée.

Boas. *Ein Beweis des Talbot'schen Satzes und Bemerkungen zu einigen aus demselben gezogenen Folgerungen.* (Ibid., ibid., p. 359.)

Démonstration mathématique de la loi (voir le second des articles 1834 Talbot, dans la Bibliographie simple qui suit la 1re section analytique). Objections contre les résultats énoncés par Fick.

DEUXIÈME SECTION.

Couleurs accidentelles ordinaires de succession.

1860. Rogers. *Some experiments and inferences in regard to binocular vision.* (Proceedings of the American Assoc., p. 187.)

Vision stéréoscopique d'images accidentelles.

Digitized by Google

1875. Kleiner. Expériences d'optique physiologique. (Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellsch. in Zürich, t. XX, pp. 474 et 488.)

A cause de la relation avec le principe de la réaction de l'organe.

Mouvements relatifs apparents opposés à des mouvements relatifs réels qu'on a contemplés. Ces mouvements apparents sont dus à une véritable sensation. — Expérience curieuse de couleurs accidentelles.

1880. J. Plateau. *Une application des images accidentelles.* (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 2me série, t. XLIX, p. 316.)

Évaluation approchée de la distance à laquelle on rapporte la lune.

Macé de Lépinay et Nicati. *De la distribution de la lumière dans le spectre solaire.* [Spectre des daltoniens]. (Comptes rendus, t. XCI, p. 1078).

Objection contre la théorie de Hering.

Le conte. *On some phenomena of binocular vision.* (Journ. de Silliman, 3me série, t. XX, p. 83.)

Emploi des images accidentelles pour constater la rotation des yeux autour de leurs axes optiques, lors de certains mouvements de leur ensemble.

Thompson (Silvanus). *Optical illusions of motion.* (Journ. Brain, octobre.)

A cause de la relation avec le principe de la réaction de l'organe. L'auteur décrit comme nouvelles, des expériences connues. Les mouvements apparents opposés qui succèdent à la contemplation des mouvements réels, sont dus à ce que la rétine perd peu à peu la conscience du mouvement réel, de sorte qu'un objet en repos lui paraît ensuite, par contraste, animé d'un mouvement contraire.

Zehfuss. *Ueber Bewegungsnachbilder.* (Ann. de Wiedemann, t. IX, p. 672.)

A cause encore de la relation avec le principe de la réaction de l'organe. Le mouvement apparent opposé qu'on observe après la contemplation d'un mouvement réel, est un phénomène physiologique, et non psychique, il se produit dans la rétine même.

Peschel. *Experimentelle Untersuchungen über die Adaptation der Netzhaut für Farben.* (Archiv. de Pflüger, t. XXI, p. 405.)

Objections contre les théories de Young-Helmholtz et de Hering.

1881. J. Plateau. *Une application des images accidentelles*, deuxième Note. (Bullet. de l'Acad. de Belgique, 3me série, t. II, p. 281.)

Évaluation approchée de la distance à laquelle on rapporte la voûte céleste à une assez grande hauteur au-dessus de l'horizon.

Gillet de Grandmont. *Sur un procédé expérimental pour la détermination de la*

Digitized by Google

1881. *sensibilité de la rétine aux impressions lumineuses colorées.* (Comptes rendus, t. XCII, p. 1189.)

Un effet curieux de couleurs accidentelles ; le Chromatroposcope, instrument destiné à le montrer.

EMMERT. *Grössenverhältnisse der Nachbilder.* (Klin. Monatsblatt für Augenheilkunde, t. XIX, p. 443.)

Paraît ne contenir que l'estimation connue de la grandeur d'une image accidentelle d'après la distance à laquelle on la projette.

ZEHENDER. Remarque à la suite du Mémoire ci-dessus.

L'œil normal à l'état de repos n'est adapté que pour une distance de quelques pieds ; en effet, l'image accidentelle paraît moindre que l'objet, quand celui-ci est à plus de 2 mètres de distance, et plus grande, au contraire, quand la distance est plus petite que 2 mètres.

TSCHERMAK. *Zur Physiologie des Gesichtsorgans. Das Plateau-Oppel'sche Phänomen und sein Platz in der Reihe gleichartiger Erscheinungen.* (Archiv. für Augenheilkunde, t. XI, p. 241.)

A cause de la relation avec le principe de la réaction de l'organe. Théorie particulière des mouvements apparents opposés qui succèdent à la contemplation des mouvements réels.

DREHER. *Neue subjektive Farbenwahrnehmungen auf Grund von Kontrastwirkung.* (Journ. Die Natur, nouvelle série, 7me année, p. 371.)

Dans certaines conditions un papier enduit de la matière qui donne, dans l'obscurité, après insolation, une lumière phosphorescente verte, montre d'abord une lumière verte peu durable, puis une lumière pourpre très éclatante.

URBANTSCHITSCH. *Zur Lehre von der Schallempfindung.* (Archiv. de Pflüger, t. XXIV, p. 574.)

Expériences curieuses sur la diminution de la sensibilité de l'oreille par l'action prolongée d'un son intense.

1882. CHEVREUL. *Mémoire sur la vision des couleurs matérielles en mouvement de rotation, et sur les vitesses respectives évaluées en chiffres, de cercles dont une moitié diamétrale est colorée et l'autre moitié est blanche; vitesses correspondant à trois périodes de leur mouvement à partir de l'extrême vitesse jusqu'au repos.* Extrait. (Comptes rendus, t. XCV, p. 1086.)

Le titre indique suffisamment la nature du contenu.

HANNAY. *Colour perception.* (Journ. anglais Nature, t. XXV, p. 604.)

Teinte complémentaire observée sur un objet peu lumineux qu'on fait mouvoir rapidement dans une chambre qui ne reçoit la lumière du jour qu'à travers des verres d'une couleur déterminée.

Digitized by Google

1882. Le conte Stevens. *Notes on Physiological Optics.* (Philos. magaz., 5me série, t. XIV, p. 312; voir p. 315.)

Images accidentelles stéréoscopiques.

Bowditch et Hall. *Optical illusions of Motion.* (Journ. of Physiology de Foster, t. III, p. 297.)

Observations curieuses sur les mouvements apparents qui succèdent à la contemplation de mouvements réels. A cause de la relation avec le principe de la réaction de l'organe.

V. Fleischl. *Physiologisch-optische Notizen,* 2me communication. (Bullet. de l'Acad. de Vienne, t. LXXXVI, 3me partie, p. 8 ; voir le § VI de la Note.)

Observation analogue à celles de Bowditch et Hall (voir l'article précédent).

V. Kries. *Die Gesichtsempfindungen und ihre Analyse.* (Archiv. für Physiologie de Du Bois Reymond, vol. supplémentaire.)

Discussion sur la fatigue de la rétine.

P. 126 : Si l'on se donne une image accidentelle prononcée par la contemplation d'un petit objet blanc sur fond noir, et si l'on promène rapidement le regard sur ce fond, l'image disparaît.

TROISIÈME SECTION.

Images qui succèdent à la contemplation d'objets d'un grand éclat ou même d'objets blancs bien éclairés.

1877. Rood. *Observations on a property of the retina first noticed by Tait.* (Journ. de Silliman, t. XIII, p. 32.)

L'auteur, après une exposition prolongée à la vive lumière du jour à l'extérieur, voit les objets blancs teintés d'une couleur rouge tirant sur le pourpre, ceux d'un vert intense d'une nuance grise, et les verts prononcés très réduits en intensité, et s'il entre dans une chambre obscure, elle lui paraît remplie pendant plusieurs secondes d'un brouillard verdâtre.

1880. Seguin. *Sur les images accidentelles des objets blancs.* (Ann. de Chim. et de Phys. de Paris, t. XIX, p. 450.)

Nouvelle étude du phénomène.

1881. F. Smith. *Apparent decomposition of sunlight by intermittent reflecting surfaces.* (Journ. anglais Nature, t. XXIV, p. 141.)

Roue tournant rapidement au soleil et portant des rais qui réfléchissent la lumière de cet astre ; la couleur perçue par celui qui l'observe varie avec la rapidité de la rotation.

Digitized by Google

1882. Macé de Lépinay et Nicati. *Sur un phénomène d'optique physiologique.* (Journ. de physique de D'Alméida, 2me série, t. I, p. 86.)

Apparence verte prononcée des lumières artificielles le soir, après un séjour prolongé, dans la journée, au milieu de champs de neige en plein soleil. C'est que la fatigue de la rétine pour le rouge persiste beaucoup plus longtemps que pour les autres couleurs; expérience de vérification.

Gaure. (Journal La Nature, 10me année, n° 470 [boîte aux lettres].)

Après avoir observé, pendant une heure et demie, l'éclipse de soleil du 17 mai, à l'aide d'une lunette dont le verre noir était trop peu fumé, l'auteur a vu, le soir, les flammes de gaz teintes de vert, puis le lendemain teintées de bleuâtre, et le surlendemain de violacé; mêmes effets depuis cette époque.

Hannay. *Colour perception.* (Journ. anglais Nature, t. XXV, p. 604.)

Couleurs qui se manifestent sur un disque blanc présentant des dessins noirs, et tournant avec une vitesse modérée.

Napier Smith. *Colour perception.* (Ibid., t. XXVI, p. 30.)

Objections contre l'explication donnée par Hannay dans l'article ci-dessus.

Swan. *Perception of colour.* (Ibid., ibid., p. 246.)

Après une exposition de deux ou trois minutes à une forte lumière, telle que celle d'un papier blanc éclairé par le soleil, la sensibilité des yeux de l'auteur pour des couleurs placées dans une lumière faible se trouve modifiée; elle est presque annulée pour le rouge. Si le rouge est exposé au soleil, la sensibilité pour cette couleur est, au contraire, exaltée.

QUATRIÈME SECTION.

Irradiation.

1828. J. South. *On the occultation of δ Piscium by the Moon, observed in Blackman-Street, etc.; references to recorded observations of occultations, in which peculiarities have been apparently seen, either at the Moon's Limb or upon her disk;* etc. (Mem. of the Astronomical Society of London, t. III, 1829, p. 303.)

Historique des occultations avec projection sur le disque lunaire. L'auteur combat l'hypothèse qui attribue le phénomène à l'irradiatiou.

1881. André et Angot. *Origine du ligament noir dans les passages de Vénus et de Mer-*

1881. *cure et moyen de l'éviter*. (Ann. scientifiques de l'École normale supérieure, 2me série, t. X, p. 323.)

Le ligament noir n'est pas dû à l'irradiation, c'est un phénomène de diffraction; expériences nombreuses.

1882. Leroy. *Vision centrale, irradiation et acuité visuelle*. (Archives d'Ophthalmologie, janvier, février, et juillet-août.)

L'irradiation est due à ce que l'image d'un point sur la rétine n'est pas un point, mais un petit cercle.

Kuhnt. *Ueber farbige Lichtinduction*. (Graefe's Archiv. fur Ophthalmologie, t. XXVII, p. 1.)

Dans ce que Hering appelle induction lumineuse simultanée et induction lumineuse successive, chaque couleur induit simplement sur le fond noir sa propre teinte, laquelle est d'autant plus vive que la contemplation est plus prolongée.

CINQUIÈME SECTION.

Phénomènes ordinaires de contraste.

1797. Goethe. *Schweizerreise im Jahre 1797*. (OEuvres posthumes de Goethe, Stuttgart et Tubingue, 1883, t. III, p. 150.)

Phénomène de contraste observé sur une chute d'eau.

1881. Giraud Teulon. *La vision et ses anomalies. Cours théorique et pratique sur la physiologie et les affections fonctionnelles de l'appareil de la vue*. Paris.

Le contraste simultané entre un espace coloré et un espace blanc est dû à ce que les milieux de l'œil rendus fluorescents par la couleur inductrice, absorbent dans la lumière blanche les rayons de cette même couleur.

W. J. Herschel. *Effect of green in painted Windows*. (Journ. anglais Nature, t. XXIV, p. 583.)

Observation d'un vitrail formé de pièces les unes rouges, les autres vertes, où le rouge domine. A dix pieds de distance, l'effet général est rouge; à cinquante pieds, le tout paraît nuageux et d'un léger vert d'eau.

Rood. *Théorie scientifique des couleurs et leurs applications à l'art et à l'industrie*. Traduction française, Paris.

Étude détaillée du contraste simultané; observations variées.

Digitized by Google

1881. Szilagyi. *Ueber simultancontrast.* (Centralblatt für die Med. Wiss., t. LVII, p. 849.)

Le contraste simultané se produit non dans l'œil, mais dans le cerveau; il ne repose pas sur une illusion du jugement. Expérience.

1882. Chevreul. *Mémoire sur la vision des couleurs matérielles en mouvement de rotation*, etc. [Voir l'article 1882 Chevreul, plus haut dans la 2me section.] (Comptes rendus, t. XCV, p. 1086.)

Relation entre le contraste rotatif et le contraste simultané.

Trécul. *Noir vu en rouge orangé.* (Ibid., ibid., p. 1198.)

L'auteur regardant un voile noir, fait d'un réseau à mailles assez étroites éclairé par le soleil, a vu tous les nœuds du réseau extérieurement colorés d'un rouge orangé.

Whitmell. *A natural experiment on complementary colours.* (Journal anglais Nature, t. XXVI, p. 573.)

Contraste de couleurs observé sur une cascade.

J. H. *Complementary colours.* (Ibid. t. XXVII, p. 78.)

Contraste de couleurs observé sur un cours d'eau.

Cross. *Complementary colours.* (Ibid., ibid., p. 150.)

Contraste de couleurs observé sur les ondes qui viennent se briser à la côte.

Madan. *Complementary colours at the falls of Niagara.* (Ibid., ibid., p. 174.)

Le titre suffit.

V. Kries. *Die Gesichtsempfindungen und ihre Analyse.* (Archiv. für Physiologie de Du Bois Reymond, vol. supplémentaire; voir p. 122.)

Discussion sur les phénomènes de contraste.

SIXIÈME SECTION.

Ombres colorées.

1882. Cross. *Complementary colours.* (Journ. anglais Nature, t. XXVII, p. 150.)

Ombres pourpres des nuages sur l'océan. L'auteur mentionne simplement le fait, sans indiquer dans quelles conditions il se montre.

Digitized by Google

NOTA.

Les articles suivants, que je n'ai pas eus à ma disposition, semblent, d'après leurs titres, devoir trouver place dans ce troisième supplément; je les indique à tout hasard.

1879. Cohn. *New investigations on the furthest limits of colour perception by direct sun light and by electric light.* (Brit. Med. Journ. [octobre], p. 531.)

1880. Ott et Prendergast. *The rapidity of perception of colored Lights.* (Journ. of new en mental diseases, nouv. série, t. V, p. 258.)

Hoppe. *Die Scheinbare Bewegung des Ufers in einer dem Wasser entgegengesetzten Richtung beim stehen em flissenden oder doch bewegten Wasser.* (Memorabilien, t. XXV, 3me série, p. 108.)

1881. Cobbold. *Observations on certain optical illusion of motion.* (Brain, IV, p. 75.)

Digitized by Google

SUR UN POINT

DE

LA THÉORIE DES SÉRIES DE FOURIER;

PAR

M. P. MANSION,

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 février 1883.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR UN POINT

DE

LA THÉORIE DES SÉRIES DE FOURIER.

§ I. Préliminaires.

1. *Objet de la présente Note.* Depuis que M. Weierstrass a introduit explicitement, en analyse, la notion d'*égale convergence* (*) des séries dont les termes sont des fonctions d'une variable x, les géomètres ont dû soumettre à une revision attentive les principes fondamentaux de la théorie des séries trigonométriques, tels qu'ils avaient été exposés par Fourier, Poisson, Cauchy, Dirichlet, Riemann, etc.

MM. Lipschitz, P. du Bois-Reymond, Heine, G. Cantor, Harnack, Dini, Ascoli, Jordan, etc., ont élucidé la plupart des points difficiles signalés dans les travaux antérieurs, et ont, en outre, traité maintes questions nouvelles, plus générales que celles dont leurs devanciers s'étaient occupés.

Néanmoins, parmi les formules anciennement admises comme démontrées, il en est une sur laquelle les géomètres cités plus haut n'ont pas, croyons-nous, porté leur attention.

(*) En allemand *gleichmässige Convergenz*. Dans son *Cours d'analyse*, t. I, p. 116, M. Jordan se sert de l'expression un peu différente *convergence uniforme*, pour traduire ce terme allemand. Sur la convergence égale ou uniforme des séries, voir le § V du *Mémoire sur les fonctions discontinues* de M. Darboux, dans le t. IV de la 2e série des *Annales de l'École normale supérieure* (février et mars 1875), pp. 77 et suivantes.

Digitized by Google

Dirichlet, on le sait, a établi, d'une manière simple et rigoureuse, que la série

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

dans laquelle

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} ft \cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} ft \sin nt\, dt, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

a pour somme

$$\frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right], \quad . \ . \ . \quad (3)$$

selon que x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, ou égal à l'une de ces valeurs extrêmes. La fonction fx est supposée vérifier les *conditions de Dirichlet*, c'est-à-dire qu'elle est finie et n'a qu'un nombre fini de discontinuités, de maxima et de minima, entre $-\pi$ et $+\pi$.

On déduit aisément de ce premier résultat de Dirichlet la sommation de la série (1), dans le cas où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{g}^{c} ft \cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{g}^{c} ft \sin nt\, dt, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

c et g étant des limites finies quelconques. Cette somme est égale à celle d'un nombre fini d'expressions analogues à (3).

Lorsque l'on veut étendre la nouvelle formule ainsi obtenue au cas où l'on a, ensemble ou séparément, $g = -\infty$, $c = \infty$, on reconnait bientôt qu'il se présente une difficulté spéciale qui ne permet pas d'arriver immédiatement à la sommation désirée. Dans le premier cas, quand les coefficients ont la forme (2), la différence ε_n entre l'une ou l'autre des expressions (3) et la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série (1) est une quantité indéfiniment décroissante avec $\frac{1}{n}$. Quand les coefficients ont la forme (4), la différence analogue est de la forme

$$\varepsilon'_n + \varepsilon''_n + \varepsilon'''_n + \cdots + \varepsilon^{(k)}_n, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5)$$

k étant un nombre entier supérieur, au plus, de deux unités, au rapport de $(c-g)$ à 2π, et $\varepsilon'_n, \varepsilon''_n, \varepsilon'''_n, \ldots, \varepsilon^{(k)}_n$, étant encore infiniment petits en même

Digitized by Google

temps que $\frac{1}{n}$. Quand $g = -\infty$, ou $c = \infty$, ou bien, à la fois, $g = -\infty$, $c = \infty$, on a $k = \infty$; et la suite (5) est remplacée par une série dont la somme est fonction de n. Il est impossible de voir, dans ce cas, sans une discussion approfondie, si cette somme a encore pour limite 0, en même temps que $\frac{1}{n}$.

L'objet de la présente Note est de faire cette discussion, dans un cas particulier assez étendu. Nous nous servons, pour cela, de la méthode primitive de Dirichlet, sans y faire intervenir le remarquable théorème de M. P. du Bois-Reymond, si utile dans toutes les autres recherches relatives aux séries trigonométriques. Comme application, nous démontrons une belle relation de la théorie des fonctions *thêta*, qu'il n'est pas facile d'établir autrement avec une entière rigueur (*).

2. *Résultats obtenus dans cette Note.* Voici, en résumé, les deux propositions établies dans ce petit travail :

I. On a

$$\mathop{S}_{-\infty}^{\infty} f(x + n\pi) = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ft \cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ft \sin nt\, dt,$$

moyennant les conditions suivantes : 1° les coefficients a_n, b_n sont finis; 2° la fonction

$$\pi\lambda(\eta) = f(x + 2r\pi + 2\eta) + f(x + 2r\pi + 2\pi - 2\eta)$$

est positive et décroissante quand η varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, pour toute valeur de x

(*) Cette relation a été donnée, pour la première fois, explicitement par Poisson, *Mémoire sur la théorie des intégrales définies et sur la sommation des séries* (suite) (t. XII, 19e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, 1823, pp. 404-509), p. 420. Cauchy, dans l'article intitulé *Sur les fonctions réciproques* (*Exercices de Mathématiques*, t. II, 1827, pp. 141-156), p. 156, établit la même formule, en la déduisant d'une autre plus générale exposée par lui, dès 1817, dans le numéro d'août du *Bulletin de la Société philomathique*. Dès 1817 aussi, Cauchy avait prouvé la formule pour le cas particulier où $z = 0$. Les démonstrations de Poisson et de Cauchy donnent lieu à des objections analogues à celles que nous venons de faire à la démonstration habituelle par les séries de Fourier.

Digitized by Google

et de r, sauf si $x + 2rq$ a une valeur comprise entre deux limites finies g, c. Dans l'intervalle de g à c, il suffit que fx vérifie les conditions de Dirichlet; 3° les séries

$$\mathop{S}_{r=c}^{r=\infty} \lambda(\eta), \quad \mathop{S}_{r=-\infty}^{r=g} \lambda(\eta)$$

sont continues aux environs de $\eta = 0$.

II. Les conditions précédentes sont vérifiées pour la fonction $e^{-a^2 r^2}$. Par suite, on a

$$\mathop{S}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+r\pi)^2}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} \mathop{S}_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2\rho} \cos 2rz,$$

formule qui permet de ramener les fonctions *thêta* d'une variable imaginaire, aux fonctions *thêta* d'une variable réelle.

§ II. Formule générale.

3. *Première transformation de la somme cherchée.* Soit à trouver la somme de la série

$$F = \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \text{etc.},$$

dans laquelle

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} ft \cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} ft \sin nt\, dt,$$

ft étant une fonction telle que, pour toute valeur de n, a_n et b_n soient finis.

Appelons F_n la somme des $(n + 1)$ premiers termes de la série F. Nous aurons

$$F_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} ft \left[\frac{1}{2} + \cos(t - x) + \cos 2(t - x) + \cdots + \cos n(t - x)\right] dt,$$

Digitized by Google

ou encore, en faisant $t = x + 2\theta$,

$$F_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{c-x}{2}}^{\infty} f(x+2\theta)\left[1 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta + \cdots + 2\cos 2n\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{c-x}{2}}^{\infty} f(x+2\theta)\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta.$$

Posons

$$G_{m,n} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{c-x}{2}}^{m\pi} f(x+2\theta)\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta.$$

Alors

$$F_n = \lim_{m=\infty}[G_{m,n}]; \quad F = \lim_{n=\infty}\{\lim_{m=\infty}[G_{m,n}]\}.$$

Soit

$$\frac{c-x}{2} = l\pi + \frac{1}{2}\pi \pm \alpha,$$

α étant positif et inférieur ou égal à $\frac{1}{2}\pi$. On pourra décomposer, de la manière suivante, l'intégrale $G_{m,n}$:

$$G_{m,n} = u_l + u_{l+1} + u_{l+2} + \cdots + u_{m-1},$$

en supposant

$$u_l = \frac{1}{\pi}\int_{l\pi+\frac{1}{2}\pi\pm\alpha}^{(l+1)\pi} f(x+2\theta)\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta, \quad u_r = \frac{1}{\pi}\int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(x+2\theta)\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta;$$

r est successivement égal à $l+1, l+2, \ldots, m-1$.

Dans l'intégrale u_r, posons $\theta = r\pi + \eta$. Il viendra

$$u_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+2r\pi+2\eta)\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x+2r\pi+2\eta)\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\, d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} f(x+2r\pi+2\eta)\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\, d\eta.$$

Dans la dernière intégrale, faisons $\eta = \pi - \zeta$, puis remplaçons de nouveau ζ par π. Nous trouverons

$$u_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[f(x+2r\pi+2\eta) + f(x+2r\pi+2\pi-2\eta)\right]\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\, d\eta.$$

Digitized by Google

On peut transformer la valeur de u_l d'une manière analogue. On obtient ainsi

$$u_l = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi\pm x}^{\frac{1}{2}\pi} f(x+2l\pi+2\eta)\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(x+2l\pi+2\pi-2\eta)\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}d\eta.$$

Pour n infini, la première partie de u_l a pour limite zéro, d'après le théorème de Dirichlet; la seconde devient

$$\frac{1}{2}f(x+2l\pi+2\pi).$$

Si l'on fait

$$G_{m,n} = u_l + H_{m,n}, \quad H_{m,n} = u_{l+1} + u_{l+2} + \cdots + u_{m-1},$$

on aura donc

$$F = \frac{1}{2}f(x+2l\pi+2\pi) + \lim_{n=\infty}\left\{\lim_{m=\infty}[H_{m,n}]\right\}.$$

Nous allons chercher une valeur approchée de $H_{m,n}$.

Remarque. Si l'on avait

$$\frac{c-x}{2} = (l+1)\pi,$$

il viendrait simplement

$$F = \lim_{n=\infty}\left\{\lim_{m=\infty}[H_{m,n}]\right\}.$$

4. *Valeur approchée de* u_r. Soit

$$\pi\lambda(\eta) = f(x+2r\pi+2\eta) + f(x+2r\pi+2\pi-2\eta);$$

supposons que $\lambda(\eta)$ soit une fonction positive décroissante, quand η varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$. On pourra enfermer u_r entre deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure, par le procédé de Dirichlet.

On a évidemment, en employant une notation abrégée

$$u_r = \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{2\frac{\pi}{2n+1}} + \int_{2\frac{\pi}{2n+1}}^{3\frac{\pi}{2n+1}} + \cdots + \int_{(n-1)\frac{\pi}{2n+1}}^{n\frac{\pi}{2n+1}} + \int_{n\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\frac{\lambda(\eta)}{\sin\eta}\sin(2n+1)\eta\, d\eta.$$

Digitized by Google

Dans la première intégrale, sin $(2n+1)\eta$ est positif ou nul; dans la deuxième, il est négatif ou nul; dans la troisième, il est de nouveau positif ou nul, etc. Quant au facteur $\lambda(\eta)$: sin η, il n'est jamais négatif. Nous pouvons donc écrire

$$u_r = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + (1-)^n A_n,$$

les quantités $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, toutes positives, étant définies par les égalités

$$A_k = (-1)^k \int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{k\pi+\pi}{2n+1}} \lambda(\eta) \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta, \quad [k = 0, 1, 2, \ldots, n-1],$$

$$A_n = (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda(\eta) \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta.$$

Soient maintenant

$$\alpha_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta, \qquad \alpha_1 = -\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta,$$

$$\alpha_2 = \int_{\frac{2\pi}{2n+1}}^{\frac{3\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta, \ldots, \qquad \alpha_n = (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta$$

Ces quantités $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont encore positives. De plus, elles forment une suite de grandeurs décroissantes, car les facteurs $\pm \sin(2n+1)\eta$, du numérateur, passent, dans chacune de ces intégrales, la dernière exceptée, par toutes les valeurs que prend le sinus d'un angle, quand cet angle varie de 0 à π. Le dénominateur sin η, au contraire, va sans cesse en croissant. Quant à α_n, cette quantité est moindre que

$$(-1)^n \int_{\frac{n\pi}{2n+1}}^{\frac{n\pi+\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta} d\eta,$$

laquelle, d'après un raisonnement analogue au précédent, est inférieure à α_{n-1}; donc α_n est aussi inférieur à α_{n-1}.

Digitized by Google

Dans chacune des intégrales A, remplaçons successivement $\lambda(\eta)$ par ses valeurs extrêmes; savoir, celles qui correspondent aux limites de l'intégrale considérée. On trouvera ainsi, pour la première,

$$\lambda(0)\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta > \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \lambda(\eta)\frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta > \lambda\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta,$$

ou

$$\lambda(0)\alpha_0 > A_0 > \lambda\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\alpha_0.$$

De même

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\alpha_1 > A_1 > \lambda\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\alpha_1,$$

$$\lambda\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\alpha_2 > A_2 > \lambda\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\alpha_2,$$

. . . .

$$\lambda\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\alpha_n > A_n > \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)\alpha_n.$$

De ces inégalités et de celles-ci :

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots > \alpha_n,$$

on déduit

$$A_0 > A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_n.$$

Soit $2s$ un nombre pair quelconque inférieur à n. On aura

$$\begin{aligned} u_r &= \left[(A_0 - A_1) + (A_2 - A_3) + \dots + (A_{2s-2} - A_{2s-1})\right] + (A_{2s} - A_{2s+1}) + \dots + (-1)^n A_n \\ &= \left[(A_0 - A_1) + (A_2 - A_3) + \dots + (A_{2s-2} - A_{2s-1}) + A_{2s}\right] - (A_{2s+1} - A_{2s+1}) - \dots + (-1)^n A_n. \end{aligned}$$

Donc

$$u_r > A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots + A_{2s-2} - A_{2s-1},$$

$$u_r < A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots + A_{2s-2} - A_{2s-1} + A_{2s}.$$

Dans la première de ces inégalités, remplaçons chaque quantité A précédée d'un signe +, par une quantité plus petite; chaque quantité A précédée

Digitized by Google

d'un signe —, par une quantité plus grande; faisons l'inverse dans la seconde. Il viendra ainsi

$$u_r > \lambda\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\alpha_0 - \lambda\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\alpha_1 + \lambda\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\alpha_2 - \lambda\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\alpha_3 + \cdots$$
$$\cdots + \lambda\left(\frac{2s\pi-\pi}{2n+1}\right)\alpha_{2s-2} - \lambda\left(\frac{2s\pi-\pi}{2n+1}\right)\alpha_{2s-1},$$

$$u_r < \lambda(0)\alpha_0 - \lambda\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\alpha_1 + \lambda\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\alpha_2 - \lambda\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\alpha_3 + \cdots$$
$$\cdots - \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\alpha_{2s-1} + \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\alpha_{2s},$$

c'est-à-dire, en réunissant les termes deux à deux,

$$u_r > \lambda\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)(\alpha_0-\alpha_1) + \lambda\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)(\alpha_2-\alpha_3) + \cdots + \lambda\left(\frac{2s\pi-\pi}{2n+1}\right)(\alpha_{2s-2}-\alpha_{2s-1}),$$
$$u_r < \lambda(0)\alpha_0 - \left[\lambda\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)(\alpha_1-\alpha_2) + \lambda\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)(\alpha_3-\alpha_4) + \cdots + \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)(\alpha_{2s-1}-\alpha_{2s})\right].$$

On aura donc, à plus forte raison, puisque $\lambda(\eta)$ est une fonction décroissante,

$$u_r > \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)[\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2s-2} - \alpha_{2s-1}],$$
$$u_r < \lambda(0)\alpha_0 - \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)[\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \cdots + \alpha_{2s-1} - \alpha_{2s}],$$

ou encore

$$u_r < \alpha_0\left[\lambda(0) - \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\right] + \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)[\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2s-1} - \alpha_{2s}].$$

Remplaçons, dans ces inégalités, les quantités α par leurs valeurs. Nous trouverons

$$u_r > \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\int_0^{\frac{2s\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta,$$
$$u_r < \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\int_0^{\frac{2s\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta + w_r,$$

Digitized by Google

si l'on fait

$$w_r = \left[\lambda(0) - \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\right]\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta + \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\int_{\frac{2s\pi}{2n+1}}^{\frac{(2s+1)\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta$$

Pour abréger, nous écrirons encore

$$v_r = \lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\int_0^{\frac{2s\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta.$$

Alors les deux dernières inégalités deviennent

$$v_r < u_r < v_r + w_r.$$

5. *Limite de* $v_{l+1} + v_{l+2} + \cdots + v_{m-1} = I_{m,n}$. Prenons pour $2s$ le plus grand entier pair compris dans la racine carrée de $2n+1$, de sorte que, pour $n = \infty$, on ait $2s = \infty$; et, en même temps,

$$\lim \frac{2s}{2n+1} = 0.$$

On sait que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{2s\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)\eta}{\sin\eta}\,d\eta$$

a pour limite $\frac{1}{2}\pi$ lorsque n croît indéfiniment. Nous la représenterons par $(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon)$, ε ayant pour limite 0 en même temps que n^{-1}.

On aura

$$v_r = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\left[f\left(x + 2r\pi + \frac{4s\pi}{2n+1}\right) + f\left(x + 2r\pi + 2\pi - \frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Par conséquent, si

$$I_{m,n} = v_{l+1} + v_{l+2} + \cdots + v_{m-1},$$

on a

$$I_{m,n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi}\right)\mathop{\mathrm{S}}_{r=l+1}^{r=m-1}\left[f\left(x + 2r\pi + \frac{4s\pi}{2n+1}\right) + f\left(x + 2r\pi + 2\pi - \frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Digitized by Google

Pour $m=\infty$, cette expression deviendra

$$\mathrm{I}_{\infty,n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty}\left[f\left(x+2r\pi+\frac{4s\pi}{2n+1}\right)+f\left(x+2r\pi+2\pi-\frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Supposons la fonction

$$\chi(t)=\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty} f(x+2r\pi+t)+f(x+2r\pi+2\pi-t)$$

continue, aux environs de $t=0$. En faisant $n=\infty$, et nous souvenant de l'hypothèse faite sur s, nous trouverons

$$\mathrm{I}_{\infty,\infty}=\frac{1}{2}\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty}\left[f(x+2r\pi)+f(x+2r\pi+2\pi)\right]=\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty} f(x+2r\pi)-\frac{1}{2}f(x+2l\pi+2\pi).$$

6. *Limite de* $\mathrm{J}_{m,n}=\mathrm{w}_{l+1}+\mathrm{w}_{l+2}+\cdots+\mathrm{w}_{m-1}$. On a

$$w_r=\alpha_0\left[\lambda(0)-\lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)+\alpha_{2s}\lambda\left(\frac{2s\pi}{2n+1}\right)\right],$$

ou explicitement :

$$\begin{aligned} w_r &= \alpha_0\left[f(x+2r\pi)+f(x+2r\pi+2\pi)\right] \\ &-\alpha_0\left[f\left(x+2r\pi+\frac{4s\pi}{2n+1}\right)+f\left(x+2r\pi+2\pi-\frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right] \\ &+\alpha_{2s}\left[f\left(x+2r\pi+\frac{4s\pi}{2n+1}\right)+f\left(x+2r\pi+2\pi-\frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, si

$$\mathrm{J}_{m,n}=w_{l+1}+w_{l+2}+\cdots+w_{m-1},$$

on a, pour $m=\infty$,

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{\infty,n} &= \alpha_0\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty}\left[f(x+2r\pi)+f(x+2r\pi+2\pi)\right] \\ &-\alpha_0\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty}\left[f\left(x+2r\pi+\frac{4s\pi}{2n+1}\right)+f\left(x+2r\pi+2\pi-\frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right] \\ &+\alpha_{2s}\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty}\left[f\left(x+2r\pi+\frac{4s\pi}{2n+1}\right)+f\left(x+2r\pi+2\pi-\frac{4s\pi}{2n+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

On sait que, pour $n=\infty$, $\lim \alpha_0 = \frac{1}{2}\pi$, $\lim \alpha_{2s} = 0$; d'ailleurs, d'après l'hypothèse faite sur la continuité de la fonction $\chi(t)$, la seconde série du second membre de $J_{\infty,n}$ a pour limite la première pour $n=\infty$, puisque $\frac{s}{2n+1}$ a zéro pour limite. Donc enfin

$$J_{\infty,\infty} = 0.$$

7. *Valeur de* F. D'après ce qui précède,

$$I_{m,n} < H_m < I_{m,n} + J_{m,n}.$$

En passant à la limite, pour m d'abord et pour n ensuite, il vient

$$\lim_{n=\infty} \{\lim_{m=\infty} [H_m]\} = I_{\infty,\infty} = \mathop{S}_{l+1}^{\infty} f(x+2r\pi) - \frac{1}{2} f(x+2l\pi+2\pi).$$

Ajoutant de part et d'autre

$$\frac{1}{2} f(x+2l\pi+2\pi),$$

nous trouvons

$$F = \mathop{S}_{l+1}^{\infty} f(x+2r\pi) \quad \text{. . . . . (A)}$$

ce qui est la formule cherchée.

Remarque. Si

$$\frac{c-x}{2}(l+1)\pi,$$

on a (n° 1, remarque finale)

$$F = I_{\infty,\infty} = \mathop{S}_{l+1}^{\infty} f(x+2r\pi) - \frac{1}{2} f(x+2l\pi+2\pi) \quad \text{. . . . . . (A')}$$

8. *Formules analogues à* (A) *et* (A′) *dans le cas où les limites sont* $-\infty$ *et* g, *ou* $-\infty$ *et* $+\infty$. Il semble difficile d'étendre les formules (A) et (A′) au cas où la fonction $\lambda(\eta)$ vérifie simplement les conditions de Dirichlet. Mais on peut démontrer qu'elle subsiste encore si les limites sont $-\infty$ et g,

Digitized by Google

ou $-\infty$ et $+\infty$, moyennant les conditions indiquées au courant de la démonstration précédente.

Si les limites des intégrales a_n, b_n sont $-\infty$ et g, on trouve

$$F = \lim_{n=\infty} \left\{ \lim_{m=\infty} [G'_{m,n}] \right\}$$

$$G'_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-m\pi}^{\frac{g-x}{2}} f(x+2\theta) \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta,$$

$$G'_{m,n} = u_{-m} + u_{-m+1} + \cdots + u_{l-1} + u'_l;$$

où

$$u_r = \frac{1}{\pi} \int_{r\pi}^{r\pi+\pi} f(x+2\theta) \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta, \quad u'_{l-1} = \int_{l\pi}^{l\pi+\frac{1}{2}\pi\pm\alpha} f(x+2\theta) \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta,$$

$$\frac{g-x}{2} = l\pi + \frac{1}{2}\pi \pm \alpha, \quad \alpha \leqq \frac{1}{2}\pi.$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, il vient

$$F = \mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{l} f(x+2r\pi) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(B)}$$

si α est inférieur à $\frac{1}{2}\pi$; et si $g - x = (2l+1)\pi$,

$$F = \mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{l} f(x+2r\pi) + \frac{1}{2} f(x+2l\pi+\pi). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \text{(B')}$$

En ajoutant ce résultat à celui qui a été obtenu à la fin du n° 7, dans l'hypothèse où $g=c$, et posant maintenant

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ft \cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ft \sin nt\, dt,$$

on a enfin

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \text{etc.} = \mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{+\infty} f(x+2r\pi) \quad . \ . \quad \text{(C)}$$

Digitized by Google

Mais cette dernière formule subsiste même s'il y a un intervalle de g à c, par exemple, où la fonction $\lambda(\eta)$ ne vérifie pas les conditions dont il est parlé aux n[os] 4, 5, mais où fx vérifie seulement les conditions de Dirichlet. En effet, la formule (C) s'obtient, dans ce cas, en ajoutant les formules (A) et (B), ou (A) et (B′), ou (A′) et (B), ou enfin (A′) et (B′) à la formule de Dirichlet dans le cas où les coefficients a_n, b_n sont de la forme

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_g^c ft \cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_g^c ft \sin nt\,dt.$$

La formule (C) est donc vraie pourvu que les conditions indiquées plus haut pour $\lambda(\eta)$ subsistent de $-\infty$ à g et de c à $+\infty$, et que les conditions de Dirichlet subsistent de g à c.

§ III. Application à la fonction $e^{-a^2x^2}$.

9. *Premier lemme préliminaire.* Soit $fx = e^{-a^2x^2}$. Dans ce cas,

$$\pi\lambda(\eta) = e^{-a^2(x+2r\pi+2\eta)^2} + e^{-a^2(x+2r\pi+2\pi-2\eta)^2},$$

ou

$$\pi\lambda(\eta) = e^{-a^2(X-t)^2} + e^{-a^2(X+t)^2},$$

si l'on pose

$$x + 2r\pi + \pi = X, \quad 2\eta = \pi - t.$$

Voyons si, en général, $\lambda(\eta)$ est décroissante quand η varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, ou si cette fonction est croissante quand t varie de 0 à π. On a

$$e^{-a^2(X-t)^2} + e^{-a^2(X+t)^2} = 2e^{-a^2X^2}\, e^{-a^2t^2}\, \mathrm{Ch}\, 2a^2Xt,$$

expression dont la dérivée est, par rapport à t,

$$4a^2e^{-a^2X^2}\, e^{-a^2t^2}\,[X\, \mathrm{Sh}\, 2a^2Xt - t\, \mathrm{Ch}\, 2a^2Xt].$$

Digitized by Google

On peut supposer X positif, puisque $\pi\lambda(\eta)$ ne change pas quand on remplace X par — X. Soient

$$X = \rho\,\mathrm{Ch}\alpha, \quad t = \rho\,\mathrm{Sh}\alpha,$$

ce qui donne

$$X^2 - t^2 = \rho^2, \quad 2a^2Xt = a^2\rho^2\,\mathrm{Sh}2\alpha, \quad X\,\mathrm{Sh}2a^2Xt - t\,\mathrm{Ch}2a^2Xt = \rho\,\mathrm{Sh}(2a^2Xt - \alpha).$$

Supposons r assez grand pour que l'on ait

$$X^2 \geqq \frac{1}{a^2} + \pi^2,$$

et, par suite,

$$X^2 - t^2 \geqq \frac{1}{a^2} + \pi^2 - t^2 \overline{\gtrless} \frac{1}{a^2}.$$

Il viendra

$$a^2\rho^2 \geqq 1, \quad 2a^2Xt \geqq \mathrm{Sh}2\alpha > 2\alpha, \quad \mathrm{Sh}(2a^2Xt - \alpha) > 0.$$

La dérivée de la fonction $\lambda(\eta)$, par rapport à t, est donc positive, si X^2 égale ou surpasse $\frac{1}{a^2} + \pi^2$; autrement dit, dans ces conditions $\lambda(\eta)$ décroît lorsque η varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$.

En général, la fonction $e^{-a^2x^2}$ vérifie donc l'une des conditions supposées au § II, pour l'existence du théorème qui y est démontré. Il est facile de voir qu'il y a réellement des valeurs de x et de r pour lesquelles le contraire arrive, telles, par conséquent, que $\lambda(\eta)$ croît avec η ou décroît avec t. Cela arrive notamment pour $X = 0$, puisque alors

$$\pi\lambda(\eta) = 2e^{-a^2t^2}.$$

Mais cette circonstance n'a aucune influence sur la démonstration du théorème que nous avons en vue, comme nous l'avons remarqué à la fin du n° 8.

10. *Second lemme préliminaire.* I. *La série*

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty} e^{-a^2(x+2r\pi+t)^2}$$

est également convergente pour toute valeur de x + t *entre deux limites données.* En effet, posons

$$x + 2k\pi + t = u,$$

Digitized by Google

k étant pris assez grand pour que au soit supérieur à l'unité lorsque $x+t$ varie entre les limites données. On aura

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k}^{\infty} e^{-a^2(x+2\nu\pi+t)^2} = e^{-a^2u^2} + e^{-a^2(u+2\pi)^2} + \cdots + e^{-a^2(u+2n\pi-2\pi)^2} + \mathrm{R}_n$$

$$\mathrm{R}_n = e^{-a^2(u+2n\pi)^2} + e^{-a^2(u+2n\pi+2\pi)^2} + e^{-a^2(u+2n\pi+4\pi)^2} + \cdots;$$

puis, successivement,

$$\mathrm{R}_n < e^{-a(u+2n\pi)} + e^{-a(u+2n\pi+2\pi)} + e^{-a(u+2n\pi+4\pi)} + \cdots,$$

$$\mathrm{R}_n < e^{-2na\pi} + e^{-2na\pi-2a\pi} + e^{-2na\pi-4a\pi} + \cdots,$$

$$\mathrm{R}_n < e^{-2na\pi}\frac{e^{2a\pi}}{e^{2a\pi}-1},$$

quantité aussi petite que l'on veut pour n suffisamment grand, quel que soit u ou $x+t$.

II. *La série*

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty} e^{-a^2(x+2\nu\pi+2\pi-t)^2}$$

est également convergente pour toute valeur de x — t *entre deux limites données.*

Même démonstration.

III. *La série également convergente*

$$\mathop{\mathrm{S}}_{l+1}^{\infty} \left[e^{-a^2(x+2\nu\pi+t)^2} + e^{-a^2(x+2\nu\pi+2\pi-t)^2}\right],$$

dont tous les termes sont des fonctions continues de t, *est une fonction continue de* t (*).

(*) D'après un théorème général. Voir Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues* (Annales de l'École normale, 2e série, 1875, t. IV), p. 78.

Digitized by Google

IV. *La série*

$$\mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{t} \left[e^{-a^2(x+2r\pi+t)^2} + e^{-a^2(x+2r\pi+2\pi-t)^2}\right]$$

est aussi une fonction continue de t.

En effet, on peut la remplacer par celle-ci :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{-t}^{\infty} \left[e^{-a^2(-x+2r\pi-2\pi+t)^2} + e^{-a^2(-x+2r\pi-t)^2}\right],$$

qui ne diffère pas essentiellement de la précédente.

De ces diverses propositions résulte le second lemme préliminaire : *La fonction* $\chi(t)$ *considérée au n°* 5 *et les fonctions analogues considérées au n°* 8 *sont continues, si* $fx = e^{-a^2x^2}$.

11. *Formule de Cauchy et de Poisson.* On trouve, en appliquant à la fonction $e^{-a^2x^2}$ les formules générales qui donnent a_n, b_n, quand les limites sont infinies,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,a},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2}\cos nt\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,a}\,e^{-\frac{n^2}{4a^2}},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2}\sin nt\,dt = 0.$$

Par suite,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2(x+2r\pi)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,a}\left(\frac{1}{2} + \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\cos rx\right).$$

Posons $x = 2z$, $4a^2 = \frac{1}{\rho}$, cette relation prend la forme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+r\pi)^2}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\left(1 + 2\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\infty} e^{-r^2\rho}\cos 2rz\right),$$

ou encore

$$\mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+r\pi)^2}{\rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi}}\mathop{\mathrm{S}}_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2\rho}\cos 2rz,$$

ce qui est la formule cherchée.

NOTE.

Les inégalités relatives aux quantités A, α, λ du n° 4 peuvent s'établir d'une manière générale, comme M. Catalan nous l'a fait remarquer, et elles conduisent au théorème suivant sur les suites finies ou infinies.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, *etc., des quantités positives décroissantes,* A_0, A_1, A_2, A_3, *etc., et* $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, *etc., d'autres quantités positives telles que*

$$\lambda_0 > \frac{A_0}{\alpha_0} > \lambda_1 > \frac{A_1}{\alpha_1} > \lambda_2 > \frac{A_2}{\alpha_2} > \lambda_3, \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si l'on fait

$$S = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + (-1)^n A_n,$$
$$S = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n,$$

on aura

$$\lambda_n s < S < (\lambda_0 - \lambda_n)\alpha_0 + \lambda_n s.$$

En effet : 1° Des inégalités (1) on déduit

$$A_0 > \lambda_1\alpha_0, \quad -A_1 > -\lambda_1\alpha_1, \quad A_2 > \lambda_3\alpha_2, \quad -A_3 > -\lambda_3\alpha_3, \text{ etc.},$$

puis, par addition,

$$S > \lambda_1(\alpha_0 - \alpha_1) + \lambda_3(\alpha_2 - \alpha_3) + \text{etc.}$$

Dans le second membre, tous les termes sont positifs; donc, à plus forte raison,

$$S > \lambda_n[\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \text{etc.}],$$

u

$$S > \lambda_n s.$$

2° Les inégalités (1) donnent encore

$$A_0 < \lambda_0\alpha_0, \quad -A_1 < -\lambda_2\alpha_1, \quad A_2 < \lambda_2\alpha_2, \quad -A_3 < -\lambda_4\alpha_4, \text{ etc.},$$

puis, en ajoutant,

$$S < \lambda_0\alpha_0 - \lambda_2(\alpha_1 - \alpha_2) - \lambda_4(\alpha_3 - \alpha_4) - \text{etc.}$$

Dans le second membre, le premier terme seul est positif; de plus

$$\lambda_n[\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \text{etc.}] < \lambda_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda_4(\alpha_3 - \alpha_4) + \text{etc.}$$

Donc

$$S < \lambda_0\alpha_0 - \lambda_n[\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \text{etc.}],$$

ou enfin,

$$S < (\lambda_0 - \lambda_n)\alpha_0 + \lambda_n s.$$

La démonstration subsiste évidemment si n est infini et si S et s sont des séries convergentes.

Digitized by Google

NOTES

SUR

LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

ET

SUR CERTAINES SÉRIES;

PAR

E. CATALAN,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 juin 1883.)

Digitized by Google

NOTES

SUR

LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

ET

SUR CERTAINES SÉRIES.

I Théorème de Kramp.

1. LEMME. *Soit une fraction continue*

$$x = a,\ b,\ c,\ \ldots,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \ldots,$$

dont les réduites successives sont

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B}{B'},\ \frac{C}{C'},\ \ldots,\ \frac{P}{P'},\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{R}{R'},\ \ldots$$

Soit ensuite la fraction continue auxiliaire

$$y = q,\ r,\ s,\ t,\ \ldots$$

Les dénominateurs des réduites de cette fraction ont pour valeurs, respectivement :

$$(PQ' - QP')(-1)^{\lambda},\quad (PR' - RP')(-1)^{\lambda},\quad (PS' - SP')(-1)^{\lambda},\ \ldots;$$

λ étant le rang du quotient incomplet p (*).

(*) Pour la démonstration, voir les *Nouvelles Annales* (1849), p. 166.

Digitized by Google

2. Changeons de notation; et soit

$$x = q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_g,\ \ldots,\ q_h,\ \ldots,\ q_k,\ \ldots \qquad (1)$$

Prenons les trois fractions auxiliaires :

$$y = q_{g+1},\ q_{g+2},\ \ldots,\ q_h;$$
$$z = q_{h+1},\ q_{h+2},\ \ldots,\ q_k;$$
$$u = q_{g+1},\ q_{g+2},\ \ldots,\ q_k.$$

La valeur de y est une fraction ordinaire, *fonction des indices* $g+1, h$. Soient donc

$$y = \frac{N_{g+1,h}}{D_{g+1,h}}, \quad z = \frac{N_{h+1,k}}{D_{h+1,k}}, \quad u = \frac{N_{g+1,k}}{D_{g+1,k}} \ (^*) \qquad (2)$$

En vertu du Lemme :

$$N_gD_h - D_gN_h = (-1)^g D_{g+1,h},$$
$$N_hD_k - D_hN_k = (-1)^h D_{h+1,k},$$
$$N_kD_g - D_kN_g = (-1)^{g+1} D_{g+1,k}.$$

Multipliant par D_k, D_g, D_h, et ajoutant, on trouve

$$0 = D_kD_{g+1,h} - D_hD_{g+1,k} + (-1)^{h-g}D_gD_{h+1,k},$$

ou

$$D_kD_{g+1,h} - D_hD_{g+1,k} = (-1)^{h-g+1}D_g \,.\, D_{h+1,k} \qquad (A)$$

De même,

$$N_kD_{g+1,h} - N_hD_{g+1,k} = (-1)^{h-g+1}N_gD_{h+1,k} \qquad (B)$$

Les relations (A), (B) constituent le *théorème de Kramp* (**).

(*) D'après cette notation, les réduites de x, répondant aux quotients q_g, q_h, q_k, seraient :

$$\frac{N_{1,g}}{D_{1,g}}, \quad \frac{N_{1,h}}{D_{1,h}}, \quad \frac{N_{1,k}}{D_{1,k}}.$$

Pour simplifier, nous les représenterons par

$$\frac{N_g}{D_g}, \quad \frac{N_h}{D_h}, \quad \frac{N_k}{D_k}.$$

(**) Je ne connais ce théorème que par la mention qu'en a faite *Lebesgue*, dans le *Journal de Mathématiques* (t. V, p. 286). Il ne m'a pas été possible de consulter l'*Arithmétique universelle*, de Kramp. La démonstration ci-dessus est beaucoup plus simple que celle qui a été insérée aux *Nouvelles Annales*. Enfin, le *défaut de symétrie*, de la formule rapportée par Lebesgue, a disparu.

Digitized by Google

3. Application. Soit

$$x = 3,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 1.$$

Les réduites sont :

$$\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{47}{4},\ \frac{104}{31},\ \frac{151}{45},\ \frac{557}{166},\ \frac{2\,936}{875},\ \frac{6\,429}{1\,916},\ \frac{9\,365}{2\,791}.$$

Prenons

$$g = 3,\quad h = 7,\quad k = 10;$$

nous aurons

$$N_g = 10,\quad D_g = 3,\quad N_h = 557,\quad D_h = 166,\quad N_k = 9\,365,\quad D_k = 2\,791.$$

Quant aux fonctions

$$D_{g+1,h},\quad D_{g+1,k},\quad D_{h+1,k},$$

elles sont égales, respectivement, aux dénominateurs des fractions

$$4, 2, 1, 3;\quad 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1;\quad 5, 2, 1;$$

savoir :

$$11,\qquad 185,\qquad 3.$$

On trouve, conformément au Théorème :

$$2\,791 \,.\, 11 - 166 \,.\, 185 = -3 \,.\, 3,$$
$$9\,365 \,.\, 11 - 557 \,.\, 185 = -10 \,.\, 3.$$

II. Fractions périodiques.

4. Lemme. *Soit*

$$y = (a, b, c, d, e)$$

une fraction périodique simple. Soient

$$y_i = \frac{E_i}{E'_i},\quad y_{i+1} = \frac{E_{i+1}}{E'_{i+1}}$$

les réduites que l'on obtient en prenant i *périodes et* i + 1 *périodes.*

Digitized by Google

On a :

1° $$E_{i+1} = E_1E_i + D_1E'_i, \quad E'_{i+1} = E'_1E_i + D'_1E'_i; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

2° $$D'_1E_{i+1} - D_1E'_{i+1} = \pm E_i, \quad E'_1E_{i+1} - E_1E'_{i+1} = \mp E'_i \ (*); \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

3° $$E_iE'_{i+1} - E'_iE_{i+1} = \pm E'_1 \ (**) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

3. Remarques. I. D'après les formules (4), *si,* comme on doit le supposer, E_i, E'_i *sont premiers entre eux,* E_{i+1}, E'_{i+1} *sont également premiers entre eux.*

II. *Tous les dénominateurs* E'_i *sont divisibles par* E'_1 (***).

III. Si, dans l'égalité (5), on remplace E_{i+1}, E'_{i+1} par leurs valeurs (3), on trouve la relation

$$E'_1E_i^2 + (D'_1 - E_1)E_iE'_i - D_1E_i'^2 = \pm E'_1, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

à laquelle satisfont, nécessairement, les valeurs de E_i, E'_i. D'ailleurs, par la remarque précédente, cette relation se réduit à

$$E_i^2 + (D'_1 - E_1)E_i\left(\frac{E'_i}{E'_1}\right) - D_1E'_1\left(\frac{E'_i}{E'_1}\right)^2 = \pm 1 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

IV. Par conséquent, *si quatre nombres entiers* D_1, D'_1, E_1, E'_1, *sont liés par la condition*

$$D_1E'_1 - D'_1E_1 = \pm 1,$$

il suffit, pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$z^2 + (D'_1 - E_1)zu - D_1E'_1u^2 = \pm 1, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

de prendre

$$z = E_i, \quad u = \frac{E'_i}{E'_1} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

(*) *Nouvelles Annales,* t. VIII, pp. 177, 178.

(**) Conséquence du premier Lemme (1). Dans l'application de la formule, on devra prendre le signe +, si le nombre des termes de la période est *pair.* Et, si ce nombre est *impair,* on prendra le signe + ou le signe —, selon que i sera *pair* ou *impair.*

(***) *Loc. cit.,* pp. 178, 179.

Digitized by Google

6. Vérifications et applications. Soit

$$y = (3, 2, 1, 1).$$

Les premières réduites sont

$$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5};$$

de manière que

$$D_1 = 10, \quad D'_1 = 3, \quad E_1 = 17, \quad E'_1 = 5.$$

Les formules (3) donnent ensuite :

$$E_2 = 339, \quad E_3 = 6\,763, \quad E_4 = 134\,921, \quad E_5 = 2\,691\,657, \quad E_6 = 53\,698\,219,$$
$$E'_2 = 100, \quad E'_3 = 1\,995, \quad E'_4 = 39\,800, \quad E'_5 = 794\,005, \quad E'_6 = 15\,840\,300.$$

Conformément à la Remarque II, tous les dénominateurs sont divisibles par $E'_1 = 5$.

En outre (5) :

$$E_1E'_2 - E'_1E_2 = 17.100 - 5.339 = 1\,700 - 1\,695 = 5,$$
$$E_2E'_3 - E'_2E_3 = 339.1\,995 - 100.6\,763 = 676\,305 - 676\,300 = 5,$$
$$E_3E'_4 - E'_3E_4 = 6\,763.39\,800 - 1\,995.134\,921 = 269\,167\,400 - 269\,167\,395 = 5,$$
$$E_4E'_5 - E'_4E_5 = 134\,921.794\,005 - 39\,800.2\,691\,657$$
$$= 107\,127\,948\,605 - 107\,127\,948\,600 = 5,$$
$$E_5E'_6 - E'_5E_6 = 2\,691\,657.15\,840\,300 - 794\,005.53\,698\,219$$
$$= 42\,636\,654\,377\,100 - 42\,636\,654\,377\,095 = 5.$$

D'après les données, l'équation (8) est

$$z^2 - 14zu - 50u^2 = 1.$$

Celle-ci admet, comme solutions :

$$z = 339, \quad u = 20; \qquad z = 6\,743, \quad u = 399; \qquad z = 134\,921, \quad u = 7\,960;$$

etc. (*).

(*) $339^2 - 14.339.20 - 50.20^2 = 114\,921 - 94\,920 - 20\,000 = 1,$

$6\,763^2 - 14.6\,763.399 - 50.399^2 = 45\,738\,169 - 37\,778\,118 - 7\,960\,050 = 1;$

etc.

Digitized by Google

7. Généralisation. On peut, évidemment, réunir deux, trois, quatre, ... périodes, et en former une seule. Les propriétés rappelées dans les Paragraphes 4 et 5 peuvent donc être ainsi généralisées :

1° $$E_{nk}E'_{(n+1)k} - E'_{nk}E_{(n+1)k} = \pm E'_k; \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

2° *Tous les dénominateurs* E'_{nk} *sont divisibles par* E'_k *et par* E'_n (*).

III. Série de Lamé.

8. La fraction périodique la plus simple est

$$y = (1),$$

dont les réduites successives sont

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

Les dénominateurs de ces réduites (**) donnent lieu à la célèbre série de Lamé ou de *Fibonacci :*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots \ldots \quad (11)$$

Si u_p, u_q, u_{pq} sont trois termes de cette série, il résulte, de la dernière proposition, que u_{pq} *est divisible par* u_p *et par* u_q*;* propriété signalée par M. Édouard Lucas, et dont il a déduit des conséquences fort importantes (***). On peut l'énoncer autrement :

Les termes de la série de Lamé, pris de trois en trois, sont divisibles par 2; *pris de quatre en quatre, divisibles par* 3; *pris de cinq en cinq, divisibles par* 5; *pris de sept en sept, divisibles par* 13; etc.

(*) Parce que *l'indice nk est une fonction symétrique* de k et de n. Dans l'exemple ci-dessus, $E'_6 = 15\,840\,300$ est divisible par $E'_2 = 100$ et par $E'_3 = 1\,995$.

(**) Et aussi les numérateurs.

(***) *Sur la théorie des nombres premiers*, p. 5 (1876).

Digitized by Google

9. On sait, et l'on vérifie aisément, que

$$u_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Donc, d'après la propriété précédente :

$$\frac{1}{2^{p(q-1)}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{pq} - (1-\sqrt{5})^{pq}}{(1+\sqrt{5})^p - (1-\sqrt{5})^p} = entier,$$

ou

$$(1+\sqrt{5})^{p(q-1)} + (1+\sqrt{5})^{p(q-2)}(1-\sqrt{5})^p + \cdots + (1-\sqrt{5})^{p(q-1)} = \mathfrak{M}.2^{p(q-1)};$$

ou encore, par le changement de q en $q+1$:

$$(1+\sqrt{5})^{pq} + (1+\sqrt{5})^{p(q-1)}(1-\sqrt{5})^p + \cdots + (1-\sqrt{5})^{pq} = \mathfrak{M}.2^{pq} \quad . \; . \quad (13)$$

10. Généralisation. Soit $y = a$, a étant un nombre entier. On trouve, de la même manière,

$$(a+\sqrt{a^2+4})^{pq} + (a+\sqrt{a^2+4})^{p(q-1)}(a-\sqrt{a^2+4})^p + \cdots + (a-\sqrt{a^2+4})^{pq} = \mathfrak{M}.2^{pq}. \quad (14)$$

Prenons, par exemple :

$$a = 5, \quad p = 2, \quad q = 3.$$

Nous devons trouver

$$(5+\sqrt{29})^6 + (5+\sqrt{29})^4(5-\sqrt{29})^2 + (5+\sqrt{29})^2(5-\sqrt{29})^4 + (5-\sqrt{29})^6 = \mathfrak{M}.64$$

ou

$$5^6 + 15.5^4.29 + 15.5^2.29^2 + 29^3 + (-4)^2(25+29) = \mathfrak{M}.32,$$

ou

$$5^6 + 15.5^4.29 + 15.5^2.29^2 + 29^3 = \mathfrak{M}.32.$$

Si l'on remplace 5^2 par -7, 29 par -3, cette égalité devient

$$7^3 + 15.49.3 + 15.7.9 + 27 = \mathfrak{M}.32;$$

ou, après quelques autres réductions,

$$7.17 + 13.17 - 15 + 27 = \mathfrak{M}.32,$$

ou enfin

$$340 + 12 = \mathfrak{M}.32.$$

Digitized by Google

11. Remarque. Dans l'égalité (14), posons

$$a = 2 \cot \varphi.$$

Il résulte de cette transformation :

$$a + \sqrt{a^2 + 4} = 2 \cot \frac{1}{2} \varphi, \quad a - \sqrt{a^2 + 4} = -2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi;$$

puis

$$\cot^{pq} \frac{\varphi}{2} + (-1) \cot^{p(q-1)} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^p \frac{\varphi}{2} + \cot^{p(q-2)} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^{2p} \frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq} \operatorname{tg}^{pq} \frac{\varphi}{2} = \textit{entier};$$

ou, sous une forme un peu plus simple :

$$\cot^{pq} \frac{\varphi}{2} + (-1)^p \cot^{p(q-2)} \frac{\varphi}{2} + \cot^{p(q-4)} \frac{\varphi}{2} + (-1)^{3p} \cot^{p(q-6)} \frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq} \cot^{-pq} \frac{\varphi}{2} = \textit{entier}. \quad (15)$$

Autrement dit :

Si l'arc φ *est tel que sa tangente soit* $\frac{2}{a}$, a *étant un nombre entier, la fonction*

$$\operatorname{tg}^{-pq} \frac{\varphi}{2} + (-1)^p \operatorname{tg}^{-p(q-2)} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}^{-p(q-4)} \frac{\varphi}{2} + \cdots + (-1)^{pq} \operatorname{tg}^{pq} \frac{\varphi}{2}$$

se réduit à un nombre entier.

12. Nous donnerons ici les quarante-cinq premiers termes de la série de Lamé. Ceux de ces termes qui sont *premiers* sont désignés par un astérisque.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	1*	1*	2*	3*	5*	8	13*	21	34	55	89*	144	233	377	610	987

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
u_n	1 597*	2 584	4 181*	6 765	10 946	17 711	28 657*	46 368	75 025	121 393

n	27	28	29	30	31	32	33	34
u_n	196 418	317 811	514 229*	832 040	1 346 269*	2 178 309	3 524 578	5 702 887

n	35	36	37	38	39	40
u_n	9 227 465	14 930 352	24 157 817	39 088 169	63 245 986	102 334 155

n	41	42	43	44	45
u_n	165 580 141	267 914 296	433 494 437	701 408 733	1 134 903 170

Digitized by Google

13. Remarque. D'après les premières valeurs de u_n, il semblerait que u_n *est premier si n est premier*. Mais il n'en est rien :

$$u_{37} = 24\,157\,817 = 149 . 162\,133;$$

et, comme l'a trouvé M. Lucas :

$$u_{41} = 165\,580\,141 = 2\,789 . 59\,369.$$

Quant au nombre 433 494 437, *nous pensons* qu'il est premier (*).

IV. Série des inverses.

14. Pour abréger, nous appelons *série des inverses* celle dont les termes sont *les inverses des dénominateurs des réduites d'une fraction continue illimitée*. S'il s'agit, par exemple, de la fraction (1), qui donne lieu à la série de Lamé, la série des inverses est

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}, \frac{1}{21}, \dots \qquad (16)$$

15. Lemme. *La série* (16) *est convergente.*

Cette proposition, bien connue (**), résulte, immédiatement, de ce que

$$\lim \frac{\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{u_n}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61\dots$$

16. Théorème. *Toute série des inverses est convergente.*

Soit, sous forme abrégée,

$$x = a, b, c, d, e, \dots;$$

(*) Si nos calculs sont exacts, ce nombre n'admet aucun diviseur premier, d'où résulterait qu'il est premier.

P. S. Dans le beau Mémoire intitulé : *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise,* M. Lucas arrive à cette même conclusion. Ainsi, le nombre considéré est premier.

(**) *Nouvelles Annales* (1864, p. 260; 1878, p. 253); *Nouvelle Correspondance*, t. III, p. 404; etc.

Digitized by Google

les termes a, b, c, ..., étant, bien entendu, des *nombres entiers*. Les dénominateurs

$$A', B', C', \ldots$$

surpassent, en tout ou en partie, les termes correspondants de la série de Lamé; donc leurs inverses sont, respectivement, égaux ou inférieurs aux termes de la série (16). Conséquemment, la série

$$\frac{1}{A'}, \frac{1}{B'}, \frac{1}{C'}, \ldots$$

est convergente.

17. Problème (*). *Trouver la limite de la somme des termes de rang impair, dans la série* (16).

Soient, dans la série de Lamé, les termes de rang *impair :*

$$1, 2, 5, 13, 34, \ldots$$

Il est facile de vérifier que, v_n étant le terme général de cette série, on a

$$v_n = 3v_{n-1} - v_{n-2} \text{ (**)}; \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

et, par conséquent,

$$v_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Dans cette formule, α, β désignent les racines de l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0; \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

savoir :

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = q, \quad \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{q} \text{ (***)} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

(*) Proposé par M. E. Lucas (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. II, p. 223). Nous reproduisons ici, en grande partie, la solution publiée dans les *Nouvelles Annales* (1878, p. 253).

(**) Cette relation est une conséquence de celles-ci :

$$u_i = u_{i-1} + u_{i-2}, \quad u_{i-1} = u_{i-2} + u_{i-3}, \quad -u_{i-2} = -u_{i-3} - u_{i-4}.$$

(***) Comme on pouvait s'y attendre d'après la formule (12),

$$\alpha = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \beta = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Digitized by Google

Déterminant, au moyen des *conditions initiales*, les valeurs des constantes A, B, on trouve, au lieu de la formule (18),

$$v_n = \frac{1 + q^{2n-1}}{(1+q)q^{n-1}},$$

ou

$$\frac{1}{v_n} = (1+q)\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

Telle est, sous la forme la plus simple, l'expression du terme général de la série proposée. Conséquemment, si S est la limite cherchée, on a

$$\frac{S}{1+q} = \sum_1^\infty \frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (22)$$

Or, avec les notations de Jacobi et de M. Bertrand,

$$\frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q^3} + \frac{q^2}{1+q^5} + \cdots = \frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}} \text{ (*)}. \quad \dots\dots \quad (23)$$

Donc aussi

$$S = \frac{1+q}{2\pi\sqrt{q}} k\omega;$$

ou, à cause de

$$\frac{1+q}{\sqrt{q}} = \frac{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{5}:$$

$$S = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} k\omega \quad \dots\dots\dots\dots \quad (24)$$

18. Remarque. Par une autre formule connue :

$$\frac{k\omega}{2\pi} = \sqrt{q}\,(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots)^2 \text{ (**)}.$$

(*) *Fundamenta nova*..., p. 103.
(**) *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 2.

Digitized by Google

En égalant les deux valeurs de $\frac{k\omega}{2\pi}$, on a donc cette *identité*, à peu près évidente :

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\frac{q^2}{1+q^5}+\cdots=(1+q^2+q^6+q^{20}+\cdots)^2 \quad \text{(C)}$$

19. Problème (*). *Trouver la limite de la somme des termes de rang pair, dans la série* (16).

Désignant par S' cette limite, et opérant comme ci-dessus, on trouve, au lieu de la formule (22),

$$\frac{S'}{\sqrt{5}}=\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}} \quad (25)$$

J'ai cherché, en vain, la sommation de cette nouvelle série, sommation qui paraît dépendre de celle de la *série de Lambert.*

Soit, en effet,

$$\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\cdots+\frac{q^n}{1-q^n}+\cdots=f(q); \quad (26)$$

et, par conséquent,

$$\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^4}{1-q^4}+\cdots+\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}+\cdots=f(q^2).$$

Il résulte, de ces deux égalités,

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}=f(q)-f(q^2). \quad (27)$$

20. Remarques. I. *Réciproquement,* si la somme de la série (25) était connue, on pourrait, peut-être, en déduire la somme de la série de Lambert. Car si l'on pose

$$\sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}=\varphi(q), \quad (28)$$

de manière que

$$\varphi(q)=f(q)-f(q^2);$$

(*) Également proposé par M. Lucas (*loc. cit.*).

on aura, à cause de $f(q^\infty) = 0$:

$$f(q) = \varphi(q) + \varphi(q^2) + \varphi(q^4) + \varphi(q^8) + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

II. La relation (27) équivaut à

$$\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^3}{1-q^6} + \cdots = \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} + \cdots; \quad . \quad . \quad (D)$$

identité dont la vérification est facile. Elle est, pour ainsi dire, *conjuguée* de celle-ci :

$$\frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^4} + \frac{q^3}{1+q^6} + \cdots = \frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots,$$

donnée par Jacobi (*).

En les combinant par addition, on trouve

$$\frac{q}{1-q} + \frac{q^5}{1-q^5} + \frac{q^9}{1-q^9} + \cdots = \frac{q}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^3}{1-q^{12}} + \cdots \quad . \quad . \quad (E)$$

Pour démontrer, directement, cette nouvelle identité, il suffit de développer les deux membres, suivant les puissances entières et positives de la variable : de part et d'autre, *le coefficient de* q^n *est le nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$.

V. Généralisation de la série de Lamé.

21. Théorème. *Soit* a *un nombre entier, supérieur à* 2. *Soit* α *une racine de l'équation*

$$x^2 - ax + 1 = 0 \ (^{**}) \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

La quantité

$$y_n = \frac{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{2n-2}}{\alpha^{n+1}} + a\alpha^n \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

est un nombre entier.

(*) *Fundamenta...*, p. 103.

(**) L'équation (19) en est un cas particulier.

Digitized by Google

On a

$$y_n = \frac{1-\alpha^{2n}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+1}} + a\alpha^n, \quad y_{n+1} = \frac{1-\alpha^{2n+2}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+2}} + a\alpha^{n+1};$$

puis

$$y_{n+1} - \alpha y_n = \frac{1-\alpha^{2n+2}-\alpha^2(1-\alpha^{2n})}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+2}},$$

ou

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \frac{1}{\alpha^{n+2}}.$$

On conclut, de cette relation générale :

$$y_n = \alpha y_{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}};$$

puis, par l'élimination de $\frac{1}{\alpha^{n+1}}$:

$$y_{n+1} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) y_n - y_{n-1},$$

ou

$$y_{n+1} = a y_n - y_{n-1} \quad \text{. . . . . (32)}$$

Ainsi, les valeurs de y_{n+1} forment une suite *récurrente*. De plus, *si* y_1 *et* y_2 *sont des nombres entiers,* y_{n+1} *est un nombre entier.*

Or :

$$y_1 = \frac{1}{\alpha^2} + a\alpha = \beta^2 + a\alpha = (a\beta - 1) + a\alpha = a^2 - 1,$$

$$y_2 = \alpha(a^2-1) + \beta^3 = (a^2-1)\alpha + (a^2-1)\beta - a = a^3 - 2a;$$

β étant la seconde racine de l'équation (30).

Ces valeurs sont donc entières, et le Théorème est démontré (*).

22. Remarque. Le terme général peut être écrit sous la forme :

$$y_n = \frac{1-\alpha^{2n}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+1}} + (\alpha + \beta)\alpha^n;$$

ou, parce que

$$\alpha\beta = 1,$$

(*) Ou plutôt, la *réduction numérique* est effectuée.

Digitized by Google

sous celle-ci :

$$y_n = \frac{1-\alpha^{2n}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+1}} + \alpha^{n+1} + \alpha^{n-1}.$$

La réduction au dénominateur commun donne enfin

$$y_n = \frac{1-\alpha^{2n+4}}{(1-\alpha^2)\alpha^{n+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

Ainsi, *le second membre est un nombre entier* (*).

23. Théorème. *Soient les séries :*

$$\begin{array}{llllll} u_1, & u_2, & u_3, & \ldots, & u_n, & \ldots \\ \Delta u_1, & \Delta u_2, & \Delta u_3, & \ldots, & \Delta u_n, & \ldots \\ \Delta^2 u_1, & \Delta^2 u_2, & \Delta^2 u_3, & \ldots, & \Delta^2 u_n, & \ldots \end{array}$$

Si l'on veut que la troisième reproduise la première (sauf le premier terme de celle-ci), *on doit prendre :*

$$u_n = Aq^{-n} + Bq^n, \qquad q = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

En effet, la condition

$$\Delta^2 u_n = u_{n+1}$$

équivaut à

$$u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0.$$

Cette *loi de récurrence* donne l'équation (19), puis les formules (34).

24. Remarque. On a

$$\frac{1}{u_n} = \frac{q^n}{A + Bq^{2n}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Si $A = q$ et $B = 1$, on retrouve le terme général de la série (22). De même, pour $A = 1$, $B = -1$, la formule (35) reproduit la série (25).

(*) Transformation analogue à celle que nous avons indiquée précédemment (9).

Digitized by Google

VI. Fractions tournantes.

25. Soient deux fractions continues, telles que l'on passe de la première à la seconde en effectuant, sur les termes de la première, une permutation tournante. Par exemple :

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ e; \qquad y = b,\ c,\ d,\ e,\ a.$$

Nous dirons que x, y sont des *fractions tournantes.*

26. Théorème. *Soient deux fractions tournantes, et les deux dernières réduites de chacune : le dernier numérateur et l'avant-dernier dénominateur forment une somme constante.*

Pour fixer les idées, considérons les fractions écrites ci-dessus. Soient

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B}{B'},\ \frac{C}{C'},\ \frac{D}{D'},\ \frac{E}{E'}$$

les réduites de x, et

$$\frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\gamma}{\gamma'},\ \frac{\delta}{\delta'},\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon'},\ \frac{\alpha}{\alpha'}$$

les réduites de y. Soit, en outre, la fraction auxiliaire

$$z = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ a,$$

ou

$$z = a + \frac{1}{y}.$$

Il est visible que les réduites de z sont :

$$a = \frac{A}{A'},\quad a + \frac{\beta'}{\beta} = \frac{B}{B'},\quad a + \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{C}{C'},\quad a + \frac{\delta'}{\delta} = \frac{D}{D'},\quad a + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{E}{E'},\quad a + \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{Ea + D}{E'a + D'}.$$

Par conséquent :

1° $\qquad \beta = B',\quad \gamma = C',\quad \delta = D',\quad \varepsilon = E',\quad \alpha = aE' + D';$

2° $\qquad \beta' = B - aB',\quad \gamma' = C - aC',\quad \delta' = D - aD',\quad \varepsilon' = E - aE',\quad \alpha' = (Ea + D) - a\alpha;$

3° $\qquad \alpha + \varepsilon' = E + D',$

conformément à l'énoncé.

Digitized by Google

27. Remarques. I. Si, après avoir formé y au moyen de x, on déduit, de y, une fraction z, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le cycle soit complet; les réduites de ces fractions tournantes dépendent les unes des autres, comme on le voit dans le tableau suivant :

Fractions tournantes.	Réduites.
$x = 2, 3, 1, 2, 4;$	$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{25}{11}, \frac{109}{48};$
$y = 3, 1, 2, 4, 2;$	$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{48}{13}, \frac{107}{29};$
$z = 1, 2, 4, 2, 3;$	$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{13}{9}, \frac{29}{20}, \frac{100}{69};$
$u = 2, 4, 2, 3, 1;$	$\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{20}{9}, \frac{69}{31}, \frac{89}{40};$
$v = 4, 2, 3, 1, 2;$	$\frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{31}{7}, \frac{40}{9}, \frac{111}{25};$
$x = 2, 3, 1, 2, 4.$	$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{25}{11}, \frac{109}{48}.$

En outre :

$$109 + 11 = 107 + 13 = 100 + 20 = 111 + 9.$$

II. Si la fraction x est périodique, y l'est également; et la propriété précédente subsiste pour chacune des périodes.

Exemple :

$$x = (2, 3, 1, 2, 4), \quad y = (3, 1, 2, 4, 2).$$

Les réduites de x sont :

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{25}{11}, \frac{109}{48}, \quad \Big| \quad \frac{243}{107}, \frac{838}{369}, \frac{1\,081}{476}, \frac{3\,000}{1\,321}, \frac{13\,081}{5\,760}, \quad \Big| \quad \ldots;$$

celles de y :

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{48}{13}, \frac{107}{29}, \quad \Big| \quad \frac{369}{100}, \frac{476}{129}, \frac{1\,321}{358}, \frac{5\,760}{1\,561}, \frac{12\,841}{3\,480}, \quad \Big| \quad \ldots;$$

et l'on a :

$$109 + 11 = 107 + 13, \quad 13\,081 + 1\,321 = 12\,841 + 1\,561, \ldots$$

Digitized by Google

VII. Développement de $\sqrt{A}$.

28. A étant un nombre entier, soit a la partie entière de $\sqrt{A}$. On sait que

$$\sqrt{A} = a\,(f, g, h, \ldots, m, n, p, q, 2a) \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Afin d'obtenir des résultats simples et d'éviter les discussions relatives aux signes, nous supposons, une fois pour toutes, que *le terme q* soit *de rang pair :* dans le cas contraire, on prendrait, comme période unique, l'ensemble de deux périodes (7). Soit $\frac{Q_1}{Q_1'}$ la réduite répondant à ce terme q : elle surpasse $\sqrt{A}$.

29. Formules fondamentales. Si nous prenons n périodes, nous aurons

$$\sqrt{A} = a, f, g, \ldots, p, q, 2a, f, g, \ldots, p, q, 2a, \ldots, 2a, f, g, \ldots, p, q, a + \sqrt{A}; \quad . \quad (37)$$

car *le diviseur* $(2a, f, g, h, \ldots, m, n, p, q)$ *égale* $a + \sqrt{A}$.

En conséquence, et par le raisonnement habituel,

$$\sqrt{A} = \frac{Q_n(a + \sqrt{A}) + P_n}{Q_n'(a + \sqrt{A}) + P_n'}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

puis

$$P_n = AQ_n' - aQ_n, \quad P_n' = Q_n - aQ_n'; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

puis encore, par l'élimination de a :

$$Q_n^2 - AQ_n'^2 = +1 \text{ (**)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

30. Suite. Soit

$$\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-1}'} = a, f, g, \ldots, p, q, 2a, f, g, \ldots, p, q, 2a, f, g, \ldots, p, q;$$

(*) De plus, $q = f$, $p = g$, ...; en sorte que *la période est symétrique*. Mais cette propriété n'a pas d'influence, croyons-nous, sur les recherches suivantes.

(**) $\frac{Q_1}{Q_1'}$ étant de rang *pair*, $\frac{Q_n}{Q_n'}$ l'est également; donc $\frac{Q_n}{Q_n'} > \sqrt{A}$; etc. Nous avons cru devoir rappeler les relations (38), (39), (40), quoiqu'elles soient bien connues.

Digitized by Google

la période étant prise $n - 1$ fois. La réduite qui suivrait, immédiatement, $\frac{Q_{n-1}}{Q'_{n-1}}$, a pour valeur

$$\frac{Q_{n-1} \cdot 2a + P_{n-1}}{Q'_{n-1} \cdot 2a + P'_{n-1}}.$$

Dans cette expression, remplaçons $2a$ par $a + \frac{Q_1}{Q'_1}$: nous obtiendrons $\frac{Q_n}{Q'_n}$; savoir :

$$\frac{Q_n}{Q'_n} = \frac{Q_{n-1}a + P_{n-1} + \frac{Q_1 Q_{n-1}}{Q'_1}}{Q'_{n-1}a + P'_{n-1} + \frac{Q_1 Q'_{n-1}}{Q'_1}};$$

ou, par les formules (39),

$$\frac{Q_n}{Q'_n} = \frac{AQ'_1 Q'_{n-1} + Q_1 Q_{n-1}}{Q'_1 Q_{n-1} + Q_1 Q'_{n-1}};$$

puis :

$$Q_n = AQ'_1 Q'_{n-1} + Q_1 Q_{n-1}, \quad Q'_n = Q'_1 Q_{n-1} + Q_1 Q'_{n-1}; \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

et, en outre :

$$Q_1 Q_n - AQ'_1 Q'_n = Q_{n-1}, \quad Q'_1 Q_n - Q_1 Q'_n = \quad Q'_{n-1} \text{ (*)} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

31. Autres relations. 1° Dans la seconde des formules (41), changeons n en $n + 1$: elle devient

$$Q'_{n+1} = Q'_1 Q_n + Q_1 Q'_n.$$

Donc, par la combinaison avec la seconde des égalités (42) :

$$Q'_{n+1} = 2Q_1 \cdot Q'_n - Q'_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Ainsi, comme l'a fait observer M. Lucas (**), *la loi de récurrence des dénominateurs* Q'_1, Q'_2, Q'_3, ..., *est celle qui régit les cosinus des multiples d'un arc* x.

2° Les formules (41) donnent, comme cas particulier :

$$Q_2 = AQ'^2_1 + Q^2_1, \quad Q'_2 = 2Q_1 Q'_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

(*) Ces égalités prouvent que Q_n, Q'_n sont premiers entre eux, si, comme on le doit supposer, Q_{n-1}, Q'_{n-1} le sont.

(**) *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III, p. 375.

Digitized by Google

D'ailleurs,

$$AQ_1'^2 = Q_1^2 - 1;$$

donc

$$Q_2 = 2Q_1^2 - 1 \ (*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

3° Réunissant n périodes, pour en former une, on a ces deux formules générales :

$$Q_{2n} = 2Q_n^2 - 1, \quad Q'_{2n} = 2Q_nQ'_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

32. Remarque. Il résulte, de celles-ci :

$$\frac{Q_{2n}}{Q'_{2n}} = \frac{1}{2}\left[\frac{Q_n}{Q'_n} + A\frac{Q'_n}{Q_n}\right];$$

ou, sous une forme plus simple,

$$x_{2n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Ainsi, x_n *étant une valeur approchée de* $\sqrt{A}$, *on obtient une nouvelle valeur, plus approchée, en appliquant la formule* (46) (**). Celle-ci, d'après une remarque de M. Bertrand, s'accorde avec ce que donnerait la formule du binôme.

33. Théorème. *Soient* $A_1, A_2, A_4, A_8, \ldots$ *une suite de nombres entiers, indéfiniment croissants, satisfaisant à la condition*

$$A_{2n} = 2A_n^2 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Soient $B_1, B_2, B_4, B_8, \ldots$, *une autre suite de nombre entiers, satisfaisant à la condition*

$$B_{2n} = 2A_nB_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

(*) Si la période $(f, g, h, \ldots, n, p, q, 2a)$ avait un nombre *impair* de termes, la formule serait

$$Q_2 = 2Q_1^2 + 1.$$

(**) Cette formule a été indiquée par M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII), qui ne paraît pas avoir aperçu la première des relations (F).

Digitized by Google

1°

$$\frac{A_1^2 - 1}{B_1^2} = \frac{A_2^2 - 1}{B_2^2} = \frac{A_4^2 - 1}{B_4^2} = \cdots = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

2° *Les fractions*

$$\frac{A_1}{B_1}, \; \frac{A_2}{B_2}, \; \frac{A_4}{B_4}, \; \cdots$$

tendent, indéfiniment, vers $\sqrt{C}$.

En effet,

$$\frac{A_{2n}^2 - 1}{B_{2n}^2} = \frac{4A_n^4 - 4A_n^2}{4A_n^2 B_n^2} = \frac{A_n^2 - 1}{B_n^2}.$$

34. Remarques. I. Ce théorème constitue, pour ainsi dire, une réciproque de toutes les propositions précédentes.

II. Le nombre C peut être *fractionnaire.*

III. *Si ce nombre est entier, les fractions*

$$\frac{A_1}{B_1}, \; \frac{A_2}{B_2}, \; \frac{A_4}{B_4}, \; \cdots$$

sont irréductibles.

IV. Dans le premier cas, *ces fractions ne sont pas, nécessairement, des réduites de la fraction continue équivalente à* $\sqrt{C}$.

35. Applications. I.

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 7, \quad A_4 = 97, \quad A_8 = 18\,817, \ldots;$$

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 4, \quad B_4 = 56, \quad B_8 = 10\,864, \ldots;$$

$$C = \frac{2^2 - 1}{1} = \frac{7^2 - 1}{4^2} = \frac{97^2 - 1}{56^2} = \frac{18\,817^2 - 1}{10\,864^2} = \cdots = 3.$$

En effet,

$$\sqrt{3} = 1\,(1,\, 2);$$

d'où les réduites :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1} \Big| \frac{5}{3}, \frac{7}{4} \Big| \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56} \Big| \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1\,351}{780}, \frac{3\,691}{2\,131}, \frac{5\,042}{2\,911}, \frac{13\,775}{7\,953}, \frac{18\,817}{10\,864} \Big| \cdots$$

Digitized by Google

II.

$$A_1 = 8, \quad A_2 = 127, \quad A_4 = 32\,257, \quad A_8 = 2\,081\,028\,097, \ \ldots;$$

$$B_1 = 3, \quad B_2 = 48, \quad B_4 = 12\,192, \quad B_8 = 786\,554\,688, \ \ldots;$$

$$C = \frac{8^2-1}{3^2} = \frac{127^2-1}{48^2} = \frac{32\,257^2-1}{12\,192^2} = \cdots = 7.$$

Si l'on développe $\sqrt{7}$, en fraction continue, on trouve

$$\sqrt{7} = 2\,(1, 1, 1, 4),$$

puis les réduites :

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3} \,\Big|\, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48} \,\Big|\, \frac{590}{223}, \frac{717}{271}, \frac{1\,307}{494}, \frac{2\,024}{765}, \frac{9\,403}{3\,554}, \frac{11\,427}{4\,319}, \frac{20\,830}{7\,873}, \frac{32\,257}{12\,192} \,\Big|\, \cdots$$

III.

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 7, \quad A_4 = 97, \quad A_8 = 18\,817, \ \ldots;$$

$$B_1 = 3, \quad B_2 = 12, \quad B_4 = 168, \quad B_8 = 32\,592, \ \ldots;$$

$$C = \frac{2^2-1}{3^2} = \frac{7^2-1}{12^2} = \frac{97^2-1}{168^2} = \cdots = \frac{1}{3}.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, en fraction continue, donne les réduites

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}, \frac{15}{26}, \frac{41}{71}, \frac{56}{97}, \frac{153}{257}, \ldots,$$

parmi lesquelles ne se trouvent pas les fractions

$$\frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{97}{168}, \frac{18\,817}{32\,592}, \ldots \text{ (*)}.$$

IV.

$$A_1 = 3, \quad A_2 = 17, \quad A_4 = 577, \quad A_8 = 665\,857, \ \ldots;$$

$$B_1 = 2, \quad B_2 = 12, \quad B_4 = 408, \quad B_8 = 470\,832, \ \ldots;$$

$$C = \frac{3^2-1}{2^2} = \frac{17^2-1}{12^2} = \frac{577^2-1}{408^2} = \frac{665\,857^2-1}{470\,832^2}, \cdots = 2;$$

etc.

(*) Ces dernières sont égales, respectivement, à

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}, \quad \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{3}, \quad \frac{97}{56}\cdot\frac{1}{3}, \quad \frac{18\,817}{10\,864}\cdot\frac{1}{3}, \ \ldots$$

Digitized by Google

VIII. Analyse indéterminée.

36. Des formules

$$Q_n = AQ'_1Q'_{n-1} + Q_1Q_{n-1}, \quad Q'_n = Q'_1Q_{n-1} + Q_1Q'_{n-1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

on déduit

$$Q_n + Q'_n\sqrt{A} = Q_{n-1}(Q_1 + Q'_1\sqrt{A}) + Q'_{n-1}\sqrt{A}\,(Q_1 + Q'_1\sqrt{A}),$$

ou

$$Q_n + Q'_n\sqrt{A} = (Q_{n-1} + Q'_{n-1}\sqrt{A})(Q_1 + Q'_1\sqrt{A}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Par conséquent :

1° *Les binômes*

$$Q_1 + Q'_1\sqrt{A}, \quad Q_2 + Q'_2\sqrt{A}, \quad Q_3 + Q'_3\sqrt{A}, \ldots$$

forment une progression par quotient;

2°

$$Q_n + Q'_n\sqrt{A} = (Q_1 + Q'_1\sqrt{A})^n \text{ (*)}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

3°

$$Q_n = \frac{1}{2}\left[(Q_1 + Q'_1\sqrt{A})^n + (Q_1 - Q'_1\sqrt{A})^n\right], \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

$$Q'_n = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(Q_1 + Q'_1\sqrt{A})^n - (Q_1 - Q'_1\sqrt{A})^n\right]; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

4° *L'équation*

$$y^2 - Az^2 = +1$$

est vérifiée par

$$y = Q_n, \quad z = Q'_n.$$

37. Problème. *Trouver tous les nombres entiers tels que le carré de chacun d'eux soit la somme de deux carrés consécutifs.*

L'équation

$$x^2 = y^2 + (y+1)^2$$

(*) Cette démonstration me paraît plus simple que celle qui a été donnée par M. Serret, d'après Lagrange (*Cours d'Algèbre supérieure,* 3me édit., t. I, p. 75).

Digitized by Google

étant mise sous la forme

$$2x^2 - (2y+1)^2 = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

on a, par les formules connues :

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} + (\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right], \quad y = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1} - (\sqrt{2}-1)^{2n-1} - 2\right]. \quad (55)$$

Le problème, on le voit, est des plus simples; mais il fait découvrir des propriétés intéressantes.

38. Écrivons ainsi la première expression :

$$u_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^{n-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^{n-1} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

La somme des binômes

$$3+2\sqrt{2}, \quad 3-2\sqrt{2}$$

est 6; leur produit est 1. Par conséquent, la suite

$$u_1, \quad u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

est récurrente; et l'on a

$$u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Le calcul direct donne

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 5;$$

après quoi l'on trouve

$$u_3 = 29, \quad 4_4 = 169, \quad u_5 = 985, \quad u_6 = 5\,741, \ldots \text{ (*)}.$$

39. Les nombres

$$1, \quad 5, \quad 29, \quad 169, \quad 985, \quad 5\,741, \ldots$$

jouissent d'une propriété remarquable.

(*) Moret-Blanc (*Nouvelles Annales*, 1882, p. 261).

Digitized by Google

On a

$$5 = 1^2 + 2^2,\quad 29 = 2^2 + 5^2,\quad 169 = 5^2 + 12^2,\quad 985 = 12^2 + 29^2,\quad 5\,741 = 29^2 + 70^2, \ldots$$

On est donc conduit à supposer

$$u_{n+1} = v_n^2 + v_{n+1}^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

en appelant v_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite récurrente

$$1,\quad 2,\quad 5,\quad 12,\quad 29,\quad 70, \ldots$$

dans laquelle

$$v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Cette équation donne

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

A cause de

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right], \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

on doit, *si la relation* (58) *est générale,* avoir, *identiquement :*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right]\\ &= \frac{1}{8}\left\{\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right]^2 + \left[(1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}\right]^2\right\}.\end{aligned}\right\} \quad . . \quad (61)$$

40. Vérification. Le second membre égale

$$\frac{1}{8}\left[(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n} + (1+\sqrt{2})^{2n-2} + (1-\sqrt{2})^{2n-2} - 2(-1)^n - 2(-1)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-2}(4+2\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})^{2n-2}(4-2\sqrt{2})\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-2}(\sqrt{2}+1) + (1-\sqrt{2})^{2n-2}(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1} - (1-\sqrt{2})^{2n-1}\right].$$

Digitized by Google

41. L'identité (61) étant vérifiée, les hypothèses précédentes le sont également; et, en conséquence :

1° *Le nombre*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2n-1}-(1-\sqrt{2})^{2n-1}\right]$$

est la somme des carrés de deux nombres entiers;

2° *Si le carré d'un nombre entier égale la somme de deux carrés consécutifs, ce nombre est la somme de deux carrés.*

42. Remarques. I. A cause des formules (60) et (55) :

1° *Si*

$$n = 2k - 1, \quad v_n = u_k;$$

2° *Si*

$$n = 2k, \quad v_{n-1} = u_k.$$

Ainsi, *les nombres* v, *de rang impair, ne diffèrent pas des nombres* u.

D'après cela, reprenons l'égalité

$$u_{n+1} = v_n^2 + v_{n+1}^2 \qquad (58)$$

Si n est *impair*, et égal à $2k - 1$,

$$v_n^2 = (u_k)^2.$$

Mais, par hypothèse, u_k^2 est la somme de deux carrés consécutifs, t^2, $(t+1)^2$. Conséquemment :

$$u_{n+1} = t^2 + (t+1)^2 + v_{n+1}^2 \qquad (62)$$

Si n est *pair*, et égal à $2k$,

$$v_{n+1}^2 = u_{k+1}^2 = s^2 + (s+1)^2;$$

puis

$$u_{n+1} = s^2 + (s+1)^2 + v_n^2. \qquad (63)$$

Nous pouvons donc résumer ainsi les propositions précédentes :

Si le carré d'un nombre entier est la somme de deux carrés consécutifs,

Digitized by Google

ce nombre, égal à la somme de deux carrés, est égal, aussi, à la somme de trois carrés, dont deux au moins sont consécutifs (*).

II. Les valeurs de $2y+1$, satisfaisant à l'équation (54), forment la suite récurrente :

$$1,\quad 7,\quad 41,\quad 239,\quad 1\,393,\quad 8\,119,\quad \ldots$$

On en conclut les valeurs de y :

$$0,\quad 3,\quad 20,\quad 119,\quad 696,\quad 4\,059,\quad \ldots$$

Les valeurs correspondantes de x sont, comme on l'a vu ci-dessus (39) :

$$1,\quad 5,\quad 29,\quad 169,\quad 985,\quad 5\,741,\quad \ldots$$

En effet, conformément à l'énoncé du problème :

$$1^2 = 0^2 + 1^2,\quad 5^2 = 3^2 + 4^2,\quad 29^2 = 20^2 + 21^2,\quad 169^2 = 119^2 + 120^2,$$
$$985^2 = 696^2 + 697^2,\quad 5\,741^2 = 4\,059^2 + 4\,060^2,\quad \ldots\ (^{**}).$$

43. Identités. D'après le paragraphe précédent :

$$u_{2k} = (u_k)^2 + (v_{2k})^2,\quad u_{2k+1} = (v_{2k})^2 + (u_{k+1})^2 \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

D'un autre côté :

$$\left.\begin{aligned} u_{2k} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k-1} + (\sqrt{2}-1)^{4k-1}\right],\\ u_{2k+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k+1} + (\sqrt{2}-1)^{4k+1}\right];\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

$$\left.\begin{aligned} (u_k)^2 &= \frac{1}{16}\left\{\left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1} - (\sqrt{2}-1)^{2k-1} - 2\right]^2 + \left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1} - (\sqrt{2}-1)^{2k-1} + 2\right]^2\right\},\\ (u_{k+1})^2 &= \frac{1}{16}\left\{\left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1} - (\sqrt{2}-1)^{2k+1} - 2\right]^2 + \left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1} - (\sqrt{2}-1)^{2k+1} + 2\right]^2\right\};\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

$$(v_{2k})^2 = \frac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k} - (\sqrt{2}-1)^{2k}\right]^2. \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

(*) Cet énoncé complète un curieux théorème de M. Gerono (*Nouvelles Annales*, 1882, p. 432).

(**) Les vérifications se font rapidement, au moyen de la *Table des quarrés et des cubes, … par C. Séguin l'aîné (Paris, an IX).*

Digitized by Google

Par conséquent, les égalités (64) deviennent :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k-1}+(\sqrt{2}-1)^{4k-1}\right]&=\frac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1}-(\sqrt{2}-1)^{2k-1}-2\right]^2\\+\frac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k-1}-(\sqrt{2}-1)^{2k-1}+2\right]^2&+\frac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k}-(\sqrt{2}-1)^{2k}\right]^2,\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{4k+1}+(\sqrt{2}-1)^{4k+1}\right]&=\frac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1}-(\sqrt{2}-1)^{2k+1}-2\right]^2\\+\frac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k+1}-(\sqrt{2}-1)^{2k+1}+2\right]^2&+\frac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{2k}-(\sqrt{2}-1)^{2k}\right]^2.\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Ces identités, assez curieuses, complètent celle qui a été donnée au n° 40 (*). Elles sont comprises dans l'identité *unique :*

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}\right]&=\frac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{n-1}-(\sqrt{2}-1)^{n-1}-2\right]^2\\+\frac{1}{16}\left[(\sqrt{2}+1)^{n-1}-(\sqrt{2}-1)^{n-1}+2\right]^2&+\frac{1}{8}\left[(\sqrt{2}+1)^{n}-(\sqrt{2}-1)^{n}\right]^2;\end{aligned}\right\} \quad (G)$$

dont la vérification est facile (**).

44. Généralisation. Soit, au lieu de l'équation (54),

$$Ax^2 - z^2 = 1; \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

d'où

$$x = \frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(p\sqrt{A}+q)^{2n-1}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-1}\right], \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

en supposant

$$Ap^2 - q^2 = 1. \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

Essayons si l'on peut avoir, *identiquement :*

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{A}}\left[(p\sqrt{A}+q)^{2n-1}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-1}\right]&=\frac{1}{4A^2}\left[(p\sqrt{A}+q)^{n-1}-(p\sqrt{A}-q)^{n-1}-2\right]^2\\+\frac{1}{4A^2}\left[(p\sqrt{A}+q)^{n-1}-(p\sqrt{A}-q)^{n-1}+2\right]^2&+\frac{1}{4A^2}\left[(p\sqrt{A}+q)^{n}-(p\sqrt{A}-q)^{n}\right]^2.\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

(*) On ne doit pas oublier que *chacun des termes est un nombre entier.*

(**) Dans celle-ci, les termes ne sont pas nécessairement *entiers.* Si, par exemple, $n = 1$, on a :

$$1 = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}.$$

Digitized by Google

Le second membre, multiplié par $2A^2$, devient

$$\left[(p\sqrt{A}+q)^{n-1}-(p\sqrt{A}-q)^{n-1}\right]^2+4+\left[(p\sqrt{A}+q)^n-(p\sqrt{A}-q)^n\right]^2$$
$$=(p\sqrt{A}+q)^{2n-2}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-2}+(p\sqrt{A}+q)^{2n}+(p\sqrt{A}-q)^{2n}$$
$$=(p\sqrt{A}+q)^{2n-2}(Ap^2+q^2+1+2pq\sqrt{A})+(p\sqrt{A}-q)^{2n-2}(Ap^2+q^2+1-2pq\sqrt{A})$$
$$=2(p\sqrt{A}+q)^{2n-2}(Ap^2+pq\sqrt{A})+2(p\sqrt{A}-q)^{2n-2}(Ap^2-pq\sqrt{A})$$
$$=2p\sqrt{A}\left[(p\sqrt{A}+q)^{2n-1}+(p\sqrt{A}-q)^{2n-1}\right].$$

La relation (70) se réduit donc à

$$A=2p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Substituant dans (69), on trouve

$$2p^3=q^2+1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

ou

$$(2p)^3=(2q)^2+4.$$

D'après Fermat, les seuls nombres entiers qui vérifient cette équation sont $p=1$, $q=1$ (*).

Mais comme les nombres A, p, q, satisfaisant aux conditions (69), (71), (72), sont *admissibles, quoique irrationnels,* nous avons l'*identité* suivante, laquelle remplace l'égalité (70) :

$$\left.\begin{array}{l} 4\sqrt{q^2+1}\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^{2n-1}+(\sqrt{q^2+1}-q)^{2n-1}\right] \\ =2\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^n-(\sqrt{q^2+1}-q)^n\right]^2+\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^{n-1}-(\sqrt{q^2+1}-q)^{n-1}-2\right]^2 \\ +\left[(\sqrt{q^2+1}+q)^{n-1}-(\sqrt{q^2+1}-q)^{n-1}+2\right]^2. \end{array}\right\} \quad (H)$$

Dans celle-ci, *q est une quantité quelconque.*

45. Application. Soient

$$n=2, \quad q=\sqrt{15}.$$

(*) Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 12; Brassine, *Précis des œuvres mathématiques de Fermat*, p. 164; Pepin, *Journal de Mathématiques* (1875), p. 345. Je dois ces renseignements, qui m'avaient échappé, à l'obligeance de M. *Realis*.

Digitized by Google

On doit trouver

$$16\left[(4+\sqrt{15})^3+(4-\sqrt{15})^3\right]=2\left[(4+\sqrt{15})^2-(4-\sqrt{15})^2\right]^2$$
$$+\left[(4+\sqrt{15})-(4-\sqrt{15})-2\right]^2+\left[(4+\sqrt{15})-(4-\sqrt{15}+2)\right]^2,$$

ou

$$32\left[4^3+3.4.15\right]=2\left[16\sqrt{15}\right]^2+(2\sqrt{15}-2)^2+(2\sqrt{15}+2)^2,$$

ou

$$128.61=2.256.15+8.15+8,$$

ou enfin

$$61=4.15+1.$$

46. Suite. Pour rendre l'identité (H) plus symétrique, posons

$$q=\frac{c}{b},\quad \sqrt{q^2+1}=\frac{1}{b}\sqrt{b^2+c^2}=\frac{a}{b}:$$

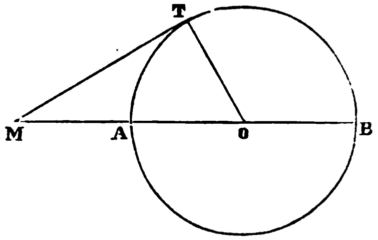
a, b, c sont trois nombres vérifiant la condition

$$a^2=b^2+c^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Notre identité se transforme en celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l} 4a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]=2\left[(a+c)^n-(a-c)^n\right]^2 \\ +\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}-2b^{n-1}\right]^2b^2+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}+2b^{n-1}\right]^2b^2. \end{array}\right\} \quad (K)$$

47. Remarques. I. D'après l'égalité (73), a, b, c représentent les côtés d'un triangle rectangle. Ces côtés satisfont donc à l'identité (K).



II. *Soit un cercle* O, ayant pour rayon b. *Si, d'un point extérieur* M, *on mène une tangente* MT *et le diamètre* MAOB, *on aura*

$$4\overline{OM}\left[\overline{MB}^{2n-1}+\overline{MA}^{2n-1}\right]=2\left[\overline{MB}^n-\overline{MA}^n\right]^2$$
$$+\left[\overline{MB}^{n-1}-\overline{MA}^{n-1}-2\overline{MT}^{n-1}\right]^2\overline{MT}^2+\left[\overline{MB}^{n-1}-\overline{MA}^{n-1}+2\overline{MT}^{n-1}\right]^2\overline{MT}^2 \ (*)$$

(*) Sauf les célèbres théorèmes de *Matthieu Stewart*, il n'en est guère dans l'énoncé desquels certaines longueurs sont élevées à des puissances quelconques. A ce point de vue, la deuxième propriété, malgré sa grande simplicité, me semble assez curieuse.

Digitized by Google

III. Si les nombres a, b, c sont entiers, l'égalité (K) peut être formulée ainsi :

Le nombre entier

$$4a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]$$

est la somme de quatre carrés, dont deux sont égaux (*), *et dont les deux autres sont divisibles par* b^2.

48. Théorème. *Si trois nombres*, a, b, c, *satisfont à la relation* (K), *ces nombres mesurent les côtés d'un triangle rectangle;* c'est-à-dire que

$$a^2=b^2+c^2.$$

La relation (K) peut être écrite ainsi :

$$4b^{2n}+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2b^2+\left[(a+c)^n-(a-c)^n\right]^2-2a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]=0;$$

puis sous cette forme un peu plus simple :

$$4b^{2n}+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2b^2-(a^2-c^2)\left[(a+c)^{2n-2}+(a-c)^{2n-2}\right]-2(a^2-c^2)^n=0. \quad (74)$$

Supposons que a, c soient donnés, et que a surpasse c. D'après le théorème de Descartes, l'équation a *une seule racine positive ;* savoir, $b^2=a^2-c^2$. Le théorème est donc démontré.

49. Remarque. Pour diviser le premier membre par $b^2+c^2-a^2$, on peut le transformer ainsi :

$$4\left[(b^2)^n-(a^2-c^2)^n\right]+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2(b^2+c^2-a^2)+4(a^2-c^2)^n$$
$$+\left[(a+c)^{n-1}-(a-c)^{n-1}\right]^2(a^2-c^2)-\left[(a+c)^{2n-2}+(a-c)^{2n-2}\right](a^2-c^2)-2(a^2-c^2)^n.$$

(*) Par exemple, en prenant $a=5$, $b=3$, $c=4$:

$$20(9^7+1)=2.6\,560^2+2\,022^2+2\,346^2;$$

ou, plus simplement,

$$5(9^7+1)=2.3\,280^2+1\,011^2+1\,173^2.$$

Il est visible que cette réduction a lieu dans tous les cas. Autrement dit :
Le nombre entier

$$a\left[(a+c)^{2n-1}+(a-c)^{2n-1}\right]$$

est la somme de quatre carrés ; etc.

Digitized by Google

L'ensemble des deux dernières lignes égale

$$2(a^2 - c^2)^n - 2(a^2 - c^2)^{n-1}(a^2 - c^2) = 0.$$

Donc l'équation (74) devient

$$4\left[(b^2)^n - (a^2 - c^2)^n\right] + \left[(a + c)^{n-1} - (a - c)^{n-1}\right]^2(b^2 + c^2 - a^2) = 0; \quad . \quad . \quad (75)$$

et, suppression faite du facteur $b^2 - (a^2 - c^2)$, elle se réduit à

$$4\left[b^{2n-2} + b^{2n-4}(a^2 - c^2) + b^{2n-6}(a^2 - c^2)^2 + \cdots + (a^2 - c^2)^{n-1}\right] + \left[(a+c)^{n-1} - (a-c)^{n-1}\right]^2 = 0. \quad (76)$$

Celle-ci est impossible si, comme on le peut admettre, a surpasse c.

IX. Développements en séries.

50. Développement de $\sqrt{A}$. Reprenons encore les formules

$$Q_n = AQ'_1Q'_{n-1} + Q_1Q_{n-1}, \quad Q'_n = Q'_1Q_{n-1} + Q_1Q'_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Il en résulte, par l'élimination de Q_1,

$$Q_nQ'_n - Q'_{n-1}Q_n = Q'_1(Q^2_{n-1} - AQ'^2_{n-1}).$$

Mais

$$Q^2_{n-1} - AQ'^2_{n-1} = +1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Donc

$$Q_{n-1}Q'_n - Q'_{n-1}Q_n = Q'_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Cette relation montre, une fois de plus, que les dénominateurs Q'_2, Q'_3, ... sont divisibles par Q'_1.

En l'écrivant ainsi :

$$\frac{Q_n}{Q'_n} - \frac{Q_{n-1}}{Q'_{n-1}} = -\frac{Q'_1}{Q'_{n-1}Q'_n},$$

Digitized by Google

on en conclut :

$$\frac{Q_2}{Q'_2}-\frac{Q_1}{Q'_1}=-\frac{Q'_1}{Q'_1Q'_2},$$
$$\frac{Q_3}{Q'_3}-\frac{Q_2}{Q'_2}=-\frac{Q'_1}{Q'_2Q'_3},$$
$$\frac{Q_4}{Q'_4}-\frac{Q_3}{Q'_3}=-\frac{Q'_1}{Q'_3Q'_4},$$
$$\dots\dots\dots;$$

puis, par le raisonnement connu,

$$\sqrt{A}=\frac{Q_1}{Q'_1}-Q'_1\left[\frac{1}{Q'_1Q'_2}+\frac{1}{Q'_2Q'_3}+\frac{1}{Q'_3Q'_4}+\cdots\right] \quad \text{(L)}$$

51. Autre développement. Des formules

$$Q_{2n}=2Q_n^2-1,\quad Q'_{2n}=2Q_nQ'_n, \quad \text{(F)}$$

on déduit :

$$Q'_nQ_{2n}-Q_nQ'_{2n}=-Q'_n, \quad \text{(78)}$$

égalité qui généralise celle-ci :

$$Q'_1Q_2-Q_1Q'_2=-Q'_1 \;(*) \quad \text{(77)}$$

Un calcul semblable au précédent donne ensuite :

$$\sqrt{A}=\frac{Q_1}{Q'_1}-\left[\frac{1}{Q'_2}+\frac{1}{Q'_4}+\frac{1}{Q'_8}+\frac{1}{Q'_{16}}+\cdots\right]. \quad \text{(M)}$$

Voici donc deux développements de $\sqrt{A}$, très différents, et dont le second est beaucoup plus convergent que le premier (**).

(*) Plus exactement, elles rentrent l'une dans l'autre, à condition que l'on prenne n périodes pour en former une.

(**) La convergence du premier développement l'emporte, déjà, sur celle de la série si connue :

$$\frac{a}{1}+\frac{1}{F'}-\frac{1}{F'G'}+\frac{1}{G'H'}-\cdots=\sqrt{A}.$$

32. Application. Soit $A = 7$. On a

$$\sqrt{7} = 2(1, 1, 1, 4);$$

et, par conséquent :

$$\frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{8}{3}, \quad \frac{Q_2}{Q'_2} = \frac{127}{48}, \quad \frac{Q_3}{Q'_3} = \frac{2\,024}{765}, \quad \frac{Q_4}{Q'_4} = \frac{32\,257}{12\,192}, \quad \frac{Q_5}{Q'_5} = \frac{514\,088}{194\,307}, \quad \frac{Q_6}{Q'_6} = \frac{8\,193\,151}{3\,096\,720}, \ldots$$

La formule (L) donne ensuite

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3} - 3\left[\frac{1}{3.48} + \frac{1}{48.765} + \frac{1}{765.12\,192} + \frac{1}{12\,192.194\,307} + \frac{1}{194\,307.3\,096\,720} + \cdots\right]$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1.16} + \frac{1}{16.255} + \frac{1}{255.4\,064} + \frac{1}{4\,064.64\,769} + \frac{1}{64\,769.1\,032\,240} + \cdots\right].$$

Pour appliquer la formule (M), il suffit d'observer que

$$Q'_8 = 2Q_4 . Q'_4 = 2.32\,257.12\,192 = 786\,554\,688.$$

On trouve, ainsi,

$$\sqrt{7} = \frac{8}{3} - \left[\frac{1}{48} + \frac{1}{12\,192} + \frac{1}{786\,554\,688} + \cdots\right].$$

Le terme qui suivrait le troisième est bien inférieur au *quart du carré de celui-ci* (*). Si l'on réduit en décimales, on peut donc conserver les unités du *dix-huitième* ordre. Effectuant, on a :

$$\frac{8}{3} = 2{,}666\,666\,666\,666\,666\,666 +$$

$$\frac{1}{48} = 0{,}020\,833\,333\,333\,333\,333 -$$

$$\frac{1}{12\,192} = 0{,}000\,082\,020\,997\,375\,328 -$$

$$\frac{1}{786\,554\,688} = 0{,}000\,000\,001\,271\,367\,414 -$$

$$\sqrt{7} = 2{,}645\,751\,311\,064\,590\,591.$$

(*) En vertu de la relation

$$Q'_{2n} = 2Q_n Q'_n,$$

dans laquelle Q_n surpasse $2Q'_n$.

Digitized by Google

53. Remarque. La formule (M) peut être écrite ainsi :

$$\frac{Q'_1}{Q'_2}+\frac{Q'_1}{Q'_4}+\frac{Q'_1}{Q'_8}+\cdots=Q_1-Q'_1\sqrt{A}.$$

A cause de

$$Q_1^2-AQ_1'^2=+1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

le second membre équivaut à

$$Q_1-\sqrt{Q_1^2-1}.$$

De plus, les termes du premier membre sont égaux, respectivement, à

$$\frac{Q'_1}{Q'_2},\quad \frac{Q'_1}{Q'_2}\cdot\frac{Q'_2}{Q'_4},\quad \frac{Q'_1}{Q'_2}\cdot\frac{Q'_2}{Q'_4}\cdot\frac{Q'_4}{Q'_8},\ \ldots;$$

ou, d'après la relation

$$\frac{Q'_n}{Q'_{2n}}=\frac{1}{2Q_n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

égaux à

$$\frac{1}{2Q_1},\quad \frac{1}{2Q_1.2Q_2},\quad \frac{1}{2Q_1.2Q_2.2Q_4},\ \ldots$$

Si donc nous posons

$$Z_n=2Q_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

nous aurons, au lieu de l'égalité (M),

$$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_1Z_2}+\frac{1}{Z_1Z_2Z_4}+\cdots=\frac{1}{2}\left(Z_1-\sqrt{Z_1^2-4}\right) \quad \ldots\ldots \quad (N)$$

Cette formule remarquable est due, je pense, à M. le capitaine Moreau (*). Pour l'appliquer, on doit, après avoir pris arbitrairement $Z_1>2$, faire usage de la relation

$$Z_{2n}=Z_n^2-2 \ (^{**}), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

transformée de

$$Q_{2n}=2Q_n^2-1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F)$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1878, pp. 139 et 156.

(**) Dans la théorie des équations réciproques, si l'on fait, suivant l'usage,

$$Z_n=x^n+x^{-n},$$

on a aussi :

$$Z_{2n}=Z_n^2-2.$$

Digitized by Google

54. Application. Soit $Z_1 = 3$; et, par conséquent,

$$Z_2 = 7, \quad Z_4 = 47, \quad Z_8 = 2\,207, \quad Z_{16} = 4\,870\,847, \ldots;$$

puis

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2\,207} + \frac{1}{3.7.47.2\,207.4\,870\,847} + \cdots = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

résultat curieux obtenu par M. Lucas (*).

55. Autre remarque. On sait que

$$\sqrt{N^2 - 1} = N - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2N - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2N - 2 + \cdots}}}}.$$

Donc

$$Q_1 - \sqrt{Q_1^2 - 1} = 1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2Q_1 - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2Q_1 - 2 + \cdots}}}},$$

ou

$$\frac{1}{2}(Z_1 - \sqrt{Z_1^2 - 4}) = 1 - \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cdots}}};$$

ou encore, par une transformation connue,

$$\frac{1}{2}(Z_1 - \sqrt{Z_1^2 - 4}) = \cfrac{1}{Z_1 - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{Z_1 - 2 + \cdots}}}}}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1878, p. 138.

Digitized by Google

Par conséquent :

La fraction continue périodique

$$x = 0,\ Z_1 - 1\ (1,\ Z_1 - 2),$$

dans laquelle Z_1 *surpasse* 2, *équivaut à la série*

$$\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_4} + \frac{1}{Z_1 Z_2 Z_4 Z_8} + \cdots \text{ (*)}.$$

X. Relation entre deux séries.

56. Nous avons trouvé :

$$Q'_{n+1} = 2Q_1 Q'_n - Q'_{n-1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

$$\frac{1}{Q'_1 Q'_2} + \frac{1}{Q'_2 Q'_3} + \frac{1}{Q'_3 Q'_4} + \cdots = \frac{Q_1 - Q'_1 \sqrt{A}}{Q'^2_1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (L)$$

$$\frac{1}{Q'_2} + \frac{1}{Q'_4} + \frac{1}{Q'_8} + \cdots = \frac{Q_1 - Q'_1 \sqrt{A}}{Q'_1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (M)$$

De plus, à cause de

$$Q_1 = \frac{Q'_2}{2Q'_1}, \quad A = \frac{Q_1^2 - 1}{Q'^2_1},$$

(*) Signalons, ici, une particularité assez curieuse.

Si l'on suppose

$$Z_1 = 2 \cos \omega,$$

on trouve

$$Z_2 = 2 \cos 2\omega, \quad Z_4 = 2 \cos 4\omega, \quad Z_8 = 2 \cos 8\omega, \ \ldots;$$

puis, par l'application *illégitime* de la formule (N) :

$$\frac{1}{2 \cos \omega} + \frac{1}{2^2 . \cos \omega \cos 2\omega} + \frac{1}{2^3 \cos \omega . \cos 2\omega . \cos 4\omega} + \cdots = \cos \omega - \sqrt{-1} \sin \omega.$$

Ce résultat, qu'admettraient certains Disciples de Wronski, est *complètement absurde*.

Digitized by Google

la formule (43) est la même chose que

$$Q'_{n+1} = \frac{Q'_2}{Q'_1} Q'_n - Q'_{n-1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

et

$$Q_1 - Q'_1 \sqrt{A} = \frac{Q'_2}{2Q'_1} - \frac{\sqrt{Q'^2_2 - 4Q'^2_1}}{2Q'_1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

Remplaçant Q'_n par v_n, et représentant par S et $\sum$ les sommes des deux séries, nous avons :

$$v_{n+1} = \frac{v_2}{v_1} v_n - v_{n-1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

$$S = \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots = \frac{1}{2v_1^2}\left[v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4v_1^2}\right], \quad \ldots \quad (84)$$

$$\sum = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \cdots = \frac{1}{2v_1^2}\left[v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4v_1^2}\right], \quad \ldots \quad (85)$$

$$\sum = v_1 S. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

57. Théorème. *Soit une série*

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \cdots,$$

dont les termes satisfont à la loi de récurrence :

$$v_n = v_{n-1} \frac{v_2}{v_1} - v_{n-2}.$$

Si l'on en déduit les séries convergentes :

$$S = \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots,$$

$$\sum = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \frac{1}{v_{16}} + \cdots,$$

on a, entre les sommes S, $\sum$, *la relation*

$$\sum = v_1 S.$$

En outre, ces sommes sont données par les formules (84), (85).

Digitized by Google

58. Remarque. En multipliant, par un facteur convenable, tous les termes d'une série, on peut la faire commencer par 1 (*). Cela étant, si l'on suppose $v_1 = 1$, on a, au lieu des formules précédentes :

$$v_n = v_2 . v_{n-1} - v_{n-2}, \quad \ldots \ldots \quad (87)$$

$$\frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_2 v_3} + \frac{1}{v_3 v_4} + \cdots = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_8} + \frac{1}{v_{16}} + \cdots = \frac{1}{2}\left(v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4}\right). \quad (P)$$

59. Applications. I. Soient $v_1 = 1$, $v_2 = 3$; et, par conséquent :

$$v_3 = 8, \quad v_4 = 21, \quad v_5 = 55, \quad v_6 = 144, \quad v_7 = 377, \quad v_8 = 987, \ldots \text{ (**)}.$$

On trouve

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.21} + \frac{1}{21.55} + \frac{1}{55.144} + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right);$$

comme ci-dessus (54).

II.

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 3, \ldots, v_n = n.$$

On obtient

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = 1, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1;$$

résultats connus.

III. Prenons

$$v_1 = \frac{1 - x^2}{x}, \quad v_2 = \frac{1 - x^4}{x^2}.$$

Il résulte, de ces valeurs initiales,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 + x^2}{x} = \frac{1}{x} + x;$$

(*) Ce facteur est, évidemment, l'inverse du premier terme.
(**) Ces nombres sont les termes de rang *pair*, dans la série de Lamé (14).

Digitized by Google

puis :

$$v_3 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right) - \left(\frac{1}{x} - x\right) = \frac{1}{x^3} - x^3 = \frac{1 - x^6}{x^3},$$

$$v_4 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^3} - x^3\right) - \left(\frac{1}{x^2} - x^2\right) = \frac{1}{x^4} - x^4 = \frac{1 - x^8}{x^4};$$

et, en général,

$$v_n = \frac{1 - x^{2n}}{x^n} \text{ (*)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (88)$$

D'un autre côté :

$$v_2^2 - 4v_1^2 = \frac{(1 - x^4)^2}{x^4} - 4\frac{(1 - x^2)^2}{x^2} = \frac{(1 - x^2)^4}{x^4},$$

$$v_2 - \sqrt{v_2^2 - 4v_1^2} = \frac{1 - x^4}{x^2} - \frac{(1 - x^2)^2}{x^2} = 2(1 - x^2),$$

$$S = \frac{x^3}{(1 - x^2)^2}, \quad \Sigma = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

Donc, par les formules (84), (85) :

$$\frac{x^3}{(1 - x^2)(1 - x^4)} + \frac{x^5}{(1 - x^4)(1 - x^6)} + \frac{x^7}{(1 - x^6)(1 - x^8)} + \cdots = \frac{x^3}{(1 - x^2)^2}, \quad . \quad (89)$$

$$\frac{x^2}{1 - x^4} + \frac{x^4}{1 - x^8} + \frac{x^8}{1 - x^{16}} + \frac{x^{16}}{1 - x^{32}} + \cdots = \frac{x^2}{1 - x^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

60. Remarque. A cause de

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x} - \frac{x}{1 - x^2},$$

(*) Ce petit calcul est celui que l'on rencontre dans la *réduction des équations réciproques*. D'ailleurs, la valeur de v_n résulte aussi de la formule générale

$$v_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

jointe à l'équation

$$t^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)t + 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$\alpha = x, \quad \beta = \frac{1}{x}.$$

Digitized by Google

ou par le changement de x^2 en x, la dernière *identité* devient

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\frac{x^8}{1-x^{16}}+\cdots=\frac{x}{1-x}\ (*) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Quant à la relation (89), si l'on supprime le facteur commun x^3, et que l'on change encore x^2 en x, elle se réduit à

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}; \quad . \quad (92)$$

puis à

$$\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)}+\frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}+\cdots=1 \quad . \quad (Q)$$

XI. — Sur la formule (Q).

61. Nous avons obtenu cette formule en supposant x *positif*, mais moindre que l'unité. Si x égale 1, elle se réduit à

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots=1;$$

résultat exact, déjà indiqué (59, II). Attribuons donc, à la quantité x, des valeurs supérieures à l'unité.

En général,

$$\frac{x^n}{(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^n)}$$
$$=\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}-\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}.$$

Donc, *identiquement* :

$$\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{(1+x)(1+x+x^2)}+\cdots+\frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^n)}$$
$$=1-\frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n};$$

(*) Celle-ci est connue; mais on n'aurait pu s'attendre à la déduire de la théorie des fractions continues.

Digitized by Google

ou, si l'on appelle S_n la somme des n premiers termes de la série (Q) :

$$S_n = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}\right];$$

ou, plus simplement,

$$S_n = \frac{x^n - 1}{x^{n+1} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

De cette formule *générale,* on conclut :

1° Pour $x < 1$: *lim* $S_n = 1$; comme ci-dessus;

2° Pour $x > 1$: *lim* $S_n = \frac{1}{x}$.

Ainsi, *quand* x *surpasse* 1, la relation (Q) doit être remplacée par celle-ci :

$$\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)} + \cdots = \frac{1}{x} \quad . \quad (94)$$

62. Le terme général de la série (92) est

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}.$$

Développé (*), il devient

$$x^{k-1}\left[1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots\right]\left[1 + x^{k+1} + x^{2k+2} + x^{3k+3} + \cdots\right].$$

Dans ce produit, supposé effectué, chaque terme a la forme

$$x^{k-1+k\alpha+(k+1)\beta}.$$

Soit

$$k - 1 + k\alpha + (k+1)\beta = n,$$

ou

$$k\alpha + (k+1)\beta = n - k + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

De ce qui précède, nous pouvons d'abord conclure les propositions suivantes :

1° *Dans le développement de la fraction*

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})},$$

(*) On suppose $x < 1$.

Digitized by Google

le coefficient de x^n *égale le nombre des solutions entières* (non négatives) *de l'équation* (95);

2° *Dans le développement, suivant les puissances entières et positives de* x, *de la série*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots,$$

le coefficient de x^n *égale le nombre total des solutions entières* (non négatives) *des* n + 1 *équations :*

$$\alpha+2\beta=n,\quad 2\alpha+3\beta=n-1,\quad 3\alpha+4\beta=n-2,\ldots,\ (n+1)\alpha+(n+2)\beta=0. \quad (96)$$

63. Théorème. *Si l'on considère les solutions entières* (non négatives) *de chacune des* n + 1 *équations* (96), *le nombre total de ces solutions est* n + 1.

En effet, dans le développement de $\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$ (92), le coefficient de x^n est $n+1$.

64. Remarques. I. Ce coefficient égale le nombre des équations (96).

II. Le nombre des solutions entières (non négatives) de l'équation (95) est, comme on sait, *égal à l'un des deux quotients entiers de* $n-k+1$ par $k(k+1)$. Telle est donc l'expression du coefficient de x^n, dans le développement de la fraction

$$\frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}\ (*).$$

III. La dernière des équations (96) est

$$(n+1)\alpha+(n+2)\beta=0:$$

elle admet une seule solution. Si l'on en fait abstraction, on peut rejeter les valeurs de k supérieures à $n-k+1$ (**).

(*) Il semble, d'après cela, que ce coefficient ne peut être évalué exactement.
(**) En effet, *un*, au moins, *des termes* $k\alpha$, $(k+1)\beta$, *surpassera* $n-k+1$.

Digitized by Google

L'énoncé précédent peut donc être ainsi modifié :

Le nombre total des solutions entières (non négatives) *de chacune des* $\frac{n}{2}$ *ou* $\frac{n+1}{2}$ *équations :*

$$\alpha + 2\beta = n, \quad 2\alpha + 3\beta = n - 1, \quad 3\alpha + 4\beta = n - 2, \ldots$$

est n.

65. Applications. I. $n = 12$. Les *six* équations à résoudre sont :

$$\alpha + 2\beta = 12, \quad 2\alpha + 3\beta = 11, \quad 3\alpha + 4\beta = 10, \quad 4\alpha + 5\beta = 9, \quad 5\alpha + 6\beta = 8, \quad 6\alpha + 7\beta = 7.$$

La *première* est vérifiée par :

$$\alpha = 12, \beta = 0; \quad \alpha = 10, \beta = 1; \quad \alpha = 8, \beta = 2; \quad \alpha = 6, \beta = 3;$$
$$\alpha = 4, \beta = 4; \quad \alpha = 2, \beta = 5, \quad \alpha = 0, \beta = 6.$$

La *deuxième*, par :

$$\alpha = 1, \beta = 3; \quad \alpha = 4, \beta = 1.$$

La *troisième*, par :

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1.$$

La *quatrième* et la *cinquième* sont impossibles.

La *sixième* admet la solution :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

En tout, *douze* solutions.

II. $n = 13$. Les *sept* équations à résoudre sont :

$$\alpha + 2\beta = 13, \quad 2\alpha + 3\beta = 12, \quad 3\alpha + 4\beta = 11, \quad 4\alpha + 5\beta = 10, \quad 5\alpha + 6\beta = 9,$$
$$6\alpha + 7\beta = 8, \quad 7\alpha + 8\beta = 7.$$

La *première* admet *sept* solutions :

$$\alpha = 13, \beta = 0; \quad \alpha = 11, \beta = 1; \quad \alpha = 9, \beta = 2; \quad \alpha = 7, \beta = 3;$$
$$\alpha = 5, \beta = 4; \quad \alpha = 3, \beta = 5; \quad \alpha = 1, \beta = 6.$$

Digitized by Google

La *deuxième* en admet *trois* :

$$\alpha = 6,\quad \beta = 0;\qquad \alpha = 3,\quad \beta = 2;\qquad \alpha = 0,\quad \beta = 4.$$

La *troisième* en admet *une* :

$$\alpha = 1,\quad \beta = 2.$$

La *quatrième* en admet *une* :

$$\alpha = 0,\quad \beta = 2.$$

La *cinquième* et la *sixième* sont impossibles.

La *septième* est vérifiée par :

$$\alpha = 1,\quad \beta = 2.$$

En tout, *treize* solutions.

66. Autre théorème (*). *Si l'on considère les solutions entières* (non négatives), *de chacune des équations*

$$x + 2y = n - 1,\quad 2x + 3y = n - 3,\quad 3x + 4y = n - 5,\ \ldots,$$

le nombre total de ces solutions égale l'excès de $n + 2$ *sur le nombre des diviseurs de* $n + 2$.

67. Série d'intégrales. L'égalité

$$\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+x+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)} + \cdots = 1 \quad . \quad (Q)$$

donne, par intégration,

$$\sum_0^\infty \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1+x+\cdots+x^n)(1+x+\cdots+x^{n+1})} = 1. \quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (R)$$

Cette sommation paraît assez remarquable, les intégrales qui y entrent étant de plus en plus compliquées, à mesure que n augmente.

(*) Il résulte de la série (Q), combinée avec la *série de Lambert*. Ces propositions ont été généralisées par M. Ernest Cesàro, dans le beau Mémoire intitulé : *Sur diverses questions d'Arithmétique*.

Digitized by Google

68. Une identité. Si l'on essaie d'évaluer

$$\int_0^1 \frac{x^{2k-2}dx}{(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k-2})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k})},$$

on est conduit à l'*identité*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^2-x^k=(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{k+1}), \quad \text{(S)}$$

dont la vérification est facile (*), et qui a de nombreuses conséquences.

En voici quelques-unes :

1° *L'équation*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^2-x^k=0$$

se décompose en

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}=0, \quad 1+x+x^2+\cdots+x^{k+1}=0.$$

2° *Le polynôme*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{2n})^2-x^{2n},$$

égal à

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+2x^n+x^{n+1}+\cdots+x^{2n})(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^{n+1}+\cdots+x^{2n}),$$

est égal, aussi, à

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{2n+1}).$$

3° *Aucun nombre, de la forme*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^2-x^k,$$

ne peut être premier (excepté si $k=1$).

(*) Par exemple :

$$S^2-x^k=(S-x^k)(S+x^{k+1});$$

égalité d'où l'on tire ce résultat exact :

$$S=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

Digitized by Google

XII. Quelques séries elliptiques (*).

69. Dans la relation

$$\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^2}{1+q^4}+\cdots+\frac{q^n}{1+q^{2n}}+\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right)\ (^{**}), \quad . \ . \ . \ . \quad (97)$$

posons

$$v_n=\frac{1+q^{2n}}{q^n},$$

ou

$$v_n=q^n+q^{-n}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (98)$$

Nous aurons

$$v_n=v_{n-1}v_1-v_{n-2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (99)$$

A cause de

$$v_2=v_1^2-2,$$

il est visible que *si* v_1 *est un nombre entier, supérieur à* 2, *tous les termes de la série récurrente*

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$$

sont des nombres entiers.

Soit, par exemple, $v_1=3$, valeur d'où résulte

$$q=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2.$$

La série récurrente est

$$3,\quad 7,\quad 18,\quad 47,\quad 123,\ \ldots$$

Donc, par la formule (97):

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{18}+\frac{1}{47}+\frac{1}{123}+\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (100)$$

(*) Dans ce chapitre, nous complétons ce que l'on a vu ci-dessus (17, 18, ...), et aussi les *Recherches sur quelques produits indéfinis.*

(**) *Fundamenta nova...*, p. 103.

Digitized by Google

70. Remarque. On a trouvé (17) :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{34}+\cdots=\frac{k\omega}{2\pi}\sqrt{5}\,. \quad (24)$$

Donc, en éliminant $\frac{\omega}{2\pi}$:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{34}+\cdots}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{18}+\frac{1}{47}+\frac{1}{123}+\cdots}=k\sqrt{5}\,. \quad (101)$$

Ainsi le module k, répondant à $q=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, est donné par le rapport de deux séries fort simples (*).

71. Généralisation. Reprenons les égalités :

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q^3}+\cdots+\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}}+\cdots=\frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}}, \quad (23)$$

$$\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^2}{1+q^4}+\cdots+\frac{q^n}{1+q^{2n}}+\cdots=\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega}{\pi}-1\right). \quad (97)$$

Dans la première, posons, comme précédemment,

$$\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}}=\frac{1}{(1+q)v_n}; \quad (21)$$

et dans la seconde, afin d'éviter toute ambiguïté :

$$\frac{q^n}{1+q^{2n}}=\frac{1}{w_n}.$$

Il est visible que

$$v_1=1, \quad v_2=q+\frac{1}{q}-1,$$

$$v_n=v_{n-1}v_2-v_{n-2}. \quad (102)$$

(*) On ne doit pas oublier que la formule *classique* est

$$\sqrt{k}=2q^{\frac{1}{4}}\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

(*Recherches...*, p. 3).

Digitized by Google

On trouve aussi :

$$w_1 = q + \frac{1}{q} = v_2 + v_1;$$

et, en général,

$$w_n = v_n + v_{n+1} \text{ (*)} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (103)$$

Par conséquent, *si* $q + \frac{1}{q}$ *égale un nombre entier* a, *les nombres* $v_1, v_2, \dots, v_n$, *et les nombres* $w_1, w_2, \dots, w_n$, *sont entiers*. En outre, les premiers et les seconds vérifient la condition (103).

Cela posé, la formule (23) devient :

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} + \dots = \frac{1+q}{\sqrt{q}} \frac{k\omega}{2\pi};$$

et la formule (97) :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_n} + \dots = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Par suite, eu égard à la relation (103) :

$$\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} + \dots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{v_2 + v_3} + \dots + \frac{1}{v_n + v_{n+1}} + \dots} = \frac{1+q}{\sqrt{q}} \cdot k;$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} + \dots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{v_2 + v_3} + \dots + \frac{1}{v_n + v_{n+1}} + \dots} = k\sqrt{a+2} \text{ (**)} \quad \dots \quad (T)$$

(*) Cette relation simple s'observe dans la formule (101).

(**) Soit

$$\frac{1+q}{\sqrt{q}} = \sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}} = t.$$

Il est clair que

$$q + \frac{1}{q} = a = t^2 - 2.$$

72. Exemples. I. $a = 4$. On conclut de cette valeur, à cause de $v_1 = 1$:

$$v_2 = 3,\quad v_3 = 10,\quad v_4 = 27,\quad v_5 = 71,\quad v_6 = 186,\ \ldots;$$

puis

$$\frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{71} + \frac{1}{186} + \cdots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{37} + \frac{1}{98} + \frac{1}{257} + \cdots} = k\sqrt{6}.$$

II. $a = 5$.

$$v_1 = 1,\quad v_2 = 4,\quad v_3 = 15,\quad v_4 = 56,\quad v_5 = 209,\quad v_6 = 780,\ \ldots$$

$$\frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{56} + \frac{1}{209} + \frac{1}{780} + \cdots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{19} + \frac{1}{71} + \frac{1}{265} + \frac{1}{989} + \cdots} = k\sqrt{7}.$$

73. Remarques. I (*). *Soit* a *un nombre entier, égal ou supérieur à* 3 (**). *Soit* q *une racine de l'équation*

$$t^2 - at + 1 = 0.$$

La quantité

$$\frac{1 + q^{2n-1}}{(1 + q)q^{n-1}}$$

est un nombre entier.

II. *La relation* (T) *subsiste pour toute valeur de* a, *supérieure à* 3.

En effet, dans les calculs précédents, rien n'exprime que a soit un nombre entier.

74. Une identité. En opérant comme le fait Legendre (***), on trouve :

$$\frac{1}{1 - q^a} + \frac{q^b}{1 - q^{a+c}} + \frac{q^{2b}}{1 - q^{a+2c}} + \cdots = \frac{1}{1 - q^b} + \frac{q^a}{1 - q^{b+c}} + \frac{q^{2a}}{1 - q^{b+2c}} + \cdots, \qquad \text{(U)}$$

identité dont un cas particulier a été donné précédemment (20, II).

(*) Analogue à celle qui constitue le *théorème* de la page 15.

(**) Afin que v_2 ne soit pas inférieur à 2.

(***) *Fonctions elliptiques*, t. III, p. 132.

Digitized by Google

Dans le développement de chacun des deux membres, *le coefficient de* q^n *est le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation*

$$ax + by + cxy = n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

75. Remarque. Si l'on écrit ainsi cette équation :

$$(cx + b)(cy + a) = nc + ab, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

et que l'on pose

$$nc + ab = dd',$$

d, d' étant des diviseurs *conjugués*, on aura

$$x = \frac{d - b}{c}, \quad y = \frac{d' - a}{c}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

pourvu que ces valeurs soient entières (non négatives).

76. Vérification. Soient

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad n = 78.$$

L'équation (105) est, dans le cas actuel,

$$(5x + 3)(5y + 2) = 396.$$

Elle est vérifiée par :

$$x = 0,\ y = 26; \quad x = 3,\ y = 4; \quad x = 6,\ y = 2; \quad x = 39,\ y = 0.$$

Par conséquent, le coefficient de q^{78} doit être 4.

En effet, le premier membre de (U) devient

$$\frac{1}{1 - q^2} + \frac{q^3}{1 - q^7} + \frac{q^6}{1 - q^{12}} + \frac{q^9}{1 - q^{17}} + \frac{q^{12}}{1 - q^{22}} + \frac{q^{15}}{1 - q^{27}} + \frac{q^{18}}{1 - q^{32}} + \frac{q^{21}}{1 - q^{37}}$$
$$+ \frac{q^{24}}{1 - q^{42}} + \frac{q^{27}}{1 - q^{47}} + \frac{q^{30}}{1 - q^{52}} + \cdots + \frac{q^{78}}{1 - q^{197}} + \cdots$$

Les seules fractions qui, développées, produisent des termes contenant q^{78}, sont :

$$\frac{1}{1 - q^2}, \quad \frac{q^6}{1 - q^{12}}, \quad \frac{q^{12}}{1 - q^{22}}, \quad \frac{q^{78}}{1 - q^{197}};$$

et il y en a quatre.

Digitized by Google

77. Suite. Jacobi a donné (*) cette identité :

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{q^5}{(1-q^5)^2}+\cdots=\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^2}{1-q^4}+3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots \quad (107)$$

En voici une autre, dont la vérification est également facile :

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\cdots=\frac{q}{1-q}+2\frac{q^2}{1-q^2}+3\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots (^{**}). \quad (108)$$

La limite commune de chacune des deux séries est

$$\frac{1}{24}+\frac{2}{3}\frac{k^2\omega^2}{\pi^2}+\frac{5}{6}\frac{k'^2\omega^2}{\pi^2}-\frac{\omega E_1(k)}{\pi^2} \; (^{***}).$$

78. Identité remarquable. La formule

$$k^2[\lambda(x)]^2=\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]' \; (^{\text{IV}}),$$

dans laquelle

$$\lambda(x)=\sin \operatorname{am}. x,$$

devient, pour $x=\omega$:

$$k^2=\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}-\frac{\Theta''(\omega)}{\Theta(\omega)} \; (^{\text{V}}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (109)$$

(*) *Fundamenta*..., p. 135. — *Recherches*..., p. 93. La valeur commune des deux membres est

$$\frac{\omega}{2\pi^2}[\omega-E_1(k)].$$

(**) Il est clair (et connu) que, dans le développement de chacun des deux membres, le coefficient de q^n est $\int n$ (*Recherches*..., p. 91).

(***) *Recherches*..., p. 92. La page 91 contient une grave faute typographique. Au lieu de la formule *absurde* :

$$\frac{dq}{q}=\frac{\pi dk}{\omega^2 kk'^2}(\omega' d\omega-\omega d\omega'),$$

on doit lire :

$$\frac{dq}{q}=\frac{\pi}{\omega^2}(\omega' d\omega-\omega d\omega').$$

(IV) Bertrand, *Calcul intégral*, p. 652.

(V) A cause de $\Theta'(\omega)=0$.

Or (*) :

$$\Theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \cdots,$$

$$\Theta''(0) = 2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 [q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots],$$

$$\Theta(\omega) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots,$$

$$\Theta''(\omega) = -2\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 [q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots].$$

La relation (109) devient donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\omega}{\pi}\right)^2 = \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} + \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}.$$

On sait que

$$\sqrt{\frac{k\omega}{2\pi}} = q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \cdots) \text{ (**)}.$$

Conséquemment,

$$\left.\begin{aligned} &2q(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots)^4 \\ &= \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} + \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(V)}$$

79. Suite. On a (***)

$$1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots = \Theta(0) = \alpha^2\alpha',$$

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots = \Theta(\omega) = \beta^2\alpha'.$$

De plus, par les propriétés des produits α, α', β, β' (IV) :

$$\frac{1}{\alpha^2\alpha'} = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \sum_0^\infty \varphi(n)q^n \cdot \sum_0^\infty \psi(n)q^n,$$

$$\frac{1}{\beta^2\alpha'} = \frac{\alpha\beta'}{\beta\alpha'} = \sum_0^\infty \varphi(n)(-q)^n \cdot \sum_0^\infty \psi(n)(-q)^n.$$

(*) *Recherches...*, p. 2.
(**) *Loc. cit.*
(***) *Loc. cit.*
(IV) *Recherches...*, pp. 1, 2, 3, 11...

Digitized by Google

La relation (V) est donc remplacée par celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}&2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4\\&=(q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots)\sum_0^\infty\varphi(n)\,q^n\,.\sum_0^\infty\psi(n)q^n\\&+(q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots)\sum_0^\infty\varphi(n)(-q)^n\sum_0^\infty\psi(n)(-q)^n,\end{aligned}\right\}\ldots\quad(110)$$

dans laquelle il n'entre pas de fractions. Mais on peut trouver un développement beaucoup plus simple.

80. Suite. A cet effet, cherchons les expressions de $\Theta''(0)$, $\Theta''(\omega)$, *sous formes finies.*

La formule de *définition :*

$$\Theta(x)=\alpha'\prod_0^\infty\left(1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right)\ (^*),$$

ou

$$\mathfrak{L}.\Theta(x)=\mathfrak{L}.\alpha'+\sum_0^\infty\mathfrak{L}\left(1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right)$$

donne

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}=2\frac{\pi}{\omega}\sum_0^\infty\frac{q^{2n+1}\sin\frac{\pi x}{\omega}}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}},$$

$$\frac{\Theta(x)\,\Theta''(x)-[\Theta'(x)]^2}{[\Theta(x)]^2}=2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty q^{2n+1}\frac{(1+q^{4n+2})\cos\frac{\pi x}{\omega}-2q^{2n+1}}{\left[1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{\omega}+q^{4n+2}\right]^2}\quad\ldots\quad(111)$$

Donc, à cause de $\Theta'(0)=0$, $\Theta'(\omega)=0$:

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}=2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty\frac{q^{2n+1}(1-q^{2n+1})^2}{(1-q^{2n+1})^4},$$

$$-\frac{\Theta''(\omega)}{\Theta(\omega)}=2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty\frac{q^{2n+1}(1+q^{2n+1})^2}{(1+q^{2n+1})^4};$$

(*) *Recherches...*, p. 2.

Digitized by Google

ou, plus simplement :

$$\frac{\Theta''(0)}{\Theta(\omega)} = +2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1-q^{2n+1})^2}, \quad \ldots \ldots \quad (112)$$

$$\frac{\Theta''(\omega)}{\Theta(\omega)} = -2\frac{\pi^2}{\omega^2}\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1+q^{2n+1})^2} \quad \ldots \ldots \quad (113)$$

On a

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2\omega k'}{\pi}}, \quad \Theta(\omega) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \text{ (*)}. \quad \ldots \ldots \quad (114)$$

D'un autre côté, Jacobi a donné (**) les formules :

$$\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1-q^{2n+1})^2} = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - E_1(k)\right], \quad \ldots \ldots \quad (115)$$

$$\sum_0^\infty \frac{q^{2n+1}}{(1+q^{2n+1})^2} = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[E_1(k) - \omega k'^2\right]. \quad \ldots \ldots \quad (116)$$

Donc, par les égalités (112), (113) :

$$\Theta''(0) = \left[\omega - E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2k'}{\pi\omega}}, \quad \ldots \ldots \quad (117)$$

$$\Theta''(\omega) = \left[\omega k'^2 - E_1(k)\right]\sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \quad \ldots \ldots \quad (118)$$

81. Suite. Reprenons l'identité

$$2q(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots)^4 = \frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots} + \frac{q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}. \quad (V)$$

La première fraction (78) égale

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} = \frac{\omega}{2\pi^2}\left[\omega - E_1(k)\right].$$

(*) *Recherches*..., p. 2.
(**) *Fundamenta*..., p. 111.

Or, le second membre, limite de la série

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{q^5}{(1-q^5)^2}+\cdots$$

(115), est aussi la limite de chacune des séries :

$$\frac{q}{1-q^2}+2\frac{q^2}{1-q^4}+3\frac{q^3}{1-q^6}+\cdots,$$

$$q+2q^2+4q^3+4q^4+6q^5+\cdots+\frac{n}{i}q^n\int i+\cdots \text{ (*)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\cdots}{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}=\sum_1^\infty \frac{n}{i}q^n\int i \quad\ldots\ldots \quad (119)$$

Dans le second membre, i *est le plus grand nombre impair qui divise* n.

Si l'on change q en $-q$, on a le développement de la seconde fraction, savoir :

$$\frac{q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}=-\sum_1^\infty \frac{n}{i}(-q)^n\int i \quad\ldots\ldots \quad (120)$$

En outre, par la suppression du facteur 2 :

$$q[1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots]^4=\sum_1^\infty q^i\int i; \quad\ldots\ldots \quad (121)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$[q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots]^4=\sum_1^\infty q^{4i}\int i.$$

Nous retrouvons donc le beau théorème de Jacobi.

82. Remarques. I. Dans l'égalité (119), posons :

$$\frac{n}{i}\int i=P_n.$$

(*) *Recherches*..., p. 92. Ci-dessus (77) nous avons parlé des deux premières.

Digitized by Google

Il est clair que si l'on chasse le dénominateur, on a ce théorème d'arithmétique :

La fonction

$$P_n - 2P_{n-1} + 2P_{n-4} - 2P_{n-9} + \cdots$$

égale $(-1)^{n-1}n$ *ou zéro, selon que* n *est ou n'est pas carré.*

Soit, par exemple, $n = 13$. Le calcul direct donne

$$P_{13} = 14, \quad P_{12} = 16, \quad P_9 = 13, \quad P_4 = 4;$$

et, conformément à l'énoncé,

$$14 - 2.16 + 2.13 - 2.4 = 0.$$

Soit encore $n = 16$. On a

$$P_{16} = 16, \quad P_{15} = 24, \quad P_{12} = 16, \quad P_7 = 8, \quad P_0 = 0.$$

Donc

$$16 - 2.24 + 2.16 - 2.8 = -16;$$

ce qui est exact.

II. *Sauf le cas où* n *est un carré impair,* P_n *est pair.*

III. Si

$$n = 2^\alpha i, \quad P_n = 2^\alpha P_i.$$

En effet,

$$P_i = \int i, \qquad \text{et} \qquad 2^\alpha = \frac{n}{i} \text{ (*)}.$$

IV. Groupons les termes dans lesquels i est constant : la formule (119) devient

$$\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots} = \sum_1^\infty (q^i + 2q^{2i} + 4q^{4i} + \cdots) \int i \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

(*) *Recherches...*, p. 85.

Et la formule (120) :

$$-\frac{q+4q^4+9q^9+16q^{16}+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots}=\sum_1^\infty\left(-q^i+2q^{2i}+4q^{4i}+\cdots\right)\int i.$$

Donc, par soustraction,

$$q\left(1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots\right)^4=\sum_1^\infty q^i\int i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

83. *Une formule de Cauchy.* Dans les *Comptes rendus* (t. XVII, p. 530), l'illustre Géomètre a donné l'identité suivante :

$$\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}\cdot\frac{1+\alpha t x}{1+\beta t x}\cdot\frac{1+\alpha t^2 x}{1+\beta t^2 x}\cdots=1+\frac{\alpha-\beta}{1-t}\,\frac{x}{1+\beta x}$$
$$+\frac{\alpha-\beta}{1-t}\,\frac{\alpha-\beta t}{1-t^2}\,\frac{t x^2}{(1+\beta x)(1+\beta t x)(1+\beta t^2 x)}$$
$$+\frac{\alpha-\beta}{1-t}\cdot\frac{1-\beta t}{1-t^2}\cdot\frac{1-\beta t^2}{1-t^3}\,\frac{t^3 x^3}{(1+\beta x)(1+\beta t x)(1+\beta t^2 x)}+\cdots,$$

trop peu remarquée.

Si l'on suppose

$$\alpha=0,\quad \beta=-1,\quad x=t=q,$$

elle se réduit à

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}=1+\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^2}+\cdots(^*).\quad (12\ )$$

Euler a trouvé, comme transformée du premier membre,

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

Par conséquent :

Les séries

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots,$$
$$1+\frac{q}{[1-q]^2}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^2}+\cdots$$

ont même limite.

(*) Celle-ci est due à Jacobi (*Fundamenta*..., p. 180).

Digitized by Google

Cette limite commune est

$$\frac{1}{\alpha\alpha'} = 2^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{24}}.$$

En outre, le développement de $\frac{1}{\alpha\alpha'}$, ordonné suivant les puissances de q, est, comme on sait (*),

$$\sum_0^\infty \psi(n) q^n.$$

84. Remarques. I. Dans la seconde série, *les exposants de* q, *en numérateur, sont les carrés des exposants correspondants; les dénominateurs sont les carrés des dénominateurs correspondants.*

II. La seconde série est beaucoup plus convergente que la première.

85. Suite. On trouve, de la même manière,

$$\frac{1}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \quad (124)$$

Le premier membre égale

$$\frac{1}{\beta\beta'} = \alpha = 2^{\frac{1}{6}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} \ (^{**}).$$

Telle est donc la limite de la série

$$1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \cdots \ (^{***}).$$

(*) *Recherches...*, p. 11.
(**) *Recherches...*, p. 1.
(***) A la page 52 des *Recherches*, j'ai indiqué cette autre sommation :

$$1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^9)} + \cdots = \beta$$
$$= 1 + \varphi_1(1)q + \varphi_1(2)q^2 + \varphi_1(3)q^3 + \cdots$$

Elle redonne les formules (W).

Digitized by Google

86. Remarques. I. En appelant $\varphi_i(n)$ le *nombre des décompositions de* n *en parties impaires, inégales,* on a (*) aussi

$$\alpha = 1 - \varphi_i(1)\,q + \varphi_i(2)\,q^2 - \varphi_i(3)\,q^3 + \varphi_i(4)\,q^4 - \cdots \quad . \; . \; . \; . \quad (125)$$

II. Désignons, comme dans le Mémoire cité (**), par F (g, p) le *nombre des décompositions de* g, *en parties égales ou inégales, non supérieures à* p. Alors :

$$\frac{1}{1-q^2} = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{F}(g, 1)\,q^{2g}, \quad \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)} = \sum_{g=0}^{g=\infty} \mathrm{F}(g, 2)\,q^{2g},$$

$$\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} = \sum_{g=0}^{g=\infty} \mathrm{F}(g, 3)\,q^{2g}, \ldots;$$

puis

$$\frac{q}{1-q^2} = \sum_{0}^{\infty} \mathrm{F}(g, 1)\,q^{2g+1}, \quad \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} = \sum_{0}^{\infty} \mathrm{F}(g, 2)\,q^{2g+4}, \ldots$$

. . . .

Donc, dans le premier développement de α (124), le coefficient de q^n sera

$$-\mathrm{F}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-4}{2}, 2\right) - \mathrm{F}\left(\frac{n-9}{2}, 3\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-16}{2}, 4\right) - \cdots$$

Et comme, dans le second développement (125), ce coefficient est $(-1)^n\varphi_i(n)$, on a la relation suivante, entre les nombres $\varphi_i(n)$ et F :

$$\pm\,\varphi_i(n) = \mathrm{F}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right) - \mathrm{F}\left(\frac{n-4}{2}, 2\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-9}{2}, 3\right) - \cdots \text{(***)} \quad . \; . \quad (126)$$

III. Les arguments $\frac{n-1}{2}, \frac{n-4}{2}, \frac{n-9}{2}, \cdots$ doivent être entiers. Par conséquent, cette égalité se décompose en ces deux-ci :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(n) &= \mathrm{F}\left(\frac{n-1}{2}, 1\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-9}{2}, 3\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-25}{2}, 5\right) + \cdots, \\ \varphi_i(n) &= \mathrm{F}\left(\frac{n-4}{2}, 2\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-16}{2}, 4\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n-36}{2}, 6\right) + \cdots; \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\mathrm{W})$$

selon que n est *impair* ou *pair*.

(*) *Recherches...*, pp. 4 et 5.
(**) Page 47.
(*** Le signe +, si n est *impair*.

Digitized by Google

87. Vérifications. I. $n = 35$. On doit trouver :

$$\varphi_1(35) = F(17, 1) + F(13, 3) + F(5, 5).$$

Or :

$$\varphi_1(35) = 29, \quad F(17, 1) = 1, \quad F(13, 3) = 21, \quad F(5, 5) = 7 \text{ (*)};$$

et l'on a bien

$$29 = 1 + 21 + 7.$$

II. $n = 34$. La seconde des relations (W) se réduit à

$$\varphi_1(34) = F(15, 2) + F(9, 4);$$

savoir :

$$26 = 8 + 18.$$

III. Ces relations (W) peuvent être énoncées ainsi :

1° *Soit* n *un nombre impair. Le nombre des décompositions de* n, *en parties impaires, inégales, se compose du nombre des décompositions de* $\frac{n-1}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 1, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-9}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 3, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-25}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 5, etc.;

2° *Soit* n *un nombre pair. Le nombre des décompositions de* n, *en parties impaires, inégales, se compose du nombre des décompositions de* $\frac{n-4}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 2, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-16}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 4, *augmenté du nombre des décompositions de* $\frac{n-36}{2}$, *en parties qui ne surpassent pas* 6, etc. (**).

88. Lettre a M. Hermite. « ... j'ai vu, ce matin, à la Bibliothèque » de l'Université, le n° 1 des *Comptes rendus*, contenant une *nouvelle série*,

(*) *Recherches*..., pp. 59 et 61.

(**) Dans les *Recherches*... (pp. 49 et suiv.), on trouve divers théorèmes analogues à celui-là.

Digitized by Google

» par M. Faa de Bruno. Que la formule proposée soit commode, soit; mais, » à coup sûr, elle n'est pas *nouvelle*. En effet, elle résulte, immédiatement, » de la relation si connue :

$$» \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots).$$

» L'auteur a eu la peine de changer q en q^2, en q^4, en q^8, en q^{16}; et c'est » tout. Si l'on faisait le même changement dans la formule *approchée* (p. 23), » on aurait une formule encore *plus approchée*. Serait-elle *nouvelle?* Évi- » demment non : là où il n'y a *aucune invention*, il n'y a rien de nouveau.

» On pourrait peut-être, en partant d'une autre formule de Jacobi, arriver » à quelque chose d'un peu plus neuf : et encore!

» Soit, pour abréger,

$$» S = q^2 + q^8 + q^{18} + \cdots$$

» On a :

$$» \sqrt{\frac{\omega}{\pi}(1 + k')} = 1 + 2S, \quad \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}(1 + k'_1)} = 1 + 2S_1, \quad \sqrt{\frac{\omega_2}{\pi}(1 + k'_2)} = 1 + 2S_2, \ldots;$$

» donc

$$» \lim\left[\omega_n(1 + k'_n)\right] = \pi.$$

» D'ailleurs,

$$» \omega_1(1 + k'_1) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{k'})\omega;$$

» etc., etc. Je n'insiste point, parce que la question a été traitée par Jacobi, » Gauss, Bertrand et *moi* (*).

» Parmi les innombrables formules que j'ai données dans le Mémoire » intitulé : *Recherches sur quelques produits indéfinis*, en voici deux ou » trois, applicables au problème actuel :

$$» q^{-\frac{1}{4}}\frac{\omega}{\pi}\sqrt{k} = \sum_0^\infty \left[\frac{q^a}{1 - q^{4a+1}} - \frac{q^{3a+2}}{1 - q^{4a+3}}\right],$$

$$» q^{-\frac{1}{2}}\frac{\omega k}{2\pi} = \sum_0^\infty \left[\frac{q^{2a}}{1 - q^{8a+2}} - \frac{q^{6a+4}}{1 - q^{8a+6}}\right].$$

(*) Ce mot, généralement *haïssable*, est là comme simple renseignement bibliographique.

Digitized by Google

» En les combinant, on a

$$» \ \frac{2\omega}{\pi} = \frac{\left\{ \sum_0^\infty \left[\frac{q^n}{1 - q^{4n+1}} - \frac{q^{3n+2}}{1 - q^{4n+3}} \right] \right\}^2}{\sum_0^\infty \left[\frac{q^{2n}}{1 - q^{8n+2}} - \frac{q^{6n+4}}{1 - q^{8n+6}} \right]}.$$

» On peut d'ailleurs écrire ainsi le second membre :

$$» \ \frac{[1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q^3 + \cdots]^2}{1 + \varepsilon_5 q^2 + \varepsilon_9 q^4 + \varepsilon_{13} q^6 + \cdots}.$$

» (*Recherches* ..., p. 116.)

» Liége, 20 juillet 1882. »

89. Additions. 1° Comme

$$\frac{2\omega}{\pi} = [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots]^2,$$

il s'ensuit que

$$[1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q^3 + \varepsilon_{17} q^4 + \cdots]^2 = [1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots]^2 \, [1 + \varepsilon_5 q^2 + \varepsilon_9 q^4 + \cdots]. \quad (127)$$

2° D'après Cauchy,

$$[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots]^2 = 1 + 4\left(\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots\right) (*) . \quad (128)$$

Soit

$$\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots = \sum_1^\infty A_n q^n.$$

Il est facile de voir que A_n égale *l'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant*

(*) Lire, dans les *Nouvelles Annales* (1854), un beau Mémoire de M. Genocchi.

Digitized by Google

la forme $4\mu + 1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu - 1$. Autrement dit, $A_n = \varepsilon_n$. Par suite, l'égalité (127) se réduit à

$$\left.\begin{array}{c}\left[1 + \varepsilon_5 q + \varepsilon_9 q^2 + \varepsilon_{13} q^3 + \varepsilon_{17} q^4 + \cdots\right]^2 \\ = \left[1 + \varepsilon_5 q^2 + \varepsilon_9 q^4 + \varepsilon_{13} q^6 + \cdots\right]\left[1 + 4\left(\varepsilon_1 q + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 q^3 + \cdots\right)\right];\end{array}\right\} \quad (129)$$

relation qui a de l'analogie avec celle-ci :

$$\left[1 + q + q^3 + q^6 + \cdots\right]^2 = \left[1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots\right]\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\right] \ (^*).$$

Au fond, l'égalité (129) ne diffère pas de la formule (399) des *Recherches*.

Liége, 20 mai 1883.

90. *P. S.* (26 janvier 1884). Si l'on combine la relation (128) avec celle-ci :

$$(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) = (1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - \cdots)^2 \ (^{**}),$$

on trouve :

$$(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) = 1 + 4\sum_1^\infty (-1)^n \varepsilon_n q^{2n}.$$

L'exposant 2n *est une somme de deux carrés.* Cette formule démontre un théorème de Gauss (***).

(*) Legendre, t. III, p. 111.
(**) *Recherches*..., p. 29.
(***) Voir le Mémoire de M. Genocchi.

ADDITION (*).

Sur le développement de $\sqrt{A}$.

1. Lemme I. *Soient* x, x' *deux fractions continues inverses, supérieures à l'unité. Si*

$$\frac{E}{E'}, \quad \frac{F}{F'}$$

sont les deux dernières réduites de x, *celles de* x' *seront*

$$\frac{F'}{E'}, \quad \frac{F}{E}.$$

En outre, si chacune des fractions données est symétrique,

$$E' = F \text{ (**)}.$$

2. Lemme II. *Soient, comme dans le premier Lemme,*

$$\frac{E}{E'}, \quad \frac{F}{F'}$$

les deux dernières réduites d'une fraction continue

$$x = b, c, d, \ldots, e, f.$$

(*) Suggérée par un intéressant travail de M. de Jonquières (*Comptes rendus*, février et mars 1883).

(**) *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 281.

Digitized by Google

Soient
$$\frac{P}{P'},\quad \frac{Q}{Q'}$$
les deux dernières réduites de la fraction continue symétrique
$$y = b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, d, c, b,$$
composée d'un nombre pair de termes. On a :
$$P = Q' = EE' + FF', \quad Q = E^2 + F^2, \quad P' = E'^2 + F'^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

1° x' étant la fraction continue inverse de x, il est clair que
$$y = b, c, \ldots, e, f, x';$$
et, par le premier Lemme :
$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q}{P} = \frac{F \cdot \frac{F}{E} + E}{F' \cdot \frac{F}{E} + E'} = \frac{E^2 + F^2}{EE' + FF'}.$$

Si donc (comme nous l'allons démontrer) la dernière fraction est *irréductible :*
$$Q = E^2 + F^2, \quad Q' = P = EE' + FF'.$$

2° Soit $z = \frac{E}{E'}$ la fraction continue
$$f, e, \ldots, c.$$
Le même raisonnement (bien connu) donne
$$\frac{P}{P'} = b, c, \ldots, e, f, z = \frac{F \cdot \frac{F'}{E'} + E}{F' \cdot \frac{F'}{E'} + E'} = \frac{EE' + FF'}{E'^2 + F'^2}:$$
$$P' = E'^2 + F'^2.$$

3° Soit, s'il est possible,
$$E^2 + F^2 = m\alpha, \quad EE' + FF' = m\beta.$$
Posons
$$E'^2 + F'^2 = \gamma.$$

On tire, de ces égalités,

$$(E^2 + F^2)(E'^2 + F'^2) - (EE' + FF')^2 = m\alpha\gamma - m^2\beta^2,$$

ou

$$(EF' - FE')^2 = \mathfrak{M} \,.\, m,$$

ou

$$1 = \mathfrak{M} \,.\, m;$$

ce qui est absurde si, comme on l'a supposé, le nombre entier m surpasse l'unité (*).

3. Remarques. I. Par les formules (1) :

$$P' + Q = E^2 + F^2 + E'^2 + F'^2 = \textit{somme de quatre carrés},$$
$$P + P' + Q + Q' = (E + E')^2 + (F + F')^2 = \textit{somme de deux carrés}.$$

II. *Si, après avoir pris la fraction symétrique*

$$b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, d, c, b,$$

ayant un nombre pair de termes, on écrit deux fois, trois fois, ... cette période, le numérateur de chaque dernière réduite sera la somme de deux carrés. Semblablement, le dénominateur de chaque avant-dernière réduite sera la somme de deux carrés. Enfin, chaque avant-dernier numérateur égalera chaque dernier dénominateur.

Exemple.

Première période . .	2,	3,	3,	2;
	$\frac{2}{1}$,	$\frac{7}{3}$,	$\frac{23}{10}$,	$\frac{53}{23}$;
deuxième période. . .	2,	3,	3,	2;
	$\frac{129}{56}$,	$\frac{440}{191}$,	$\frac{1\,449}{629}$,	$\frac{3\,358}{1\,449}$;
troisième période. . .	2,	3,	3,	2;
	$\frac{8\,125}{3\,527}$,	$\frac{27\,713}{12\,030}$,	$\frac{91\,264}{39\,617}$,	$\frac{210\,241}{91\,264}$.

(*) Cette importante proposition, signalée par M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*), résulte des formules

$$U = QT + PT', \quad U' = Q'T + P'T'.$$

(*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 177.)

Digitized by Google

On trouve :

$$53 = 2^2 + 7^2, \quad 10 = 1^2 + 3^2, \quad 3\,338 = 23^2 + 53^2, \quad 629 = 10^2 + 23^2,$$
$$210\,241 = 129^2 + 440^2, \quad 39\,617 = 56^2 + 191^2; \text{ etc.}$$

4. Lemme III. *La valeur de la fraction continue périodique simple,*

$$y = (b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b),$$

est donnée par chacune des formules :

$$y = \frac{Q - P' + \sqrt{(Q - P')^2 + 4P^2}}{2P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$y = \frac{Q - P' + \sqrt{(Q + P')^2 - 4}}{2P}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{(E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2)^2 + 4(EE' + FF')^2}}{2(EE' + FF')}, \quad \ldots \quad (4)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4}}{2(EE' + FF')}, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{\left[(E + F')^2 + (F - E')^2\right]\left[(E - F')^2 + (F + E')^2\right]}}{2(EE' + FF')} \quad \ldots \quad (6)$$

La première expression est la racine *positive* de l'équation

$$y = \frac{Qy + P}{Py + P'},$$

ou

$$Py^2 + (P' - Q)y - P = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

D'ailleurs, $\frac{Q}{Q'}$ est de rang *pair ;* donc

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = + \frac{1}{P'Q'},$$

ou

$$P^2 = QP' - 1;$$

etc.

En outre,

$$(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4 = (E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4(EF' - FE')^2$$
$$= (E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2 + 2EF' - 2FE')(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2 - 2EF' + 2FE')$$
$$= [(E + F')^2 + (F - E')^2][(E - F')^2 + (F + E')^2] \ (^*).$$

5. Vérification. Soient, comme ci-dessus :

$$E = 2, \quad E' = 1, \quad F = 7, \quad F' = 3;$$
$$P = 23, \quad P' = 10, \quad Q = 53, \quad Q' = 23.$$

La quantité soumise au radical prend ces diverses formes :

$$43^2 + 46^2, \quad 63^2 - 4, \quad (4 + 49 - 1 - 9)^2 + 4.(2 + 21)^2,$$
$$(4 + 49 + 1 + 9)^2 - 4, \quad [(2 + 3)^2 + (7 - 1)^2][(2 - 3)^2 + (7 + 1)^2];$$

ou, simplement :

$$43^2 + 46^2, \quad 63^2 - 4, \quad (5^2 + 6^2)(1^2 + 8^2).$$

Or,

$$43^2 + 46^2 = 1\,849 + 2\,116 = 3\,965 = 65.61.$$

6. Lemme IV. *Une réduite* $\frac{Q}{Q'}$ *peut, indifféremment, être considérée comme étant de rang pair ou de rang impair* (**).

Soit :

$$\frac{Q}{Q'} = x = a, b, c, \ldots, p, q.$$

Le quotient incomplet q surpasse l'unité, sans quoi l'on pourrait remplacer p par $p + 1$. Cela étant, on a

$$p + \frac{1}{q} = p + \cfrac{1}{q - 1 + \cfrac{1}{1}};$$

égalité d'où résulte le Lemme énoncé.

(*) Application de l'identité :

$$(ab' + ba')^2 + (aa' - bb')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2).$$

(**) Proposition connue.

Digitized by Google

On trouve :

$$53 = 2^2 + 7^2,\quad 10 = 1^2 + 3^2,\quad 3\,338 = 23^2 + 53^2,\quad 629 = 10^2 + 23^2,$$
$$210\,241 = 129^2 + 440^2,\quad 39\,617 = 56^2 + 191^2;\ \text{etc.}$$

4. Lemme III. *La valeur de la fraction continue périodique simple,*

$$y = (b, c, d, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b),$$

est donnée par chacune des formules :

$$y = \frac{Q - P' + \sqrt{(Q - P')^2 + 4P^2}}{2P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = \frac{Q - P' + \sqrt{(Q + P')^2 - 4}}{2P}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{(E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2)^2 + 4(EE' + FF')^2}}{2(EE' + FF')}, \quad \ldots \quad (4)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4}}{2(EE' + FF')}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$y = \frac{E^2 + F^2 - E'^2 - F'^2 + \sqrt{[(E + F')^2 + (F - E')^2][(E - F')^2 + (F + E')^2]}}{2(EE' + FF')} \quad \ldots \quad (6)$$

La première expression est la racine *positive* de l'équation

$$y = \frac{Qy + P}{Py + P'},$$

ou

$$Py^2 + (P' - Q)y - P = 0 \cdot \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

D'ailleurs, $\frac{Q}{Q'}$ est de rang *pair ;* donc

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = + \frac{1}{P'Q'},$$

ou

$$P^2 = QP' - 1;$$

etc.

En outre,

$$
\begin{aligned}
&(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4 = (E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2)^2 - 4(EF' - FE')^2 \\
&= (E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2 + 2EF' - 2FE')(E^2 + E'^2 + F^2 + F'^2 - 2EF' + 2FE') \\
&= \left[(E + F')^2 + (F - E')^2\right]\left[(E - F')^2 + (F + E')^2\right] \ (^*).
\end{aligned}
$$

5. Vérification. Soient, comme ci-dessus :

$$E = 2, \quad E' = 1, \quad F = 7, \quad F' = 3;$$
$$P = 23, \quad P' = 10, \quad Q = 53, \quad Q' = 23.$$

La quantité soumise au radical prend ces diverses formes :

$$43^2 + 46^2, \quad 63^2 - 4, \quad (4 + 49 - 1 - 9)^2 + 4.(2 + 21)^2,$$
$$(4 + 49 + 1 + 9)^2 - 4, \quad \left[(2 + 3)^2 + (7 - 1)^2\right]\left[(2 - 3)^2 + (7 + 1)^2\right];$$

ou, simplement :

$$43^2 + 46^2, \quad 63^2 - 4, \quad (5^2 + 6^2)(1^2 + 8^2).$$

Or,

$$43^2 + 46^2 = 1\,849 + 2\,116 = 3\,965 = 65.61.$$

6. Lemme IV. *Une réduite $\frac{Q}{Q'}$ peut, indifféremment, être considérée comme étant de rang pair ou de rang impair* (**).

Soit :

$$\frac{Q}{Q'} = x = a, b, c, \ldots, p, q.$$

Le quotient incomplet q surpasse l'unité, sans quoi l'on pourrait remplacer p par $p + 1$. Cela étant, on a

$$p + \frac{1}{q} = p + \cfrac{1}{q - 1 + \cfrac{1}{1}};$$

égalité d'où résulte le Lemme énoncé.

(*) Application de l'identité :

$$(ab' + ba')^2 + (aa' - bb')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2).$$

(**) Proposition connue.

Digitized by Google

7. Théorème I. *Soient* $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ *deux fractions irréductibles satisfaisant aux conditions*

$$Q > P > 1, \quad Q' > P' > 1, \quad QP' - PQ' = \pm 1, \quad Q > Q', \quad P > P'.$$

Moyennant la restriction indiquée dans le Lemme IV, $\frac{P}{P'}$ *est l'avant-dernière réduite de* $\frac{Q}{Q'}$ (*).

Pour fixer les idées, supposons

$$QP' - PQ' = +1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Si l'on réduit $\frac{Q}{Q'}$ en fraction continue, et que $\frac{\alpha}{\alpha'}$ soit l'avant-dernière réduite, on aura, si $\frac{Q}{Q'}$ *est de rang pair :*

$$Q\alpha' - Q'\alpha = +1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

D'après le Lemme IV, la seconde hypothèse est admissible. Cela posé, à cause de l'égalité (8), les valeurs de α' et de α sont, comme on sait, comprises dans les formules :

$$\alpha' = P' + Q'\theta, \quad \alpha = P + Q\theta; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

θ étant un entier quelconque.

1° On ne peut le supposer *positif ;* car on aurait

$$\alpha' > Q', \quad \alpha > Q.$$

2° On ne peut, davantage, le supposer *négatif :* cette hypothèse donnerait

$$\alpha' < 0, \quad \alpha < 0.$$

3° Reste donc

$$\theta = 0;$$

puis

$$\alpha' = P', \quad \alpha = P, \quad \frac{P}{P'} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

(*) Cette proposition résulte d'un problème résolu par Legendre (*Théorie des Nombres*, t. I, pp. 23, 24), au moyen de calculs et de raisonnements un peu longs.

Digitized by Google

8. Théorème II. *Soient* $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{P}$ *les deux dernières réduites de la fraction continue symétrique :*

$$y = b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b \text{ (*)}.$$

Soient a, α *deux nombres entiers satisfaisant aux conditions :*

$$Q\alpha - 2Pa = P', \quad \alpha \overline{\gtrless} 2a.$$

Si l'on fait

$$A = a^2 + \alpha,$$

les racines carrées de tous les nombres A (**) *sont données par la formule*

$$\sqrt{A} = a\,(b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b, 2a).$$

Soient

$$Y = (b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b, 2a),$$
$$X = a\,(b, c, d, e, \ldots, e, d, c, b, 2a).$$

On a, par le raisonnement habituel,

$$Y = \frac{Q\left(2a + \frac{1}{Y}\right) + P}{P\left(2a + \frac{1}{Y}\right) + P'} = \frac{(2aQ + P)Y + Q}{(2aP + P')Y + P},$$

ou

$$(2aP + P')Y^2 - 2aQY - Q = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

puis

$$\frac{1}{Y} = \frac{-aQ + \sqrt{a^2Q^2 + (2aP + P')Q}}{Q};$$

et, par conséquent,

$$X = \sqrt{a^2 + \frac{2aP + P'}{Q}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Cette valeur se réduit à $\sqrt{A}$, *si les nombres entiers* a, α *satisfont à l'équation*

$$Q\alpha - 2Pa = P', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

et si l'on suppose

$$A = a^2 + \alpha.$$

(*) Il n'est pas nécessaire qu'elle soit composée d'un nombre *pair* de termes.
(**) Il y en a une infinité.

Digitized by Google

D'ailleurs, pour que a^2 soit le plus grand carré contenu dans A, on doit avoir, conformément à l'énoncé,

$$\alpha \overline{\overline{<}} 2a \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

9. Remarques. I. Si les nombres P, Q sont *impairs*, comme ils sont premiers entre eux, l'équation (13) admet *une infinité de solutions entières et positives*.

II. Si Q est *pair*, P est *impair*. Alors P′ doit être *pair*, sans quoi l'équation (13) serait impossible.

III. $\sqrt{A}$ *ne peut se développer en une fraction continue*

$$a\,(b, c, d, \ldots, p, q, 2a)$$

dans laquelle, $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ *étant les deux dernières réduites de*

$$b, c, d, \ldots, p, q,$$

P′ *soit impair, et* Q, *pair*.

10. Applications. I.

$$y = 2,\quad 1,\quad 3,\quad 1,\quad 2.$$

Les réduites sont : $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \frac{39}{14}$.

Donc

$$P = 14,\quad P' = 5,\quad Q = 39.$$

L'équation (13) devient

$$39\alpha - 28a = 5.$$

Il en résulte

$$\alpha = 3 + 28\theta,\quad a = 4 + 39\theta;$$

puis

$$A = 4^2 + 3 = 19,\quad A = 43^2 + 31 = 1\,880,\quad A = 82^2 + 59 = 6\,783, \text{ etc.};$$

et enfin :

$$\sqrt{19} = 4(2, 1, 3, 1, 2, 8),\quad \sqrt{1\,880} = 43(2, 1, 3, 1\,2, 86),\quad \sqrt{6\,783} = 82(2, 1, 3, 1, 2, 164), \ldots$$

Digitized by Google

II.

$$y = 2,\quad 1,\quad 3,\quad 3,\quad 1,\quad 2.$$

Réduites :

$$\frac{2}{1},\quad \frac{3}{1},\quad \frac{11}{4},\quad \frac{36}{13},\quad \frac{47}{17},\quad \frac{130}{47}.$$

$$130\alpha - 94a = 17 \quad (\textit{impossible}).$$

III.

$$y = 3,\quad 2,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3.$$

Réduites :

$$\frac{3}{1},\quad \frac{7}{2},\quad \frac{10}{3},\quad \frac{17}{5},\quad \frac{44}{13},\quad \frac{149}{44}.$$

$$P = 44,\quad P' = 13,\quad Q = 149,$$

$$149\alpha - 88a = 13.$$

La solution la plus simple (*) est

$$\alpha = -7,\quad a = -12.$$

Donc, en général, par l'addition de 88 et de 149 :

$$\alpha = 81 + 88\theta,\quad a = 137 + 149\theta;$$

puis

$$A = 137^2 + 81 = 18\,850,\quad A = 286^2 + 169 = 81\,965,\ \text{etc.}$$

Finalement

$$\sqrt{18\,850} = 137\,(3, 2, 1, 1, 2, 3, 274),$$

$$\sqrt{81\,965} = 286\,(3, 2, 1, 1, 2, 3, 572),$$

etc.

11. Corollaire. *Lorsque, dans*

$$A = a^2 + \alpha,$$

α *divise* $2a$, *le développement de* $\sqrt{A}$ *est*

$$a\left(\frac{2a}{\alpha},\ 2a\right)\ (^{**}).$$

(*) Pour l'obtenir, j'emploie, non les fractions continues, mais l'*algorithme* au sujet duquel j'ai publié diverses Notes.

(**) Théorème I de M. de Jonquières (*Comptes rendus*, février 1883, p. 569).

Digitized by Google

Soit

$$X = a\,(b,\ 2a).$$

On trouve

$$X = \sqrt{a^2 + \frac{2a}{b}}.$$

Ainsi

$$\frac{2a}{b} = \alpha,$$

ou

$$b = \frac{2a}{\alpha}.$$

12. Problème I. *Dans quel cas peut-on avoir*

$$\sqrt{A} = a\,(b,\ b,\ 2a)?$$

Les réduites de la fraction symétrique

$$y = b,\ b$$

sont

$$\frac{b}{1},\quad \frac{b^2+1}{b}.$$

Conséquemment,

$$P = b,\quad P' = 1,\quad Q = b^2 + 1.$$

L'équation (13) se réduit à

$$(b^2+1)\alpha - 2ba = 1, \qquad (15)$$

ou

$$\alpha b^2 - 2ab + \alpha - 1 = 0.$$

On tire, de celle-ci :

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2 - \alpha^2 + \alpha}}{\alpha}\ (*),$$

ou

$$b = \frac{a + \sqrt{A - \alpha^2}}{\alpha} \qquad (16)$$

(*) La seconde valeur de b est inadmissible, parce que le produit des deux égale $1 - \frac{1}{\alpha}$.

Digitized by Google

b est un nombre entier; donc $A - \alpha^2$ *doit être un carré parfait :*

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

D'après l'équation (15), b doit être *pair* : $b = 2\gamma$.

On satisfait à cette équation en prenant $\alpha = 1$, $a = \gamma$.

Les valeurs générales sont donc :

$$\alpha = 1 + 4\gamma\theta, \quad a = \gamma + (4\gamma^2 + 1)\theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

En outre,

$$\beta = \gamma + (4\gamma^2 - 1)\theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Ces valeurs remplissent la condition

$$A = a^2 + \alpha = \alpha^2 + \beta^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Soient, par exemple,

$$\gamma = 1, \quad \theta = 2.$$

De là résultent :

$$\alpha = 9, \quad a = 11, \quad \beta = 7, \quad A = 130 = 9^2 + 7^2;$$

puis

$$\sqrt{130} = 11\ (2, 2, 22).$$

13. Cas particulier remarquable. Dans les formules (18), (19), (20), supposons $\theta = \gamma$. Alors :

$$\alpha = 1 + 4\gamma^2, \quad a = 2\gamma(2\gamma^2 + 1), \quad \beta = 4\gamma^3;$$
$$A = 4\gamma^2(2\gamma^2 + 1)^2 + 4\gamma^2 + 1 = (4\gamma^2 + 1)^2 + (4\gamma^3)^2,$$

ou

$$A = [2\gamma(2\gamma^2 + 1)]^2 + (2\gamma)^2 + 1 = (4\gamma^2 + 1)^2 + (4\gamma^3)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Ainsi, *chacun des nombres* A, A — 1 *est la somme de deux carrés.*

Les premières valeurs de A sont :

$$5^2 + 4^2 = 41, \quad 17^2 + 32^2 = 1\,313, \quad 37^2 + 108^2 = 13\,033, \ldots;$$

et l'on a

$$40 = 6^2 + 2^2, \quad 1\,312 = 36^2 + 4^2, \quad 13\,032 = 114^2 + 6^2, \ldots$$

Digitized by Google

14. Remarque. Soit l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

On en trouve une infinité de solutions au moyen des formules :

$$x = 4t^2 + 1,\quad y = 4t^3,\quad u = 2t(2t^2 + 1),\quad v = 2t \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

15. Suite. Il est facile de former d'autres systèmes de formules donnant, chacun, une *infinité de solutions de cette équation* (22) (*). Par exemple, écrivons-la ainsi :

$$x^2 - u^2 = v^2 + 1 - y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Prenons, arbitrairement, v et y; décomposons $v^2 + 1 - y^2$ en deux facteurs p, q, *de même parité*. Alors

$$x = \frac{1}{2}(p + q),\quad u = \frac{1}{2}(p - q).$$

16. Application.

$$y = 5,\quad v = 9,\quad pq = 57.$$

On peut prendre

$$p = 57,\quad q = 1;\qquad p = 19,\quad q = 3.$$

Par suite,

$$x = 29,\quad u = 28;\qquad x = 11,\quad u = 8.$$

En effet :

$$29^2 + 5^2 = 28^2 + 9^2 + 1 = 841 + 25 = 784 + 81 + 1 = 866,$$
$$11^2 + 5^2 = 8^2 + 9^2 + 1 = 121 + 25 = 64 + 81 + 1 = 146.$$

17. Problème II. *Dans quel cas peut-on avoir*

$$\sqrt{A} = a\,(b, g, b, 2a)\,?$$

(*) J'ignore s'il existe des formules contenant *toutes les solutions*. Des valeurs (23), on conclut $u = y + v$.

Digitized by Google

Les réduites de la fraction b, g, b étant

$$\frac{b}{1},\quad \frac{bg+1}{g},\quad \frac{b^2g+2b}{bg+1},$$

il s'ensuit que

$$P = bg + 1,\quad P' = g,\quad Q = b^2g + 2b.$$

L'équation (13) devient donc

$$b(bg+2)\alpha - 2(bg+1)a = g \text{ (*)} \qquad (25)$$

Après quelques tâtonnements, on trouve qu'elle est vérifiée par

$$2a = -g(bg+1),\quad \alpha = -g^2.$$

En conséquence, les formules générales sont

$$2a = -g(bg+1) + b(bg+2)\theta \text{ (**)}, \qquad (26)$$
$$\alpha = -g^2 + (bg+1)\theta \qquad (27)$$

Soient, par exemple :

$$b = 5,\quad g = 1,\quad \theta = 2.$$

On a :

$$2a = -6 + 5.7.2 = 64,\quad a = 32,\quad \alpha = -1 + 6.2 = 11,\quad A = 32^2 + 11 = 1\,035;$$

puis

$$\sqrt{1\,035} = 32\,(5,\ 1,\ 5,\ 64).$$

18. Remarque. L'équation (25), ou

$$g\alpha b^2 - 2(ga-\alpha)b - (2a+g) = 0$$

donne

$$b = \frac{ga - \alpha + \sqrt{g^2(a^2+\alpha)+\alpha^2}}{g\alpha}.$$

b est un nombre entier; donc $g^2A + \alpha^2$ *doit être un carré* λ^2 (***).

(*) Celle-ci est impossible si, b étant *pair*, g est *impair*.
(**) Si b et g sont *impairs*, l'entier θ doit être *pair*.
(***) En particulier, lorsque $g = 1$, $A + \alpha^2 = a^2 + \alpha + \alpha^2$ *est un carré*

En effet, des formules (26), (27), on déduit :

$$A = \frac{1}{4}\left[-g(bg+1) + b(bg+2)\theta\right]^2 - g^2 + (bg+1)\theta,$$

$$g^2A = \frac{g^2}{4}\left\{\begin{array}{l|l} g^2(bg+1)^2 - 2bg(bg+1)(bg+2) & \theta + b^2(bg+2)^2\theta^2 \\ -4g^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 4(bg+1) & \end{array}\right\},$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}\left[4g^4 - 8g^2(bg+1)\theta + 4(bg+1)^2\theta^2\right],$$

$$4(g^2A + \alpha^2) = g^4(bg+1)^2 - \begin{array}{r|l} 2bg^3(bg+1)(bg+2) & \theta + b^2g^2(bg+2)^2 \\ -4g^2(bg+1) & \quad +4(bg+1)^2 \end{array}\Bigg|\,\theta^2$$

$$= g^4(bg+1)^2 - 2g^2(bg+1)(b^2g^2+2bg+2)\theta + (b^4g^4+4b^3g^3+8b^2g^2+8bg+4)\theta^2$$

$$= \left[g^2(bg+1) - (b^2g^2+2bg+2)\theta\right]^2,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[-g^2(bg+1) + (b^2g^2+2bg+2)\theta\right],$$

$$ga - \alpha = \frac{1}{2}\left[-g^2(bg-1) + (b^2g^2-2)\theta\right].$$

La somme des deux dernières quantités est

$$-bg^3 + bg(bg+1)\theta,$$

ou $bg\alpha$; ce qui devait arriver.

19. Cas particulier. Soient, dans les formules (26), (27) :

$$b = 1, \quad \theta = g + 3.$$

On trouve

$$a = 2g + 3, \quad \alpha = 4g + 3, \quad A = (a+1)^2 - 4, \quad \lambda = 2g^2 + 4g + 3.$$

Par conséquent :

a *étant un nombre impair, supérieur à* 3, *le développement de*

$$\sqrt{(a+1)^2 - 4}$$

est

$$a\left(1, \frac{a-3}{2}, 1, 2a\right) \text{ (*)}.$$

(*) Théorème IV de M. de Jonquières.

20. Problème III. *Dans quels cas peut-on avoir*

$$\sqrt{A} = a\,(b, c, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b, 2a)?$$

Nous avons trouvé, ci-dessus (2) :

$$P = Q' = EE' + FF', \quad P' = E'^2 + F'^2, \quad Q = E^2 + F^2.$$

L'équation

$$Q\alpha - 2Pa = P' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

est donc

$$(E^2 + F^2)\alpha - 2\,(EE' + FF')\,a = E'^2 + F'^2 \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

A cause de

$$(EF' - FE')^2 = +1,$$

elle est vérifiée par

$$\alpha = (E'^2 + F'^2)^2, \quad a = \frac{1}{2}(EE' + FF')\,(E'^2 + F'^2) \; (^*).$$

Les valeurs générales des inconnues sont, par conséquent :

$$\alpha = (E'^2 + F'^2) + (EE' + FF')\,\theta, \quad a = \frac{1}{2}\left[(EE' + FF')\,(E'^2 + F'^2) + (E^2 + F^2)\,\theta\right] \; (^{**}). \quad (29)$$

Donc, *si l'on applique les formules* (29), *le développement de*

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + \alpha}$$

sera

$$a\,(b, c, \ldots, e, f, f, e, \ldots, c, b, 2a).$$

21. Application. Soient, comme ci-dessus (3) :

$$E = 2, \quad E' = 1, \quad F = 7, \quad F' = 3.$$

(*) $$(E^2 + F^2)(E'^2 + F'^2) - (EE' + FF')^2 = (EF' - FE')^2; \text{ etc.}$$

(**) Si, d'après les valeurs de E, E', F, F', le nombre entre parenthèses est *impair*, le problème proposé sera *impossible*.

Les formules (29) deviennent :

$$\alpha = 25 + 23\theta, \quad a = \frac{1}{2}[23.10 + 53\theta];$$

ou, si l'on fait $\theta = 2t$:

$$\alpha = 25 + 46t, \quad a = 115 + 53t.$$

Il en résulte les systèmes suivants :

$$\alpha = 25,\ a = 115; \quad \alpha = 71,\ a = 168; \quad \alpha = 117,\ a = 221; \ \ldots;$$

puis

$$A = 115^2 + 25 = 13\,250; \quad A = 168^2 + 71 = 28\,295; \quad A = 221^2 + 117 = 48\,958; \ \ldots$$

Ainsi :

$$\sqrt{13\,250} = 115\,(2, 3, 3, 2, 230); \quad \sqrt{28\,295} = 168\,(2, 3, 3, 2, 336);$$
$$\sqrt{48\,958} = 221\,(2, 3, 3, 2, 442).$$

Liége, 18 avril 1883.

P. S. (27 janvier 1884). Au Congrès de Rouen (août 1883), j'ai donné la résolution complète de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + w^2,$$

dont un cas particulier a été considéré ci-dessus (p. 78). Cette communication va paraître dans les *Atti* de l'Académie des *Nuovi Lincei*.

Digitized by Google

THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE

PAR

F. FOLIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

D. O. M. S.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 4 août 1883.)

Digitized by Google

5

PRÉFACE.

I. Le présent travail a son origine dans quelques circonstances d'un caractère intime, que je compte révéler un jour en quelques pages portant la même épigraphe que celles-ci.

Ces circonstances m'avaient amené tout d'abord à rechercher si la fluidité intérieure du globe pouvait occasionner une nutation diurne.

Hopkins, le seul auteur qui, à ma connaissance, se soit occupé de cette question, l'avait résolue négativement.

En la reprenant *ab ovo,* je suis arrivé à la conclusion que la nutation diurne pouvait être sensible, dans cette hypothèse, et je me suis empressé de soumettre cette conclusion à une première vérification expérimentale.

Il résulte de mes formules que la nutation diurne est la plus forte en déclinaison, pour les étoiles dont l'ascension droite est 6^h ou 18^h;

En ascension droite, pour les étoiles qui sont situées vers 0^h ou 12^h.

J'ai donc fait relever, dans les meilleurs catalogues, les positions de plusieurs centaines d'étoiles, et les ai fait réduire à la même époque; j'ai pris ensuite les plus grands écarts entre les positions assignées à une même étoile par ces différents catalogues, et j'ai constaté que ces écarts étaient, de tout point, conformes au résultat théorique que je viens d'exposer.

Je crois avoir de même élucidé les écarts signalés par Auwers (*Berl. Jahrb. f. 1884*) entre les quatre éphémérides astronomiques (Berlin, Greenwich, Paris, Washington), et interprété ce *quelque chose de systématique* que l'astronome de Berlin avait trouvé dans ces écarts (*).

L'existence de la nutation diurne était dès lors, pour moi, chose certaine;

(*) La théorie de la nutation diurne, suivie des discussions dont je viens de parler, fait l'objet d'un travail qui a été présenté à l'Institut (Académie des sciences de Paris) le 24 juillet 1882.

Digitized by Google

et je pouvais essayer d'appliquer mes formules à des séries d'observations très précises, en vue de déterminer la constante de cette nutation.

J'ai choisi dans ce but les observations que W. Struve a faites dans le premier vertical, et dont il a déduit la constante de l'aberration.

Les premiers résultats auxquels est arrivé le D[r] de Ball. qui a bien voulu se charger, à ma prière, du laborieux calcul de mes formules, sont assez concordants pour me permettre de considérer comme certain que la nutation diurne existe, et comme probable que sa constante approche de 0″.1 (*).

Or, si l'on remarque que la nutation diurne en déclinaison peut, dans des circonstances favorables, être égale à dix ou douze fois la valeur de cette constante, on voit que cette nutation ne doit pas être négligée, et que son influence sera très considérable en ascension droite pour les circompolaires.

Lorsque la constante en sera bien déterminée, je chercherai à déduire de ma théorie la limite de l'épaisseur de la croûte solide du globe.

II. On m'eût, avec raison, accusé d'incurie, si je n'avais appliqué, à la recherche de la précession et de la nutation annuelle, le procédé d'intégration fort simple dont étaient issues mes formules relatives à la nutation diurne.

Les résultats assez neufs auxquels j'ai été conduit m'ont engagé à exposer cette théorie, en ne la fondant que sur les premières notions de la dynamique et de l'astronomie, et en ne me servant d'aucune formule que je n'eusse démontrée au préalable.

Un jeune homme, quelque peu initié à ces deux sciences, peut donc suivre ma théorie, sans recourir à aucune autre source.

Est-il besoin d'ajouter que mes formules, relatives à la longitude et au rayon vecteur de la Lune, sur lesquelles repose tout le développement du calcul, concordent avec celles de Delaunay, plus exactes que celles de Poisson?

Une indication, qui sera plus utile, est la suivante.

J'ai dû, pour rester conséquent, laisser de côté les termes provenant des

(*) Voici les valeurs, toutes positives, déduites, pour cette constante, des observations de W. Struve :

de β Cass. 0″.068; δ Cass. 0″.099; υ U. maj. 0″.047; 2 Drac. 0″.031;
b Drac. 0″.028; o Drac. 0″.05; Pi. XIX$^{\mathrm{b}}$371.0″.113. (*A. N.*, n° 2542.)

Digitized by Google

inégalités de la Lune, et ceux qui ont leur source dans les inégalités du sphéroïde terrestre, parce que j'aurais dû les emprunter à des théories étrangères à mon travail.

Mais je me propose de publier ultérieurement les formules de la nutation, augmentées de ces différents termes, dont ma méthode permet de tenir très aisément compte.

Les astronomes seront surpris, sans doute, des différences assez sensibles qui existent entre mes formules et celles de mes prédécesseurs (*). Aussi ne sera-t-il pas hors de propos d'en signaler ici les principales.

Celles-ci sont au nombre de deux.

En premier lieu, je n'ai pas, comme ces géomètres, le coefficient unique $\frac{2C - A - B}{C}$ dans tous les termes de la précession et de la nutation, mais, au contraire, des coefficients différents (**), qui permettraient, si les constantes de ces deux mouvements étaient très exactement connues, de déterminer séparément les rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$, et qui permettent, dans tous les cas, de vérifier si ces deux constantes concordent entre elles. Il résulte, entre autres conclusions, de la comparaison à laquelle je me suis livré, que la constante de la nutation de Peters concorde avec la constante de la précession de Bessel, mieux que celle de Struve (***).

En second lieu, j'ai démontré qu'en se servant des formules de Peters, et des longitudes *vraies* de la Lune, les astronomes commettent des erreurs; et qu'il est bien préférable de faire usage des formules qui renferment les longitudes moyennes des deux astres : d'abord, le nombre des termes en est beaucoup moins grand que dans les formules en longitudes vraies; ensuite

(*) Quelques différences proviennent évidemment de ce que j'ai négligé les inégalités de la Lune et celles du sphéroïde terrestre. Mais tel n'est pas le cas pour les différences que je signale ci-dessous.

(**) La méthode d'intégration de Laplace, dont la nôtre n'est qu'un pâle reflet, lui eût donné également des coefficients différents, s'il n'avait négligé, dans le résultat, les termes très petits qui sont renfermés dans les expressions primitives de ces coefficients. « *Dans ce cas*, dit-il, *on peut négliger* i *relativement à* n, *et l'on a, à fort peu près* : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{A+B-2C}{2nC} k' \sin(it+\varepsilon)$. » (*Méc. cél.*, liv. V, art. 4.) A cause de la grande rigueur que la précision des observations et la perfection des théories imposent aujourd'hui, nous avons cru ne pas devoir suivre, en ce point, l'exemple de l'incomparable géomètre.

(***) Il n'en résulte pas que cette dernière soit inexacte, mais bien plutôt que la constante de Peters est trop faible.

Digitized by Google

les premières ne renferment absolument aucun terme dépendant des périgées du Soleil et de la Lune (*), tandis que la conversion des longitudes moyennes en longitudes vraies introduit de ces termes. La présence n'en a pas encore été signalée; ils sont, à la vérité, très faibles, quoique très importants au point de vue théorique; et leur ensemble peut n'être pas sans influence sur le résultat final.

Poisson avait jugé qu'on pouvait substituer, sans erreur, les longitudes vraies aux longitudes moyennes.

Le premier astronome qui ait songé à effectuer la transformation des unes dans les autres est Peters; mais il n'a opéré la transformation que dans les termes relatifs au Soleil seulement, et il a omis les termes dépendants du périgée.

De là les erreurs commises en faisant usage de ces formules, lorsqu'on y substitue, ce que font beaucoup d'astronomes, les longitudes vraies de la Lune à ses longitudes moyennes. C'est ainsi que les termes en ☾ + Γ′ ont des coefficients à peu près égaux, *mais de signes contraires,* suivant qu'on fait usage des formules en longitudes moyennes ou en longitudes vraies, et que la signification de la constante de la nutation n'est pas la même dans l'un ou l'autre cas.

Ces erreurs peuvent être évitées, il est vrai, par l'emploi du *Berl. Jahrb.*, des *Tab. Pulc.*, ou de la *Connaissance des Temps* (à partir de 1884 pour cette dernière); ces ouvrages permettent d'effectuer, en longitudes moyennes, le calcul des termes qui dépendent de la Lune. Il nous paraît utile qu'on calcule de même ceux qui dépendent du Soleil.

Nous proposons donc aux astronomes de faire usage, à l'avenir, des formules qui renferment les longitudes moyennes du Soleil et de la Lune, et nous espérons que les différents annuaires astronomiques consacreront quelques pages au calcul de ces quantités, pour tous les jours de l'année.

Le présent fascicule contient la théorie du mouvement diurne et du mouvement annuel de l'axe du monde.

Les mouvements séculaires de cet axe feront l'objet d'un prochain travail.

(*) Abstraction faite de ceux qui peuvent provenir des inégalités du sphéroïde terrestre.

Digitized by Google

THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE.

LIVRE I.

DE LA NUTATION DIURNE.

CHAPITRE I.

Formules de la nutation diurne rapportée à l'équateur.

1. Le problème de la nutation diurne peut être abordé d'une manière beaucoup plus aisée que celui de la précession et de la nutation annuelle.

Tandis que dans ce dernier, en effet, il n'est permis de considérer comme fixes ni le plan de l'écliptique, ni, bien moins encore, celui de l'équateur, on peut, dans le premier, rapporter les coordonnées des astres à l'un ou l'autre de ces plans considéré comme fixe. La position de chacun d'eux sera alors celle qu'il occupe, au jour donné et à l'instant pris pour l'origine, en vertu de la précession et de la nutation annuelle; et, la période de la nutation diurne étant de six heures seulement, il sera permis de considérer les mouvements des astres, soit en longitude et latitude, soit en ascension droite et déclinaison, comme uniformes pendant cette durée.

L'idée de considérer comme fixe le plan de l'équateur, quoique la plus simple, ne nous est cependant pas venue la première. Ce n'est qu'après avoir

Digitized by Google

traité d'une manière générale le problème de la nutation, comme nous le ferons dans un autre chapitre, que nous avons été amené, pour éviter les complications des formules que nous avions obtenues, à rapporter les mouvements diurnes de l'équateur à la position initiale de ce plan lui-même. Les formules qui expriment ces mouvements arrivent ainsi, pensons-nous, au plus grand degré de simplicité qu'elles puissent atteindre. Elles sont toutefois beaucoup plus laborieuses à calculer que toutes les autres formules relatives à la position apparente des étoiles.

Afin d'éviter de plus grandes complications, tout à fait superflues du reste, nous y regarderons les distances du Soleil et de la Lune à la Terre comme constantes.

2. Considérons la Terre à un instant quelconque t; rapportons ses points à ses trois axes principaux x, y, z; nommons A, B, C ses moments d'inertie autour de ces axes, rangés par ordre de grandeur; D_0 la distance de son centre au centre du Soleil; x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce dernier point rapporté aux mêmes axes.

Tout en considérant les moments A, B, C comme inégaux, nous pouvons admettre, quant à l'action des astres attirants, que la Terre est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des z.

Ses méridiens auront alors pour équation :

$$r = a(1 - \varkappa)(1 + \varkappa \sin^2 \chi),$$

$\varkappa$ désignant l'aplatissement, et χ l'angle du rayon r avec l'axe de révolution; et l'on trouvera aisément que les couples provenant de l'attraction du Soleil, dont nous nous occuperons en premier lieu, seront, dans les trois plans principaux

$$Q = 3M \frac{y_0 z_0}{D_0^5} \int (y^2 - z^2)\, dm; \quad P = 3M \frac{x_0 z_0}{D_0^5} \int (z^2 - x^2)\, dm; \quad R = 3M \frac{x_0 y_0}{D_0^5} \int (x^2 - y^2)\, dm,$$

M désignant la masse du Soleil; ou bien

$$3M \frac{y_0 z_0}{D_0^5} (C - B); \quad -3M \frac{x_0 z_0}{D_0^5} (C - A); \quad 3M \frac{x_0 y_0}{D_0^5} (B - A).$$

Digitized by Google

Si nous représentons par m_1 le moyen mouvement de la Terre autour du Soleil, nous pourrons écrire m_1^2 au lieu de $\frac{M}{D_0^3}$ dans les expressions précédentes; et, si l'on pose

$$C - B = b, \quad C - A = a, \quad B - A = d,$$

les trois couples auront pour expression

$$Q = 3m_1^2 b \frac{y_0 z_0}{D_0^2}, \quad P = -3m_1^2 a \frac{x_0 z_0}{D_0^2}, \quad R = 3m_1^2 d \frac{x_0 y_0}{D_0^2},$$

que nous écrirons, en vue d'obtenir une plus grande uniformité de signes dans les équations (1),

$$Q = -bnq, \quad P = anp, \quad R = -dnr,$$

en faisant

$$p = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{x_0 z_0}{D_0^2}, \quad q = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{y_0 z_0}{D_0^2}, \quad r = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{x_0 y_0}{D_0^2}.$$

Or, l, m, n étant les vitesses angulaires de la Terre autour de ses axes principaux, on sait que les équations qui les donnent sont :

$$\begin{aligned} A\,dl + bmndt &= Qdt \\ B\,dm - alndt &= Pdt \\ C\,dn + dmldt &= Rdt; \end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A}n(m+q); \quad \frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}n(l+p); \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{d}{C}(lm+nr).$$

3. Avant de procéder à leur intégration, nous avons à présenter une observation très importante.

La nutation diurne, comme on le verra, et comme Laplace l'a, du reste, affirmé, ne peut exister qu'à la condition que les moments A et B diffèrent entre eux d'une quantité appréciable.

Or il semble résulter des données actuelles de la géodésie et de la géographie physique, que cette différence est réellement insensible, si les

Digitized by Google

moments A et B sont relatifs au sphéroïde terrestre tout entier. Elle peut ne pas l'être, au contraire, si ces moments se rapportent à l'écorce solide seule, et si celle-ci est assez mince.

Mais les équations (1) sont tout aussi bien applicables au mouvement de cette écorce qu'à celui du globe entier.

Considérons à part le mouvement de l'écorce solide et celui du noyau fluide.

L'axe de la première pourra être soumis à une nutation diurne, qui le fera osciller autour de l'axe du second, dont la nutation diurne pourra être considérée comme insensible.

Comme les oscillations du premier de ces axes seront excessivement petites, et comme de plus, le moment d'inertie de l'écorce, supposée assez mince, sera notablement plus faible que celui du noyau fluide, l'axe du mouvement de rotation résultant de celui de l'écorce et de celui du noyau, ou l'axe de rotation du globe tout entier, pourra être regardé comme soustrait à l'influence de la nutation diurne.

En d'autres termes, la vitesse n autour de l'axe de rotation sera la même pour l'écorce que pour la Terre tout entière.

Or pour celle-ci, les équations (1) donnent $dn = 0$, à cause de l'excessive petitesse du rapport $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{G}}$ (*).

Nous pouvons donc admettre que n est une constante dans ces mêmes équations, appliquées au mouvement de l'écorce solide.

4. Nous aurons d'abord à substituer, dans ces équations, aux quantités

$$p = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{x_0 z_0}{D_0^2} \quad \text{et} \quad q = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{y_0 z_0}{D_0^2},$$

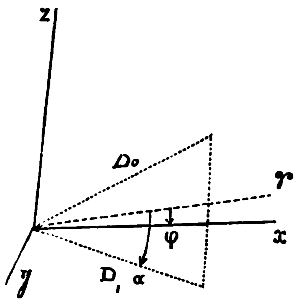
leurs expressions en coordonnées sphériques.

(*) Si la vitesse de rotation de la Terre n'est pas absolument constante, il résulte du moins des recherches de Laplace et de Poisson, que ses variations sont absolument insensibles. [*Méc. cél.*, livre V, nº 8, et *Mém. sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité* (MÉM. DE L'INSTITUT, t. VII, pp. 239-240.)]

Désignons par φ l'angle que l'axe des x fait avec la ligne des équinoxes, compté dans le sens du mouvement de rotation de la Terre.

Le plan des xy étant celui de l'équateur, l'angle formé par la droite D_0 avec ce plan sera la déclinaison δ du Soleil, et celui que fait sa projection D_1 avec la ligne des équinoxes sera l'ascension droite α de cet astre.

Fig. 1.



Comme les angles α et φ se comptent dans le même sens, la différence de ces deux angles, ou l'angle de D_1 avec x, sera égal à $\alpha - \varphi$. Cela posé, nous aurons

$$(2) \quad \frac{z_0}{D_0} = \sin\delta; \quad \frac{y_0}{D_0} = \cos\delta \sin(\alpha - \varphi); \quad \frac{x_0}{D_0} = \cos\delta\cos(\alpha - \varphi);$$

et par suite

$$(3) \ldots \quad p = -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\sin 2\delta\cos(\alpha - \varphi); \quad q = -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\sin 2\delta\sin(\alpha - \varphi);$$

ou bien, en faisant

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n} = h:$$

$$(5) \quad p = h\left[\sin(\alpha + 2\delta - \varphi) - \sin(\alpha - 2\delta - \varphi)\right]; \quad q = h\left[\cos(\alpha - 2\delta - \varphi) - \cos(\alpha + 2\delta - \varphi)\right].$$

5. La méthode de la variation des constantes arbitraires, appliquée aux deux premières des équations (1), donnera pour l une expression de la forme,

$$(6) \ldots \quad l = \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + H_1 \sin(\alpha + 2\delta - \varphi) + H_2 \sin(\alpha - 2\delta - \varphi),$$

dans laquelle α_1 et β_1 sont les deux constantes arbitraires; n_1 une quantité déterminée par $n_1^2 = \frac{ab}{AB}n^2 = \iota^2 n^2$, en faisant $\frac{ab}{AB} = \iota^2$; H_1, H_2 des constantes à déterminer; Φ une fonction de φ également à déterminer, et dont Φ' et Φ'' désignent les deux premières dérivées prises par rapport au temps.

Pour trouver ces quantités, substituons l'expression précédente de l dans la deuxième équation (1)

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}n(l + p);$$

Digitized by Google

intégrons ensuite cette équation, et portons, dans la première, la valeur trouvée pour m; il viendra d'abord :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B} n \left\{ \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + (H_1 + h) \sin(\alpha + 2\delta - \varphi) + (H_2 - h) \sin(\alpha - 2\delta - \varphi) \right\}.$$

Intégrons sans ajouter de constante, puisque nous avons les deux arbitraires voulues; et désignons par a_1 et d_1 les mouvements du Soleil en ascension droite et en déclinaison pendant l'unité de temps, nous aurons :

$$(7) \quad m = \frac{a}{B} n \left\{ -\frac{\alpha_1}{n_1} \cos(n_1 t + \beta_1) + \Phi - \frac{H_1 + h}{a_1 + 2d_1 - n} \cos(\alpha + 2\delta - \varphi) - \frac{H_2 - h}{a_1 - 2d_1 - n} \cos(\alpha - 2\delta - \varphi) \right\}.$$

Portons cette expression, ainsi que celle de $\frac{dl}{dt}$, dans l'équation

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A} n(m + q),$$

celle-ci deviendra :

$$\alpha_1 n_1 \cos(n_1 t + \beta_1) + \Phi'' + H_1(a_1 + 2d_1 - n)\cos(\alpha + 2\delta - \varphi) + H_2(a_1 - 2d_1 - n)\cos(\alpha - 2\delta - \varphi) =$$
$$-\frac{ab}{AB} n^2 \left\{ -\frac{\alpha_1}{n_1} \cos(n_1 t + \beta_1) + \Phi - \frac{H_1 + h}{a_1 + 2d_1 - n} \cos(\alpha + 2\delta - \varphi) - \frac{H_2 - h}{a_1 - 2d_1 - n} \cos(\alpha - 2\delta - \varphi) \right\}$$
$$-\frac{b}{A} nh \left[\cos(\alpha - 2\delta - \varphi) - \cos(\alpha + 2\delta - \varphi)\right].$$

L'identification des deux membres donne

1° $\Phi'' + i^2 n^2 \Phi = 0$, d'où $\Phi = \sin i\varphi$, sans constante, par la même raison que plus haut;

2° $$H_1(a_1 + 2d_1 - n) = \frac{ab}{AB} n^2 \frac{H_1 + h}{a_1 + 2d_1 - n} + \frac{b}{A} nh;$$

3° $$H_2(a_1 - 2d_1 - n) = \frac{ab}{AB} n^2 \frac{H_2 - h}{a_1 - 2d_1 - n} - \frac{b}{A} nh.$$

Ces dernières égalités s'écriront plus simplement, si l'on fait

$$(8) \quad . \; . \; . \quad \frac{a_1}{n} = a_2, \quad \frac{d_1}{n} = d_2; \quad a_2 + 2d_2 - 1 = s_2, \quad a_2 - 2d_2 - 1 = r_2 :$$

Digitized by Google

$$H_1\left(s_2^2-\frac{ab}{AB}\right)=\frac{b}{A}h\left(s_2+\frac{a}{B}\right);\quad H_2\left(r_2^2-\frac{ab}{AB}\right)=-\frac{b}{A}h\left(r_2+\frac{a}{B}\right);$$

$$(H_1+h)\left(s_2^2-\frac{ab}{AB}\right)=hs_2\left(s_2+\frac{b}{A}\right);\quad (H_2-h)\left(r_2^2-\frac{ab}{AB}\right)=-hr_2\left(r_2+\frac{b}{A}\right).$$

Comme a diffère, dans tous les cas, fort peu de b, nous ne commettrons pas d'erreur sensible, et nous simplifierons considérablement nos coefficients, en remplaçant, dans les premiers membres des égalités précédentes, $\frac{ab}{AB}$ par $\frac{b^2}{A^2}$; nous trouverons ainsi :

$$\left(\frac{H_1+h}{s_2}\right)\left(s_2-\frac{b}{A}\right)=h;\quad \left(\frac{H_2-h}{r_2}\right)\left(r_2-\frac{b}{A}\right)=-h;\quad H_1\left(s_2-\frac{b}{A}\right)=\frac{b}{A}h;\quad H_2\left(r_2-\frac{b}{A}\right)=-\frac{b}{A}h.$$

Les expressions (6) et (7) de l et de m deviennent par là, si nous laissons de côté les termes à longue période, puisque nous ne nous occupons ici que de la nutation diurne :

$$(9)\quad .\ .\ .\ .\ .\quad l=\frac{b}{A}h\left\{\frac{\sin(\alpha+2\delta-\varphi)}{s_2-\frac{b}{A}}-\frac{\sin(\alpha-2\delta-\varphi)}{r_2-\frac{b}{A}}\right\}.$$

$$(10)\quad .\ .\ .\quad m=-\frac{a}{B}h\left\{\frac{\cos(\alpha+2\delta-\varphi)}{s_2-\frac{b}{A}}-\frac{\cos(\alpha-2\delta-\varphi)}{r_2-\frac{b}{A}}\right\}.$$

6. Désignons maintenant par $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ les variations de l'obliquité de l'écliptique et de la ligne équinoxiale qui sont dues au déplacement diurne du plan de l'équateur ; il ne nous restera, pour obtenir ces quantités, qu'à substituer les expressions précédentes dans les équations connues (*)

$$(11)\quad .\ .\ .\ .\quad \frac{d\omega}{dt}=-l\cos\varphi+m\sin\varphi;\quad -\sin\omega\frac{d\psi}{dt}=l\sin\varphi+m\cos\varphi,$$

(*) Il est bon de remarquer ici que nous avons compté tous les angles dans le sens direct, tandis que Laplace et Poisson ont pris l'angle ψ en sens inverse. C'est de là que provient le signe — dans le premier membre de l'équation en $\frac{d\psi}{dt}$.

Digitized by Google

en négligeant, dans le résultat, les termes indépendants de φ, puisqu'ils ne se rapportent pas à la nutation diurne.

Il viendra ainsi, après avoir posé

$$(12) \quad \frac{a}{B} = \frac{b+c}{A}:$$

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{c}{A}\dfrac{h}{2}\left\{\dfrac{\sin(\alpha+2\delta-2\varphi)}{s_2-\dfrac{b}{A}} - \dfrac{\sin(\alpha-2\delta-2\varphi)}{r_2-\dfrac{b}{A}}\right\}. \\ \sin\omega\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{c}{A}\dfrac{h}{2}\left\{\dfrac{\cos(\alpha+2\delta-2\varphi)}{s_2-\dfrac{b}{A}} - \dfrac{\cos(\alpha-2\delta-2\varphi)}{r_2-\dfrac{b}{A}}\right\}. \end{cases}$$

7. La petitesse de la variation de ω permet de considérer cette quantité comme constante dans $\sin\omega\frac{d\psi}{dt}$; c'est ce que nous ferons dans l'intégration.

Nous appellerons $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$ les variations qui se sont produites depuis $t=0$ jusque $t=t$; α_0, δ_0, φ_0 les valeurs initiales de α, δ, φ; α_m, δ_m, φ_m leurs valeurs moyennes entre 0 et t. L'intégration entre ces limites donnera, si l'on pose

$$(14) \quad \frac{c}{A}\frac{h}{n} = K,$$

et si l'on écrit simplement t au lieu de $\varphi - \varphi_0 = nt$, ce qui revient à estimer t en arc :

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\omega}{K} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\cos(\alpha_0+2\delta_0-2\varphi_0)-\cos(\alpha+2\delta-2\varphi)}{s_2-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\cos(\alpha_0-2\delta_0-2\varphi_0)-\cos(\alpha-2\delta-2\varphi)}{r_2-1} \\ \quad = \dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\sin(\alpha_m+2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\sin(\alpha_m-2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \\ \sin\omega\dfrac{\Delta\psi}{K} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\sin(\alpha+2\delta-2\varphi)-\sin(\alpha_0+2\delta_0-2\varphi_0)}{s_2-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\sin(\alpha-2\delta-2\varphi)-\sin(\alpha_0-2\delta_0-2\varphi_0)}{r_2-1} \\ \quad = \dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\cos(\alpha_m+2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\cos(\alpha_m-2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Si l'on fait

(16) . . . . $\alpha_m + 2\delta_m = S_m, \quad \alpha_m - 2\delta_m = R_m,$

ces formules s'écrivent :

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\omega}{K} = \dfrac{1}{s_2 - \dfrac{b}{A}} \sin(S_m - 2\varphi_m) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2 - \dfrac{b}{A}} \sin(R_m - 2\varphi_m) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \\ \sin\omega \dfrac{\Delta\psi}{K} = \dfrac{1}{s_2 - \dfrac{b}{A}} \cos(S_m - 2\varphi_m) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2 - \dfrac{b}{A}} \cos(R_m - 2\varphi_m) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \end{cases}$$

8. Pour connaître les variations apparentes du lieu d'un astre, produites par le mouvement diurne de l'axe du monde, que nous venons de calculer, nous aurons à substituer les valeurs de $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$ dans les formules :

$$(18)\quad \Delta\delta = \sin\alpha\Delta\omega + \cos\alpha \sin\omega\Delta\psi; \quad \Delta\alpha = \cos\alpha\Delta\psi + \operatorname{tg}\delta(\sin\alpha\sin\omega\Delta\psi - \cos\alpha\Delta\omega),$$

où α et δ sont l'ascension droite et la déclinaison de l'astre, $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ les variations apparentes de ces coordonnées dues au mouvement de l'axe du monde.

On trouvera ainsi :

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\delta}{K} = \dfrac{1}{s_2 - \dfrac{b}{A}} \cos(S_m - 2\varphi_m - \alpha) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2 - \dfrac{b}{A}} \cos(R_m - 2\varphi_m - \alpha) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \\ \dfrac{\Delta\alpha}{K} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\omega} \left\{ \dfrac{1}{s_2 - \dfrac{b}{A}} \cos(S_m - 2\varphi_m) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2 - \dfrac{b}{A}} \cos(R_m - 2\varphi_m) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} \right. \\ \left. + \operatorname{tg}\delta \left\{ -\dfrac{1}{s_2 - \dfrac{b}{A}} \sin(S_m - 2\varphi_m - \alpha) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + \dfrac{1}{r_2 - \dfrac{b}{A}} \sin(R_m - 2\varphi_m - \alpha) \dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} \right\} \right. . \end{cases}$$

9. Ces formules sont relatives à l'action du Soleil.

Mais il est évident que les mêmes calculs peuvent s'appliquer à l'action de la Lune, et que celle-ci donnera lieu à des formules absolument identiques

Digitized by Google

aux précédentes, à cette seule différence près, que tous les termes devront être multipliés par le rapport f des actions de la Lune et du Soleil.

Si donc nous accentuons les quantités qui se rapportent au premier de ces corps, les variations diurnes apparentes d'un astre, en ascension droite et en déclinaison, produites par les actions combinées du Soleil et de la Lune, auront pour expression complète :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\delta}{K} = {} & \frac{1}{s_2-\frac{b}{A}}\cos(S_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + f\frac{1}{s'_2-\frac{b}{A}}\cos(S'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s'_2)t}{1-s'_2} \\ & -\frac{1}{r_2-\frac{b}{A}}\cos(R_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} - f\frac{1}{r'_2-\frac{b}{A}}\cos(R'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r'_2)t}{1-r'_2}. \end{aligned}\right.$$

$$(20\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{K} = \frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & \left\{\frac{1}{s_2-\frac{b}{A}}\cos(S_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + f\frac{1}{s'_2-\frac{b}{A}}\cos(S'_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s'_2)t}{1-s'_2}\right. \\ & \left. -\frac{1}{r_2-\frac{b}{A}}\cos(R_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} + f\frac{1}{r'_2-\frac{b}{A}}\cos(R'_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r'_2)t}{1-r'_2}\right\} \\ -\operatorname{tg}\delta & \left\{\frac{1}{s_2-\frac{b}{A}}\sin(S_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + f\frac{1}{s'_2-\frac{b}{A}}\sin(S'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s'_2)t}{1-s'_2}\right. \\ & \left. -\frac{1}{r_2-\frac{b}{A}}\sin(R_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} + f\frac{1}{r'_2-\frac{b}{A}}\sin(R'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r'_2)t}{1-r'_2}\right\}. \end{aligned}\right.$$

L'action des planètes sur les mouvements diurnes apparents des astres se déterminerait absolument de la même manière que celle de la Lune. Mais la constante K de la nutation diurne est tellement faible, et surtout la valeur de f l'est tellement aussi pour toutes les planètes, que les actions de celles-ci peuvent être négligées sans aucune erreur.

Nous pouvons donc considérer les deux formules qui précèdent comme donnant les expressions complètes des mouvements diurnes apparents des astres en ascension droite et en déclinaison.

Digitized by Google

10. Les formules (20), recherchées en vue de faciliter le calcul numérique de la nutation diurne, sont peu propres à montrer quelles sont les positions des astres attirants dans lesquelles cette nutation est la plus grande ou la plus petite. Nous en développerons d'autres mieux appropriées à ce but.

Elles donnent lieu, toutefois, à une remarque importante : c'est que la nutation diurne en déclinaison sera la plus grande pour les étoiles dont l'ascension droite est de 6^h ou 18^h, ou qu'elle sera plus grande pour les étoiles comprises entre 3^h et 9^h ou entre 15^h et 21^h que pour les autres étoiles; tandis que l'inverse aura lieu pour la variation diurne en ascension droite, au moins quant aux étoiles dont la déclinaison est assez forte, et pour lesquelles le terme en $\operatorname{tg}\delta$ est prédominant.

$\Delta\delta$ en effet se compose de termes de la forme $a\cos(x-t-\alpha)\sin t$, dans lesquels a et t sont des quantités à fort peu près constantes pour une même étoile observée au méridien, tandis que x est une variable dépendant de l'heure de l'observation et de la position des astres attirants.

Si l'on prend un grand nombre d'observations, cette variable passera par toutes les valeurs, et la moyenne des résultats donnera pour le maximum de $\Delta\delta$, correspondant à $t=\frac{\pi}{2}$, des couples de termes de la forme

$$a\left[\sin(x-\alpha)+\sin(-x-\alpha)\right]=-2a\sin\alpha\cos x.$$

C'est donc pour les étoiles dont l'ascension droite est de 6^h ou 18^h que les variations en déclinaison seront les plus grandes.

$\Delta\alpha$ au contraire, pour les étoiles dont la déclinaison est assez forte, dépendra surtout des termes multipliés par $\operatorname{tg}\delta$, lesquels, pris deux à deux, sont, pour $t=\frac{\pi}{2}$, de la forme

$$a\left[\cos(x-\alpha)+\cos(-x-\alpha)\right]=2a\cos\alpha\cos x.$$

Les plus grandes variations en ascension droite auront donc lieu pour les étoiles dont la déclinaison est très forte, et dont l'ascension droite est égale à 0^h ou à 12^h.

Or, si l'on admet un assez grand degré de précision dans les observations des différents astronomes, il est clair que les discordances entre leurs déter-

Digitized by Google

minations devront affecter surtout les positions des étoiles dont la nutation diurne est la plus grande.

Si celle-ci existe, les discordances devront donc se présenter surtout :

En déclinaison, pour les étoiles dont l'ascension droite est voisine de 6^h ou de 18^h;

En ascension droite, pour celles qui sont voisines de 0^h ou de 12^h, pour autant que leur déclinaison ne soit pas trop faible.

Nous avons trouvé ces résultats confirmés par les valeurs que les différents astronomes ont attribuées aux coordonnées d'un très grand nombre d'étoiles.

Cette circonstance, et les écarts énormes qui existent entre les ascensions droites trouvées, pour une même étoile, à des dates différentes, par les observateurs les plus éminents, écarts qui, pour certaines circompolaires, ne s'élèvent pas à moins de trois ou quatre secondes de temps, nous ont confirmé tout d'abord dans notre foi à l'existence de la nutation diurne.

11. Cherchons l'équation du cône décrit pendant un jour par l'axe de la Terre autour de sa position moyenne.

Celle-ci est naturellement celle de l'axe de l'équateur moyen au jour donné, c'est-à-dire de l'axe soumis à la nutation annuelle, mais supposé soustrait à la nutation diurne.

Or, en rapportant les points de la Terre à ses trois axes principaux, l'axe de l'équateur moyen étant pris pour axe des z, nous avons trouvé, pour les composantes de la vitesse angulaire de la Terre, autour des axes des x et des y, les expressions (9) et (10) de l et de m, qui peuvent s'écrire, en posant

$$\frac{b}{A}h = b_1;\quad \frac{a}{B}h = a_1;\quad \frac{1}{s_2 - \frac{b}{A}} = s_3;\quad \frac{1}{r_2 - \frac{b}{A}} = r_3;\quad \alpha + 2\delta = S;\quad \alpha - 2\delta = R:$$

$$l = b_1\left[s_3 \sin(S - \varphi) - r_3 \sin(R - \varphi)\right]$$
$$m = - a_1\left[s_3 \cos(S - \varphi) - r_3 \cos(R - \varphi)\right],$$

ou bien

$$l = b_1\left[(s_3 \sin S - r_3 \sin R)\cos\varphi - (s_3 \cos S - r_3 \cos R)\sin\varphi\right]$$
$$m = - a_1\left[(s_3 \cos S - r_3 \cos R)\cos\varphi + (s_3 \sin S - r_3 \sin R)\sin\varphi\right];$$

Digitized by Google

ou, en faisant

$$s_3 \sin S - r_3 \sin R = \sigma; \quad s_3 \cos S - r_3 \cos R = \varkappa:$$

$$l = b_1(\sigma \cos\varphi - \varkappa \sin\varphi); \quad m = -a_1(\varkappa \cos\varphi + \sigma \sin\varphi).$$

Ces formules se rapportent à l'action du Soleil seulement.

La Lune donnera lieu à des formules analogues, qui se déduiront des précédentes en y accentuant simplement toutes les quantités à l'exception de φ, b_1' et a_1' représentant respectivement $\frac{b}{A} h'$ et $\frac{a}{B} h'$, et h' étant égal à hf.

Si nous faisons alors

$$\sigma + f\sigma' = \sigma'', \quad \varkappa + f\varkappa' = \varkappa'',$$

les expressions complètes de l et m deviendront

$$\frac{l}{b_1} = \sigma'' \cos\varphi - \varkappa'' \sin\varphi; \quad \frac{m}{a_1} = -(\varkappa'' \cos\varphi + \sigma'' \sin\varphi),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{l^2}{b_1^2} + \frac{m^2}{a_1^2} = \sigma''^2 + \varkappa''^2.$$

On a, de plus, $n =$ constante.

Or, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque de l'axe instantané de rotation, on a

$$x : y : z = l : m : n;$$

par où l'équation précédente devient

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} = \frac{\sigma''^2 + \varkappa''^2}{n^2} z^2,$$

équation du cône du second degré qui serait décrit, pendant un jour, par l'axe de rotation de la Terre, autour de sa position moyenne, si la position du Soleil et de la Lune restait invariable pendant la durée du jour.

Comme il n'en est pas ainsi, ce n'est donc pas un cône du second degré que décrit pendant un jour l'axe de la terre, mais un cône dont l'équation

Digitized by Google

serait tout à fait inabordable, vu l'impossibilité matérielle d'éliminer t entre les expressions de l et m, si l'on admettait même que les coordonnées du Soleil et de la Lune varient pendant un jour proportionnellement au temps.

Nous bornerons donc nos recherches sur ce sujet au résultat que nous venons de signaler, à savoir que, si le Soleil et la Lune restaient fixes pendant un jour, le cône décrit par l'axe de la Terre, en vertu de la nutation diurne, serait un cône du second degré.

Les expressions précédentes de $\frac{l}{b_1}$, $\frac{m}{a_1}$ montrent également que la période entière de la nutation diurne serait, dans cette même hypothèse, d'un jour sidéral exactement; mais, à cause des variations du Soleil et de la Lune en ascension droite et en déclinaison, la durée de cette période est elle-même variable. Elle ne s'écartera toutefois que très peu de celle du jour sidéral, comme on peut le voir par les formules (20), dont chacun des termes renferme comme facteurs des quantités de la forme $\sin \frac{1}{2}(1 - s_2)t$ etc., qui ne différeront jamais bien sensiblement de $\sin t$.

12. Il est aisé également de trouver les variations diurnes apparentes des étoiles en ascension droite et en déclinaison par rapport à leur lieu moyen apparent non corrigé de la nutation annuelle.

Si l'on désigne, à un instant quelconque t, par x, y, z et X, Y, Z, les coordonnées d'un astre rapportées à l'équateur vrai et à l'équateur moyen, l'axe X passant par l'équinoxe moyen du jour donné; par $\Delta\omega$ l'angle de ces deux plans, par χ l'angle de leur intersection avec l'axe des X, et par φ celui de l'axe des x avec cette intersection, on aura d'abord, par les formules de transformation des coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= \cos\Delta\omega \sin\varphi\,(Y\cos\chi - X\sin\chi) + \cos\varphi\,(X\cos\chi + Y\sin\chi) - Z\sin\Delta\omega\sin\varphi \\ y &= \cos\Delta\omega\cos\varphi\,(Y\cos\chi - X\sin\chi) - \sin\varphi\,(X\cos\chi + Y\sin\chi) - Z\sin\Delta\omega\cos\varphi \\ z &= \sin\Delta\omega\,(Y\cos\chi - X\sin\chi) + Z\cos\Delta\omega. \end{aligned}$$

Or

$$X = D\cos\delta\cos\alpha, \quad Y = D\cos\delta\sin\alpha, \quad Z = D\sin\delta;$$

x, y, z se trouvent par des formules analogues dans lesquelles δ et α sont remplacées respectivement par $\delta + \Delta\delta$ et $\alpha + \Delta\alpha - \chi'$.

Digitized by Google

Si l'on néglige la deuxième puissance de $\Delta\omega$, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, on aura simplement $\chi' = \varphi + \chi$, et les formules précédentes s'écriront en posant pour abréger $\alpha - \chi = \alpha_1$:

$$\cos(\delta + \Delta\delta)\cos(\alpha_1 - \varphi + \Delta\alpha) = \cos\delta\cos(\alpha_1 - \varphi) - \Delta\omega\sin\delta\sin\varphi$$
$$\cos(\delta + \Delta\delta)\sin(\alpha_1 - \varphi + \Delta\alpha) = \cos\delta\sin(\alpha_1 - \varphi) - \Delta\omega\sin\delta\cos\varphi$$
$$\sin(\delta + \Delta\delta) = \sin\delta + \Delta\omega\cos\delta\sin\alpha_1;$$

d'où l'on tire aisément :

$$\Delta\delta = \Delta\omega\sin(\alpha - \chi),$$
$$\Delta\alpha = -\Delta\omega\,\mathrm{tg}\,\delta\cos(\alpha - \chi).$$

Ces formules montrent, beaucoup plus simplement encore que la discussion de l'article 10, que les variations diurnes sont les plus fortes en ascension droite pour les étoiles situées par 0^h ou par 12^h, et en déclinaison pour celles qui sont situées par 6^h ou par 18^h.

Elles ne peuvent servir, malgré leur simplicité, à déterminer les mouvements diurnes apparents des astres, à cause de l'ignorance dans laquelle nous sommes quant à la valeur de l'angle χ que l'intersection de l'équateur vrai et de l'équateur moyen fait, à un instant donné, avec la ligne des équinoxes.

Cet angle ne pourra être connu que quand la constante de la nutation diurne aura été très exactement déterminée par l'observation.

13. Voyons maintenant quel sera le procédé le plus propre à la détermination de cette constante.

Comme nous venons de l'observer, les coefficients $\frac{1}{2}(1 - s_2)$, etc., des formules (20) sont assez peu différents de l'unité, et, par conséquent, les facteurs de la forme $\frac{\sin\frac{1}{2}(1 - s_2)t}{\frac{1}{2}(1 - s_2)}$ sont tous peu différents de $\sin t$. On peut donc dire, sans commettre d'erreur sensible, que cette dernière quantité multiplie tous les termes de la nutation diurne. Celle-ci aura donc une période de 24^h environ, et c'est après des intervalles de 6^h qu'elle passera par son maximum.

Mais comme la courbe de ces variations est une sinussoïde, il n'est pas

Digitized by Google

possible d'assigner, d'après ces formules, au lieu de l'astre, une position moyenne autour de laquelle il oscille dans son mouvement diurne apparent.

Force sera donc de prendre comme position moyenne celle qui correspond à un instant du jour qui soit fixe, et qui soit le même pour toute la Terre.

Le choix le plus rationnel est évidemment celui qui donne $\varphi = 0$ en même temps que $t = 0$, c'est-à-dire à l'instant où l'astre arrive à cette position moyenne conventionnelle.

Appelons premier méridien celui qui passe par l'axe des x.

Comme φ est l'angle que cet axe fait, dans le sens du mouvement de rotation de la Terre, avec la ligne équinoxiale, φ, réduit en temps, sera l'heure sidérale du premier méridien.

A cette heure φ correspond l'heure sidérale $\varphi + L = T$, pour un lieu d'observation dont la longitude orientale est L par rapport au premier méridien. Cette heure, étant celle de l'observation, est celle pour laquelle sont valables les expressions de $\Delta\delta$ et de $\Delta\alpha$ données ci-dessus; et comme, dans l'hypothèse où la position moyenne des astres est celle qu'ils occupent à 0^h (temps du premier méridien), $2\varphi_m$ est égale à φ, on aura $2\varphi_m = T - L$. Quant à t ou $\varphi - \varphi_0$, il sera aussi égal à $T - L$.

Ce procédé rationnel ne peut toutefois être utilement employé que si l'on connaît la longitude L du lieu d'observation par rapport au premier méridien. Il serait incommode dans le cas où l'on voudrait la calculer, à cause des produits de sinus dans lesquels entrerait L.

Pour ce cas, l'on devra déterminer d'une autre manière l'heure φ_0 du premier méridien, pour laquelle l'astre a sa position moyenne conventionnelle, φ étant l'heure de l'observation à laquelle correspondent $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$.

Or, en général, on a

$$\varphi = T - L, \quad \varphi_0 = T_0 - L,$$

d'où

$$t = \varphi - \varphi_0 = T - T_0,$$

et

$$2\varphi_m = \varphi + \varphi_0 = T + T_0 - 2L.$$

Il suffit donc de se donner arbitrairement l'heure T_0 du lieu d'observation, à partir de laquelle on veut calculer l'effet de la nutation diurne, pour que l'inconnue L n'entre plus à la fois dans les deux facteurs du produit.

Digitized by Google

On peut même profiter de cette arbitraire pour faire en sorte que cet effet soit un maximum; on n'aura, pour cela, qu'à prendre $T - T_0 = 6^h$; et c'est ce moyen qui sera le plus propre à assurer une détermination précise de L, c'est-à-dire de la position du premier méridien, en même temps que de la constante K de la nutation diurne.

Quel que soit, du reste, de ces deux procédés, celui que l'on voudra employer, il est clair que, vu la petitesse à laquelle on doit s'attendre pour cette constante, et malgré le soin que l'on prendra de ne faire usage que des observations les plus précises, on devra, pour éliminer de celles-ci les erreurs accidentelles, recourir à un nombre d'observations assez considérable, et les traiter par la méthode des moindres carrés.

14. Mais le problème présente beaucoup plus de complication encore que ne le font supposer les formules (20).

Il est évident, en effet, que l'ignorance de la nutation diurne peut avoir été la cause de certaines erreurs dans la détermination des constantes de la précession, de la nutation et de l'aberration (*); dans cette dernière surtout, à cause du nombre assez petit d'étoiles dont W. Struve s'est servi pour la déterminer, et peut-être aussi dans la détermination du mouvement propre des étoiles.

Il faudrait donc, à la rigueur, introduire dans les formules les corrections à appliquer à chacune de ces constantes, et, en outre, la parallaxe annuelle de l'étoile et sa nutation diurne, pour traiter le problème d'une manière complète.

Comme nous ne nous occuperons, toutefois, dans ce travail, que d'observations portant sur un assez petit nombre d'années, et que, dans ce cas, la correction de la constante de la précession et du mouvement propre sera probablement tout à fait insignifiante, nous ne tiendrons compte que des corrections des autres constantes, ainsi que de la parallaxe annuelle.

(*) Des considérations théoriques, exposées dans la suite de ce travail, démontrent que la valeur de cette constante, déterminée par Bessel, concorde mieux que celle de Struve avec la constante de la nutation de Peters.

Digitized by Google

Si nous représentons par e_δ et e_α les écarts qui existent entre la position apparente observée et la position apparente, calculée à l'aide de la position moyenne assignée à l'étoile et des constantes de Struve et Peters pour l'aberration et la nutation annuelle ; par $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$ les écarts entre cette position moyenne et la position moyenne conventionnelle définie ci-dessus ; par $\Delta\nu$ et Δa les corrections à appliquer aux constantes de la nutation annuelle et de l'aberration, nous aurons à écrire :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_\delta = \Delta\delta + \Delta\nu \cdot \mathrm{N}_\delta + \Delta a \cdot \mathrm{A}_\delta + \mathrm{K} \cdot \mathrm{J}_\delta + \varpi \cdot \Pi_\delta, \\ e_\alpha = \Delta\alpha + \Delta\nu \cdot \mathrm{N}_\alpha + \Delta a \cdot \mathrm{A}_\alpha + \mathrm{K} \cdot \mathrm{J}_\alpha + \varpi \cdot \Pi_\alpha, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles nous représentons pour abréger par N, A, J, Π avec les indices α ou δ, l'ensemble des termes de la nutation annuelle, de l'aberration, de la nutation diurne et de la parallaxe annuelle, en ascension droite ou en déclinaison.

Vu la petitesse probable de la correction $\Delta\nu$, on pourra se borner à la multiplier par les premiers termes seulement de la nutation annuelle. Quant aux termes qui multiplient les autres constantes, aucun ne peut, en général, être négligé.

Ceux de la nutation annuelle, par lesquels il faudra multiplier $\Delta\nu$, seront, comme on sait :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}_\delta = \sin\alpha\,\Delta\omega + \sin\omega\cos\alpha\,\Delta\psi, \\ \mathrm{N}_\alpha = (\cos\omega + \sin\omega\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\Delta\psi - \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\,\Delta\omega, \end{array} \right.$$

et l'on pourra se borner, pour $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$, au premier, ou, tout au plus, au deux premiers termes, savoir :

$$(22\,bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega = \cos\Omega + [8.77600]\cos 2\odot, \\ \Delta\psi = -2\cot 2\omega \sin\Omega - [9.13887]\sin 2\odot. \end{array} \right.$$

Les termes de l'aberration, auxquels il est permis de s'arrêter, peuvent s'écrire

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}_\delta = -\sin\delta\sin(\odot - \alpha) - 2\sin\frac{\omega}{2}\left\{\cos\left(\delta \mp \frac{\omega}{2}\right) \mp \varkappa \sin\frac{\omega}{2}\sin\delta\right\}\cos\odot, \\ \mathrm{A}_\alpha = -\sec\delta\left\{\cos(\odot - \alpha) - 2\sin^2\frac{\omega}{2}\cos\alpha\cos\odot\right\}. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Dans la première de ces expressions on a fait sin $\alpha = \pm(1 - \varkappa)$, de sorte que les signes supérieurs conviennent aux étoiles comprises entre 0^h et 12^h, les signes inférieurs aux étoiles comprises entre 12^h et 24^h.

Les termes de la parallaxe annuelle se déduisent simplement de ceux de l'aberration en changeant, dans ces derniers, $\odot$ en $\odot + \frac{\pi}{2}$. Il vient ainsi

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_\delta &= -\sin\delta\cos(\odot - \alpha) + 2\sin\frac{\omega}{2}\left\{\cos\left(\delta \mp \frac{\omega}{2}\right) \mp \varkappa\sin\frac{\omega}{2}\sin\delta\right\}\sin\odot, \\ \Pi_\alpha &= \sec\delta\left\{\sin(\odot - \alpha) - 2\sin^2\frac{\omega}{2}\cos\alpha\sin\odot\right\}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons enfin à nous occuper des termes J de la nutation diurne, qui sont donnés par les seconds membres des formules (20).

Comme ces seconds membres renferment encore une inconnue, la longitude du lieu d'observation par rapport au premier méridien, nous avons une dernière transformation à leur faire subir.

15. Nous admettrons, dans ce qui suit, que cette longitude a été déterminée approximativement par le second procédé indiqué à l'article 10, et qu'il ne s'agit plus ici que de calculer la correction ΔL qu'il y aura lieu d'apporter à cette détermination.

Tous les termes des formules (20) sont de la forme du premier d'entre eux, c'est-à-dire, en laissant de côté les coefficients :

$$\cos(S_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1 - s_2)t}{1 - s_2}.$$

Si l'on y remplace $2\varphi_m$, ainsi que t, par $T - L - \Delta L$ (art. 13), puis $S_m - T + L + \alpha$ par S_1, $T - L$ par T_1, et $\frac{1}{2}(1 - s_2)$ par $1 - \sigma$, ce terme deviendra, abstraction faite du facteur $\frac{1}{2}$:

$$\cos(S_1 + \Delta L)\frac{\sin(1 - \sigma)(T_1 - \Delta L)}{1 - \sigma},$$

Digitized by Google

et se réduira, si ΔL est assez petit, à

$$\cos S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} - \Delta L \left\{ \sin S_1 \frac{\sin(1-\sigma)\tau_1}{1-\sigma} + \cos S_1 \cos(1-\sigma)T_1 \right\} =$$

$$\cos S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} - \frac{\Delta L}{1-\sigma} \left\{ \cos\left[S_1 - (1-\sigma)T_1\right] - \sigma \cos S_1 \cos(1-\sigma)T_1 \right\}.$$

Le dernier terme de la parenthèse pourra très généralement être négligé, dans les expressions relatives au Soleil surtout. Nous le conserverons toutefois dans les formules ; on jugera immédiatement, dans l'application, s'il est négligeable.

En traitant de la même manière chacune des expressions des formules (20), on obtient, pour les termes de la nutation diurne :

$$(25) \quad \ldots \left\{ \begin{aligned} J_\delta = & \frac{1}{2s} \cos S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} + f \frac{1}{2s'} \cos S'_1 \frac{\sin(1-\sigma')T_1}{1-\sigma'} \\ & - \frac{1}{2r} \cos R_1 \frac{\sin(1-\rho)T_1}{1-\rho} - f \frac{1}{2r'} \cos R'_1 \frac{\sin(1-\rho')T_1}{1-\rho'} \end{aligned} \right.$$

$$- \Delta L \left(\begin{aligned} & \frac{1}{2s(1-\sigma)} \left\{ \cos\left[S_1 - (1-\sigma)T_1\right] - \sigma \cos S_1 \cos(1-\sigma)T_1 \right\} \\ & + \frac{f}{2s'(1-\sigma')} \left\{ \cos\left[S'_1 - (1-\sigma')T_1\right] - \sigma' \cos S'_1 \cos(1-\sigma')T_1 \right\} \\ & - \frac{1}{2r(1-\rho)} \left\{ \cos\left[R_1 - (1-\rho)T_1\right] - \rho \cos R_1 \cos(1-\rho)T_1 \right\} \\ & - \frac{f}{2r'(1-\rho)} \left\{ \cos\left[R'_1 - (1-\rho')T_1\right] - \rho' \cos R'_1 \cos(1-\rho')T_1 \right\} \end{aligned} \right).$$

$$(25\,bis) \left| \begin{aligned} J_\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & \left\{ \frac{1}{2s} \cos(S_1+\alpha) \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} + f \frac{1}{2s'} \cos(S'_1+\alpha) \frac{\sin(1-\sigma')T_1}{1-\sigma'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2r} \cos(R_1+\alpha) \frac{\sin(1-\rho)T_1}{1-\rho} - f \frac{1}{2r'} \cos(R'_1+\alpha) \frac{\sin(1-\rho')T_1}{1-\rho'} \right\} \\ - \operatorname{tg}\delta & \left\{ \frac{1}{2s} \sin S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} + f \frac{1}{2s'} \sin S'_1 \frac{\sin(1-\sigma')T_1}{1-\sigma'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2r} \sin R_1 \frac{\sin(1-\rho)T_1}{1-\rho} - f \frac{1}{2r'} \sin R'_1 \frac{\sin(1-\rho')T_1}{1-\rho'} \right\} \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

$$
-\Delta L \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\Big[\ \frac{1}{2s(1-\sigma)}\big\{\cos[S_1-(1-\sigma)T_1+\alpha]-\sigma\cos(S_1+\alpha)\cos(1-\sigma)T_1\big\}\\
&\qquad+\frac{f}{2s'(1-\sigma')}\big\{\cos[S'_1-(1-\sigma')T_1+\alpha]-\sigma'\cos(S'_1+\alpha)\cos(1-\sigma')T_1\big\}\\
&\qquad-\frac{1}{2r(1-\rho)}\big\{\cos[R_1-(1-\rho)T_1+\alpha]-\rho\cos(R_1+\alpha)\cos(1-\rho)T_1\big\}\\
&\qquad-\frac{f}{2r'(1-\rho')}\big\{\cos[R'_1-(1-\rho')T_1+\alpha]-\rho'\cos(R'_1+\alpha)\cos(1-\rho')T_1\big\}\Big]\\
&-\operatorname{tg}\delta\Big[\ \frac{1}{2s(1-\sigma)}\big\{\sin[S_1-(1-\sigma)\tau_1]-\sigma\sin S_1\cos(1-\sigma)\tau_1\big\}\\
&\qquad+\frac{f}{2s'(1-\sigma')}\big\{\sin[S'_1-(1-\sigma_1)\tau_1]-\sigma'\sin S'_1\cos(1-\sigma')\tau_1\big\}\\
&\qquad-\frac{1}{2r(1-\rho)}\big\{\sin[R_1-(1-\rho)\tau_1]-\rho\sin R_1\cos(1-\rho)\tau_1\big\}\\
&\qquad-\frac{f}{2r'(1-\rho')}\big\{\sin[R'_1-(1-\rho')\tau_1]-\rho'\sin R'_1\cos(1-\rho')\tau_1\big\}\Big]
\end{aligned}
\right\}
$$

On a fait, pour abréger, dans ces formules (25) :

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&s=s_2-\frac{b}{A}=a_2+2d_2-1-\frac{b}{A};\ \sigma=\frac{1}{2}a_2+d_2;\ r=r_2-\frac{b}{A}=a_2-2d_2-1-\frac{b}{A};\ \rho=\frac{1}{2}a_2-d_2;\\
&T_1=T-L;\ S_1=S_m-T+L+\alpha=\alpha_m+2\delta_m-T+L+\alpha;\ R_1=\alpha_m-2\delta_m-T+L+\alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

On a vu que α_m et δ_m représentent l'ascension droite et la déclinaison moyenne du Soleil entre l'instant où il est 0^h au premier méridien et l'instant de l'observation; a_2 et d_2 les mouvements du Soleil, en ascension droite et en déclinaison, à ce même instant moyen, rapportés au mouvement diurne pris pour unité.

Pour la Lune, il suffit d'accentuer toutes les lettres qui sont relatives au Soleil.

L est la longitude orientale du lieu d'observation par rapport au premier méridien, ΔL la correction à y apporter, T l'heure sidérale de l'observation; si celle-ci est faite dans le méridien, ou bien, pour une étoile zénithale, dans le premier vertical, tant à l'Est qu'à l'Ouest, on pourra prendre $T=\alpha$, et dans ces deux cas les expressions de S_1 et de T_1 se réduisent à

(26 *bis*) . . . . . $S_1=\alpha_m+2\delta_m+L,\quad R_1=\alpha_m-2\delta_m+L.$

Digitized by Google

16. Pour résumer enfin les formules qui permettront de calculer les constantes K et ϖ de la nutation diurne et de la parallaxe annuelle, ainsi que les corrections $\Delta\nu$, Δa, ΔL à apporter aux constantes de la nutation annuelle ou de l'aberration et à la longitude approximative du lieu de l'observation, nous séparerons en deux groupes les termes précédents en J; le premier groupe J' se composera des termes indépendants de ΔL, le second des termes qui ont ΔL pour facteur; en sorte que

$$J = J' + J''\Delta L, \tag{27}$$

qu'il s'agisse de l'ascension droite ou de la déclinaison.

Si nous faisons, de plus,

$$K\Delta L = l, \tag{28}$$

les formules (21) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} e_\delta &= \Delta\delta + \Delta\nu\cdot N_\delta + \Delta a\cdot A_\delta + K\cdot J'_\delta + l\cdot J''_\delta + \varpi\cdot \Pi_\delta.\\ e_\alpha &= \Delta\alpha + \Delta\nu\cdot N_\alpha + \Delta a\cdot A_\alpha + K\cdot J'_\alpha + l\cdot J''_\alpha + \varpi\cdot \Pi_\alpha.\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Chacune de ces formules renferme six inconnues, qui peuvent toutes, à l'exception peut-être de $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$, être considérées comme étant certainement inférieures à $0''.1$; elles se prêtent donc l'une et l'autre, de la manière la plus simple, à l'emploi de la méthode des moindres carrés.

Les expressions de N, A, Π, J', et J'' sont données dans les formules (22) à (26).

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Formules de la nutation diurne rapportée à l'écliptique.

17. De même que nous avons rapporté la nutation diurne à la position actuelle du plan de l'équateur, considérée comme fixe, de même nous allons la rapporter à celle de l'écliptique.

Nous négligerons, pendant la durée du jour, la précession des équinoxes, et, à plus forte raison, la variation d'obliquité de l'écliptique. De plus, nous pourrons, à cause de la faiblesse de la nutation diurne, considérer les orbites du Soleil et de la Lune comme circulaires, celle du premier de ces astres comme coïncidant avec l'écliptique, celle du second comme faisant avec ce plan un angle constant.

Pour le Soleil nous aurons donc :

$$\sin\delta = \sin\omega \sin\odot;\quad \cos\delta\cos\alpha = \cos\odot;\quad \cos\delta\sin\alpha = \cos\omega\sin\odot.$$

Si nous faisons

$$(30)\quad \ldots\ldots\quad -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\sin\omega = 2h\sin\omega = h_1,$$

les formules (3) deviendront par là :

$$(31)\quad \ldots\quad \begin{cases} p = h_1\left\{\cos\omega\sin\varphi + \cos^2\frac{\omega}{2}\sin(2\odot - \varphi) + \sin^2\frac{\omega}{2}\sin(2\odot + \varphi)\right\} \\ q = h_1\left\{\cos\omega\cos\varphi - \cos^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot - \varphi) + \sin^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot + \varphi)\right\}. \end{cases}$$

18. Nous poserons, comme à l'article 5, mais en laissant immédiatement de côté les termes qui ne renferment pas φ :

$$l = \Phi' + H_1\sin(2\odot - \varphi) + H_2\sin(2\odot + \varphi),$$

et nous substituerons cette expression dans l'équation

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}n(l + p),$$

Digitized by Google

il viendra :

$$\frac{dm}{dt}=\frac{a}{B}n\left\{\Phi' + h_1 \cos\omega \sin\varphi + \left(H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin(2\odot - \varphi) + \left(H_2 + h_1 \sin^2\frac{\omega}{2}\right)\sin(2\odot + \varphi)\right\};$$

$$m = \frac{a}{B}n\left\{\Phi - \frac{h_1}{n}\cos\omega\cos\varphi - \frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{2m_1 - n}\cos(2\odot - \varphi) - \frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{2m_1 + n}\cos(2\odot + \varphi)\right\}.$$

Portant cette valeur et celle de q dans l'équation

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A}n(m + q),$$

on aura :

$$\Phi'' + H_1(2m_1 - n)\cos(2\odot - \varphi) + H_2(2m_1 + n)\cos(2\odot + \varphi) =$$

$$-\frac{ab}{AB}n^2\left\{\Phi - \frac{h_1}{n}\cos\omega\cos\varphi - \frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{2m_1 - n}\cos(2\odot - \varphi) - \frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{2m_1 + n}\cos(2\odot + \varphi)\right\}$$

$$-\frac{b}{A}nh_1\left\{\cos\omega\cos\varphi - \cos^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot - \varphi) + \sin^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot + \varphi)\right\}.$$

L'identification des deux membres donne, en premier lieu :

$$\Phi'' + \iota^2 n^2\left(\Phi - \frac{h_1}{n}\cos\omega\cos\varphi\right) + \frac{b}{A}nh_1\cos\omega\cos\varphi = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant :

$$\Phi = \frac{1}{n}\frac{b}{A}\frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}}h_1\cos\omega\cos\varphi + \sin\iota\varphi,$$

$$\Phi' = -\frac{b}{A}\frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}}h_1\cos\omega\sin\varphi + \iota n\cos\iota\varphi;$$

en second lieu :

$$H_1(2m_1 - n) = \frac{b}{A}nh_1\cos^2\frac{\omega}{2} + \frac{ab}{AB}n^2\frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{2m_1 - n},$$

$$H_2(2m_1 + n) = -\frac{b}{A}nh_1\sin^2\frac{\omega}{2} + \frac{ab}{AB}n^2\frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{2m_1 + n};$$

Digitized by Google

ou bien, si l'on fait $\frac{m_1}{n} = m_2$:

$$\mathrm{H}_1\left[(1-2m_2)^2 - \frac{ab}{\mathrm{AB}}\right] = -\frac{b}{\mathrm{A}}h_1\cos^2\frac{\omega}{2}\left(1-2m_2-\frac{a}{\mathrm{B}}\right),$$

$$\mathrm{H}_2\left[(1+2m_2)^2 - \frac{ab}{\mathrm{AB}}\right] = -\frac{b}{\mathrm{A}}h_1\sin^2\frac{\omega}{2}\left(1+2m_2-\frac{a}{\mathrm{B}}\right);$$

ce qui donnera, comme à l'article 5, en remplaçant $\frac{ab}{\mathrm{AB}}$ par $\frac{a^2}{\mathrm{B}^2}$:

$$\mathrm{H}_1 = -\frac{b}{\mathrm{A}}h_1\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}, \qquad \mathrm{H}_2 = -\frac{b}{\mathrm{A}}h_1\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}};$$

$$\frac{\mathrm{H}_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2} = h_1\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}; \qquad \frac{\mathrm{H}_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2} = h_1\frac{\sin_2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}.$$

On aura ainsi, en laissant de côté les termes en $\iota\varphi$, qui sont à longue période :

$$(32)\ \begin{cases} -\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\mathrm{A}}{b}\,l = \dfrac{1-\frac{a}{\mathrm{B}}}{1-\frac{ab}{\mathrm{AB}}}\cos\omega\ \mathrm{s}\quad\varphi + \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}\sin(2\odot-\varphi) + \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}\sin(2\odot+\varphi) \\[2ex] -\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\mathrm{B}}{a}\,m = \dfrac{1-\frac{b}{\mathrm{A}}}{1-\frac{ab}{\mathrm{AB}}}\cos\quad\cos\varphi - \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}\cos(2\odot-\varphi) + \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}}\cos(2\odot+\varphi). \end{cases}$$

19. Ces expressions, substituées dans les équations (11), donnent d'abord

$$(33)\ \begin{cases} \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\mathrm{A}}{c}\dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\omega\sin 2\varphi}{1-\frac{ab}{\mathrm{AB}}} - \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1-2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}\right)}\sin 2(\odot-\varphi) + \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1+2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}\right)}\sin 2(\odot+\varphi), \\[2ex] -\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\mathrm{A}}{c}\sin\omega\dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos\omega\cos 2\varphi}{1-\frac{ab}{\mathrm{AB}}} + \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1-2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}\right)}\cos 2(\odot-\varphi) - \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1+2m_2+\frac{a}{\mathrm{B}}\right)}\cos 2(\odot+\varphi). \end{cases}$$

Digitized by Google

Intégrons comme au n° 27, en posant

$$(54) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad K \sin\omega = K_1$$

voir (4), (14) et (30), il viendra :

$$(55) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{K_1} = & -\frac{\cos\omega \sin 2\varphi_m}{1-\dfrac{ab}{A}}\sin t - \frac{\cos^2\dfrac{\omega}{2}}{1-2m_2+\dfrac{a}{B}}\sin 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} \\ & + \frac{\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{1+2m_2+\dfrac{a}{B}}\sin 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} \\ -\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} = & -\frac{\cos\omega \cos 2\varphi_m}{1-\dfrac{ab}{AB}}\sin t + \frac{\cos^2\dfrac{\omega}{2}}{1-2m_2+\dfrac{a}{B}}\cos 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} \\ & - \frac{\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{1+2m_2+\dfrac{a}{B}}\cos 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}; \end{aligned} \right.$$

ou, si nous faisons, pour simplifier,

$$(56) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\cos^2\dfrac{\omega}{2}}{1-2m_2+\dfrac{a}{B}} = c_1, \quad \frac{\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{1+2m_2+\dfrac{a}{B}} = s_1:$$

$$(57) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{K_1} &= -\frac{\cos\omega\sin 2\varphi_m}{1-\dfrac{ab}{AB}}\sin t - c_1\sin 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} + s_1\sin 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} \\ -\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} &= -\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\dfrac{ab}{AB}}\sin t + c_1\cos 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} - s_1\cos 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}. \end{aligned} \right.$$

20. Quant à la Lune, nous regarderons comme constante l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique, et nous nous arrêterons à la première puissance

Digitized by Google

de cette inclinaison. S'il était nécessaire, dans le calcul de la nutation diurne, de tenir compte de la seconde puissance pour des étoiles très voisines du pôle, on pourrait recourir aux formules complètes que nous donnerons dans la théorie de la nutation annuelle; mais, en pratique, c'est toujours de l'expression de la nutation diurne en fonction des ascensions droites et déclinaisons du Soleil et de la Lune que l'on fera usage.

Or, on a, en appelant β la latitude de la Lune, ☾ sa longitude, ☊ celle du nœud, i la tangente de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique :

$$\sin\delta = \cos\omega \sin\beta + \sin\omega\cos\beta\sin☾$$
$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\omega\sin\beta + \cos\omega\cos\beta\sin☾$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos☾;\quad \operatorname{tg}\beta = i\sin(☾ - ☊).$$

Nous prendrons cette dernière expression comme étant celle de sin β, et nous ferons cos $\beta = 1$.

Cela étant, on tirera des formules (3) en accentuant le coefficient h pour le rapporter à la Lune :

$$\frac{p}{4h'} = \cos\varphi\cos☾\left[i\cos\omega\sin(☾ - ☊) + \sin\omega\sin☾\right]$$
$$+ \sin\varphi\left[\tfrac{1}{2}\sin 2\omega\sin^2☾ + i\cos 2\omega\sin☾\sin(☾ - ☊)\right].$$

Et, si l'on développe ces expressions, on trouvera aisément

$$(38)\quad \frac{p}{h'\cos\omega} = K_1\cos\varphi - K_2\sin\varphi + K_3\cos(2☾-\varphi) + K_4\cos(2☾+\varphi) + K_5\sin(2☾-\varphi) + K_6\sin(2☾+\varphi);$$

d'où l'on déduira, en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$:

$$(38\,bis)\quad \frac{q}{h'\cos\omega} = -K_1\sin\varphi - K_2\cos\varphi + K_3\sin(2☾-\varphi) - K_4\sin(2☾+\varphi) - K_5\cos(2☾-\varphi) + K_6\cos(2☾+\varphi),$$

formules dans lesquelles

$$(39)\left\{\begin{aligned}
&K_1 = -2i\sin☊;\quad K_2 = -2\sin\omega(1 + 2i\cos☊\cot 2\omega);\\
&K_3 = -i\sin☊\left(1 + \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right);\quad K_4 = -i\sin☊\left(1 - \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right);\\
&K_5 = \sin\omega(\sec\omega + 1) + i\cos☊\left(1 + \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right);\quad K_6 = \sin\omega(\sec\omega - 1) + i\cos☊\left(1 - \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right).
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

21. La forme des expressions de p et de q nous conduit naturellement à poser :

$$(40)\quad l = \Phi' + H_1 \sin(2☾ - \varphi) + H_2 \sin(2☾ + \varphi) + H_3 \cos(2☾ - \varphi) + H_4 \cos(2☾ + \varphi);$$

d'où nous tirerons, en écrivant h_2 au lieu de $h' \cos \omega$:

$$(41)\quad \begin{cases} \frac{1}{n}\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}(l + p) = \frac{a}{B}\{\Phi' + h_2(K_1 \cos\varphi - K_2 \sin\varphi) + (H_1 + h_2 K_5)\sin(2☾ - \varphi) \\ \quad + (H_2 + h_2 K_6)\sin(2☾ + \varphi) + (H_3 + h_2 K_3)\cos(2☾ - \varphi) + (H_4 + h_2 K_4)\cos(2☾ + \varphi)\}; \end{cases}$$

et, en intégrant :

$$(42)\quad \begin{cases} m = \frac{a}{B}\Big\{ n\Phi + h_2(K_1 \sin\varphi + K_2 \cos\varphi) + \frac{H_1 + h_2 K_5}{1 - 2m'_2}\cos(2☾ - \varphi) \\ \quad - \frac{H_2 + h_2 K_6}{1 + 2m'_2}\cos(2☾ + \varphi) - \frac{H_3 + h_2 K_3}{1 - 2m'_2}\sin(2☾ - \varphi) + \frac{H_4 + h_2 K_4}{1 + 2m'_2}\sin(2☾ + \varphi)\Big\}. \end{cases}$$

Portons cette valeur, ainsi que celle de q et de $\frac{dl}{dt}$, dans l'équation :

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A} n(m + q),$$

et identifions les deux membres, il viendra d'abord :

$$\Phi'' = -\iota^2 n^2 \Phi + \frac{b}{A}\left(1 - \frac{a}{B}\right) n h_2 (K_1 \sin\varphi + K_2 \cos\varphi),$$

d'où l'on tire, en laissant de côté les termes en $\iota\varphi$:

$$\Phi = -\frac{b}{A}\,\frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}}\,\frac{h_2}{n}(K_1 \sin\varphi + K_2 \cos\varphi)$$

$$\Phi' = -\frac{b}{A}\,\frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}}\,h_2 (K_1 \cos\varphi - K_2 \sin\varphi).$$

Digitized by Google

Ensuite :

$$H_1\left[(1-2m'_2)^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_5\left(1-2m'_2-\frac{a}{B}\right).$$

$$H_2\left[(1+2m'_2)^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_6\left(1+2m'_2-\frac{a}{B}\right).$$

$$H_3\left[(1-2m'_2)^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_3\left(1-2m'_2-\frac{a}{B}\right).$$

$$H_4\left[(1+2m'_2)^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_4\left(1+2m'_2-\frac{a}{B}\right).$$

On déduit de là, comme plus haut (art. 5) :

$$H_1=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_5}{1-2m'_2+\frac{a}{B}};\qquad \frac{H_1+h_2K_5}{1-2m'_2}=h_2\frac{K_5}{1-2m'_2+\frac{a}{B}}.$$

$$H_2=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_6}{1+2m'_2+\frac{a}{B}};\qquad \frac{H_2+h_2K_6}{1+2m'_2}=h_2\frac{K_6}{1+2m'_2+\frac{a}{B}}.$$

$$H_3=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_3}{1-2m'_2+\frac{a}{B}},\qquad \frac{H_3+h_2K_3}{1-2m'_2}=h_2\frac{K_3}{1-2m'_2+\frac{a}{B}}.$$

$$H_4=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_4}{1+2m'_2+\frac{a}{B}};\qquad \frac{H_4+h_2K_4}{1+2m'_2}=h_2\frac{K_4}{1+2m'_2+\frac{a}{B}}.$$

Les expressions de l et de m deviennent ainsi :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
-\frac{1}{h_2}\frac{A}{b}l=&\frac{1-\frac{a}{B}}{1-\frac{ab}{AB}}(K_1\cos\varphi-K_2\sin\varphi)+\frac{K_5}{1-2m'_2+\frac{a}{B}}\sin(2\leftmoon-\varphi)+\frac{K_6}{1+2m'_2+\frac{a}{B}}\sin(2\leftmoon+\varphi)\\
&+\frac{K_3}{1-2m'_2+\frac{a}{B}}\cos(2\leftmoon-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m'_2+\frac{a}{B}}\cos(2\leftmoon+\varphi).\\
\frac{1}{h_2}\frac{B}{a}m=&\frac{1-\frac{b}{A}}{1-\frac{ab}{AB}}(K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi)+\frac{K_5}{1-2m'_2+\frac{a}{B}}\cos(2\leftmoon-\varphi)-\frac{K_6}{1+2m'_2+\frac{a}{B}}\cos(2\leftmoon+\varphi)\\
&-\frac{K_3}{1-2m'_2+\frac{a}{B}}\sin(2\leftmoon-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m'_2+\frac{a}{B}}\sin(2\leftmoon+\varphi).
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

22. Leur substitution dans les formules (11) donne, si l'on ne conserve que les termes de la nutation diurne :

$$\frac{1}{h_2}\frac{A}{c}\frac{d\omega}{dt}=\sin\varphi\left\{\frac{K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2☾-\varphi)-\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2☾+\varphi)\right.$$
$$\left.-\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2☾-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2☾+\varphi)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{K_2\sin2\varphi-K_1\cos2\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}-\frac{K_5\sin2(☾-\varphi)+K_3\cos2(☾-\varphi)}{2\left(1-2m_2'+\frac{a}{B}\right)}+\frac{K_6\sin2(☾+\varphi)-K_4\cos2(☾+\varphi)}{2\left(1+2m_2'+\frac{a}{B}\right)}.$$

$$-\frac{1}{h_2}\frac{A}{c}\sin\omega\frac{d\psi}{dt}=\cos\varphi\left\{\frac{K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2☾-\varphi)-\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2☾+\varphi)\right.$$
$$\left.-\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2☾-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2☾+\varphi)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{K_2\cos2\varphi+K_1\sin2\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5\cos2(☾-\varphi)-K_3\sin2(☾-\varphi)}{2\left(1-2m_2'+\frac{a}{B}\right)}-\frac{K_6\cos2(☾+\varphi)-K_4\sin2(☾+\varphi)}{2\left(1+2m_2'+\frac{a}{B}\right)}.$$

23. Intégrant entre les limites 0 et t, comme à l'article 7, nous trouverons, en écrivant simplement t au lieu de nt, ce qui revient à supposer le temps converti en arc :

$$\frac{2n}{h_2}\frac{A}{c}\Delta\omega=\frac{K_2\sin2\varphi_m-K_1\cos2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t-\frac{K_5\sin2(☾_m-\varphi_m)+K_3\cos2(☾_m-\varphi_m)}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}$$
$$+\frac{K_6\sin2(☾_m+\varphi_m)-K_4\cos2(☾_m+\varphi_m)}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'},$$

$$-\frac{2n}{h_2}\frac{A}{c}\sin\omega\Delta\psi=\frac{K_2\cos2\varphi_m+K_1\sin2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5\cos2(☾_m-\varphi_m)-K_3\sin2(☾_m-\varphi_m)}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}$$
$$-\frac{K_6\cos2(☾_m+\varphi_m)-K_4\sin2(☾_m+\varphi_m)}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}.$$

Digitized by Google

24. Il s'agit enfin de remplacer les coefficients k par leurs valeurs (38). Dans cette opération, nous rangerons en dernière ligne tous les termes qui ont i pour facteur, et, en posant :

$$(44) \ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2'+\frac{a}{B}} = c_1', \qquad \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2'+\frac{a}{B}} = s_1' \\ &\frac{1}{2}\cot\omega\,\frac{1+\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}}{1-2m_2'+\frac{a}{B}} = c_2', \qquad \frac{1}{2}\cot\omega\,\frac{1-\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}}{1+2m_2'+\frac{a}{B}} = s_2' \end{aligned} \right.$$

nous trouverons :

$$(45) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{f}\frac{\Delta\omega}{K_1} = -\frac{\cos\omega\sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t - c_1'\sin 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} + s_1'\sin 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'} \\ &+ i\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos 2\varphi_m-\cos 2\omega\cos\Omega\sin 2\varphi_m}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} - c_2'\sin(2\mathbb{C}_m-2\varphi_m-\Omega)+s_2'\sin(2\mathbb{C}_m+2\varphi_m+\Omega)\right\}. \\ &-\frac{1}{f}\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} = -\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t + c_1'\cos 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} - s_1'\cos 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'} \\ &+ i\left\{-\frac{\cos\omega\sin\Omega\sin 2\varphi_m+\cos 2\omega\cos\Omega\cos 2\varphi_m}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} + c_2'\cos(2\mathbb{C}_m-2\varphi_m-\Omega)-s_2'\cos(2\mathbb{C}_m+2\varphi_m-\Omega)\right\}. \end{aligned} \right.$$

25. Réunissant les actions du Soleil et de la Lune (37) et (45), on obtiendra enfin :

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{K_1} = &-(1+f)\frac{\cos\omega\sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t - c_1\sin 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} - fc_1'\sin 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} \\ &+ s_1\sin 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} + fs_1'\sin 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'} \end{aligned} \right.$$

$$+fi\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos 2\varphi_m - \cos 2\omega\cos\Omega\sin 2\varphi_m}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} - c_2'\sin(2☾_m - 2\varphi_m - \Omega)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} + s_2'\sin(2☾_m + 2\varphi_m - \Omega)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\right\}.$$

(46)
$$-\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} = -(1+f)\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t + c_1\cos 2(⊙_m - \varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2}$$
$$+fc_1'\cos 2(☾_m - \varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} - s_1\cos 2(⊙_m + \varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} - fs_1'\cos 2(☾_m + \varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}$$
$$+fi\left\{\frac{-\cos\omega\sin\Omega\sin 2\varphi_m + \cos 2\omega\cos\Omega\cos 2\varphi_m}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} + c_2'\cos(2☾_m - 2\varphi_m - \Omega)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} - s_2'\cos(2☾_m + 2\varphi_m - \Omega)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\right\}.$$

26. Il peut être intéressant, au point de vue des observations destinées à vérifier l'existence et à déterminer le coefficient de la nutation diurne, de rechercher quelles sont les positions des deux astres pour lesquelles celle-ci est la plus grande ou la plus petite, en ascension droite ou en déclinaison.

Nous n'aurons pour cela qu'à substituer les expressions précédentes dans les équations (18), ce qui donnera :

(47)
$$\frac{\Delta\delta}{K_1} = \frac{1+f}{1-\frac{ab}{AB}}\cos\omega\cos(2\varphi_m+\alpha)\sin t - c_1\cos(2⊙_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2}$$
$$-fc_1'\cos(2☾_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}$$
$$+s_1\cos(2⊙_m + 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} + fs_1'\cos(2☾_m + 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}$$
$$+fi\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\sin(2\varphi_m+\alpha) + \cos 2\omega\cos\Omega\cos(2\varphi_m+\alpha)}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} - c_2'\cos(2☾_m - 2\varphi_m - \Omega - \alpha)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} + s_2'\cos(2☾_m + 2\varphi_m - \Omega - \alpha)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\right\}.$$

Digitized by Google

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{K_1} = \operatorname{tg}\delta \Bigg\{ & \frac{1+f}{1-\frac{ab}{AB}} \cos\omega \sin(2\varphi_m + \alpha)\sin t + c_1 \sin(2\odot_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} \\ & + fc'_1 \sin(2☾_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1-m'_2)t}{1-m'_2} \\ & - s_1 \sin(2\odot_m + 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} - fs'_1 \sin(2☾_m + 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1+m'_2)t}{1+m'_2} \\ & + fi\Bigg[-\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos(2\varphi_m+\alpha) - \cos 2\omega\cos\Omega\sin(2\varphi_m+\alpha)}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} \\ & + c'_2 \sin(2☾_m - 2\varphi_m - \Omega - \alpha)\frac{\sin(1-m'_2)t}{1-m'_2} - s'_2 \sin(2☾_m + 2\varphi_m - \Omega - \alpha)\frac{\sin(1+m'_2)t}{1+m'_2}\Bigg]\Bigg\} \\ & + \cos\alpha\,\frac{\Delta\psi}{K_1}. \end{aligned}\right.$$

Dans ce dernier terme, il faudra remplacer $\frac{\Delta\psi}{K_1}$ par sa valeur précédente.

27. La périodicité que nous avons constatée précédemment dans la nutation diurne, article 13, se retrouve dans ces dernières formules. On en déduirait également avec facilité les conséquences trouvées à l'article 10, quant à l'influence de l'ascension droite sur les variations diurnes des coordonnées des astres; nous ne reviendrons donc pas sur ces points.

Afin de pouvoir discuter plus aisément les formules (47) et (48), au point de vue de l'influence exercée par la position du Soleil et de la Lune sur la nutation diurne, il sera nécessaire d'y introduire quelques simplifications, qui en altéreront un peu, il est vrai, l'exactitude, mais offriront le grand avantage de donner à ces formules une expression excessivement simple, et très propre, par cela même, à une vérification expérimentale.

Dans ce but, nous négligerons $\frac{ab}{AB}$, m_2 et m'_2 vis-à-vis de l'unité; nous ne considérerons que l'effet maximum, répondant à $t = \frac{\pi}{2}$; et comme, en prenant l'origine du temps à 0^h sidérale du premier méridien, nous avons $2\varphi_m = t$, il viendra, pour le maximum, en faisant abstraction, pour le moment, de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique :

$$(49)\qquad \frac{\Delta\delta}{K_1} = -(1+f)\cos\omega\sin\alpha - (c_1+s_1)\sin(2\odot - \alpha) - f(c'_1 + s'_1)\sin(2☾ - \alpha).$$

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{K_1} &= \operatorname{tg}\delta\,\{(1+f)\cos\omega\cos\alpha-(c_1+s_1)\cos(2\odot-\alpha)-f(c_1'+s_1')\cos(2☾-\alpha)\}\\ &-\frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\{(c_1+s_1)\sin 2\odot+f(c_1'+s_1')\sin 2☾\}.\end{aligned}\right.$$

On voit, par ces formules, que la plus grande nutation diurne se présentera :

1° *En déclinaison :* lorsque les longitudes du Soleil et de la Lune seront de 45° (ou 225°) ou bien de 135° (ou 215°) supérieures à l'ascension droite de l'étoile, et surtout, dans le premier cas, pour les étoiles dont l'ascension droite approche de 6^h, dans le second, pour celles qui sont situées vers 18^h.

2° *En ascension droite,* au contraire :

a) Si la déclinaison de l'étoile est assez forte, lorsque les longitudes du Soleil et de la Lune seront égales à l'ascension droite de l'étoile (+ 0° ou + 180°), ou lorsqu'elles en différeront de 90°, et surtout, dans le premier cas, pour les étoiles dont l'ascension droite approche de 12^h, dans le second, pour celles qui sont situées vers 0^h;

b) Si la déclinaison de l'étoile est très faible, lorsque les longitudes du Soleil et de la Lune seront de 45°, et surtout encore pour les étoiles situées vers 0^h ou vers 12^h;

c) Si la déclinaison de l'étoile est moyenne, la discussion de la formule ne pourra pas conduire à un résultat assez général et assez simple. Le lecteur trouvera aisément ce résultat pour une étoile donnée.

28. L'influence du nœud de la Lune, que nous avons négligée dans cette discussion, ne modifiera qu'assez faiblement les conclusions qui précèdent.

Dans la nutation diurne en déclinaison, cette influence sera exprimée, pour $t=\frac{\pi}{2}$, par

$$(51)\quad \ldots\quad fi\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos\alpha-\cos 2\omega\cos\Omega\sin\alpha}{\sin\omega}-(c_1'+s_1')\sin(2☾-\Omega-\alpha)\right\},$$

dont le dernier terme a le même signe que le terme correspondant, indépendant de i, en sin $(2☾-\alpha)$.

Comme il est égal à $(1 + i \cos \Omega) \sin (2☾ - \alpha) - i \sin \Omega \cos (2☾ - \alpha)$, il s'ensuit qu'aux époques où la Lune exercera sa plus grande influence en déclinaison, celle-ci sera la plus forte lorsque la longitude du nœud sera nulle.

L'expression complète de $\Delta\delta$ sera alors, pour $t = \frac{\pi}{2}$ (49) et (51) :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\delta}{K_1} = & - \{ (1+f) \cos \omega + if \cos 2\omega \} \sin \alpha - (c_1 + s_1) \sin (2\odot - \alpha) \\ & - f \{ (c'_1 + s'_1 + i(c'_2 + s'_2) \} \sin (2☾ - \alpha), \end{aligned} \right.$$

expression dont tous les termes s'ajoutent pour les époques qui ne s'éloignent pas fort du maximum, auquel correspondent, nous venons de le voir, $2\odot - \alpha = 2☾ - \alpha = \frac{\pi}{2}$.

En ascension droite, l'influence du nœud est exprimée, pour $t = \frac{\pi}{2}$, par :

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} & fi \Big\{ \operatorname{tg} \delta \left[\frac{\cos \omega \sin \Omega \sin \alpha + \cos 2\omega \cos \Omega \cos \alpha}{\sin \omega} + (c'_2 + s'_2) \cos (2☾ - \Omega - \alpha) \right] \\ & \quad + \frac{\cos \alpha}{\sin \omega} \left[\cot \omega \sin \Omega - (c'_2 + s'_2) \sin (2☾ - \Omega) \right] \Big\}, \end{aligned} \right.$$

et l'on voit qu'à l'époque où la Lune exerce sa plus grande action en ascension droite, c'est encore quand la longitude du nœud sera nulle que cette influence sera le plus sensible.

L'expression complète de $\Delta\alpha$ sera alors, pour $t = \frac{\pi}{2}$, (50) et (53) :

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{K_1} = & \operatorname{tg} \delta \Big\{ \left[(1+f) \cos \omega + if \frac{\cos 2\omega}{\sin \omega} \right] \cos \alpha + (c_1 + s_1) \cos (2\odot - \alpha) + f \left[c'_1 + s'_1 + i(c'_2 + s'_2) \right] \cos (2☾ - \alpha) \Big\} \\ & + \frac{\cos \alpha}{\sin \omega} \Big\{ (c_1 + s_1) \sin 2\odot + f \left[c'_1 + s'_1 + i (c'_2 + s'_2) \right] \sin 2☾ \Big\}. \end{aligned} \right.$$

29. La discussion précédente suffit pour mettre en lumière deux points très importants relativement à la détermination de la position absolue des

Digitized by Google

étoiles, et à la vérification de l'existence de la nutation diurne : c'est que celle-ci est, en déclinaison, la plus grande pour $\sin(2\odot - \alpha) = \sin(2☾ - \alpha) = 1$, nulle pour $\alpha = 0$, $\odot = ☾ = 0$ ou π; en ascension droite, au contraire, la plus grande pour $\cos(2\odot - \alpha) = \cos(2☾ - \alpha) = 1$, au moins pour les étoiles d'assez forte déclinaison ; nulle pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et $\odot = ☾ = 0$ ou π.

Digitized by Google

LIVRE II.

DE LA PRÉCESSION ET DE LA NUTATION ANNUELLES.

CHAPITRE I.

Procédé d'intégration.

30. Le procédé d'intégration qui vient de nous donner l'expression de la nutation diurne peut être appliqué, sans modification essentielle, au calcul de la précession et de la nutation annuelles, si l'on admet, comme nous le ferons, que la vitesse angulaire de la Terre, autour de son axe, est constante. Toutefois, à raison du grand nombre de termes dont nous aurons à tenir compte, il conviendra d'introduire, dans ce procédé, une simplification assez importante.

Nous commencerons par le développer d'une manière générale.

Après que les coordonnées de l'astre attirant auront été rapportées à un système d'axes absolument fixes, nous verrons que la quantité p (art. 2) se mettra sous la forme :

$$p = \Sigma u \sin (vt \pm \varphi),$$

u et v désignant des constantes connues dans le cas, considéré ici, où l'on fait abstraction des variations séculaires; et que la quantité q se déduira de la précédente par le simple changement de φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Cette circonstance, au surplus, peut être prévue; car l'axe des y étant à 90° de distance de l'axe des x, dans le sens direct, et celui-ci faisant, dans le même sens, l'angle φ avec l'intersection des plans xy et XY, l'angle que l'axe des y fait avec cette ligne sera $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Et comme q se tire de p par le changement de x en y, on l'en tirera de même en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Digitized by Google

Après la substitution des expressions de p et q dans les équations

$$(1) \quad \dots\dots \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A} n(m+q); \quad \frac{dm}{dt} = \frac{a}{B} n(l+p),$$

nous aurons à intégrer celles-ci.

Or, $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ désignant chacun des termes dont les sommes composent les expressions de p et q; $l_1, l_2, \dots, m_1, m_2, \dots$ les valeurs de l, m qui leur correspondent séparément, il est évident que, si l'on satisfait à chacune des équations

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{b}{A} n(m_1 + q_1), \quad \frac{dm_1}{dt} = \frac{a}{B} n(l_1 + p_1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

on trouvera, en en faisant la somme,

$$\Sigma \frac{dl_1}{dt} = -\frac{b}{A} n[\Sigma(m_1) + q], \quad \Sigma \frac{dm_1}{dt} = \frac{a}{B} n[\Sigma(l_1) + p];$$

et, en comparant aux équations (1),

$$l = \Sigma l_1, \quad m = \Sigma m_1.$$

31. Envisageons donc séparément chacun des termes

$$(55) \quad \dots\dots \quad p_1 = u_1 \sin(v_1 t \pm \varphi), \quad q_1 = \pm u_1 \cos(v_1 t \pm \varphi)$$

et supprimons les indices 1.

Nous commencerons par le cas particulier où $v = 0$, et où le terme correspondant de p et de q se réduit à

$$(56) \quad \dots\dots\dots \quad p = u_0 \sin \varphi, \quad q = u_0 \cos \varphi.$$

Nous poserons, dans ce cas, comme à l'article 5 :

$$(57) \quad \dots\dots \quad l = \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + H_0 \sin \varphi,$$

Digitized by Google

n_1 étant comme ci-dessus égal à ιn, et ι^2 à $\frac{ab}{AB}$; et nous aurons :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B} n \left\{ \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + (H_0 + u_0) \sin \varphi \right\},$$

d'où, en intégrant :

$$(58) \quad \ldots \quad m = -\frac{a}{B} n \left\{ \frac{\alpha_1}{n_1} \cos(n_1 t + \beta_1) - \Phi + \frac{u_0 + H_0}{n} \cos \varphi \right\}.$$

Portant cette expression, ainsi que celle de $\frac{dl}{dt}$, dans la première équation (1), et identifiant les deux membres, on trouve d'abord :

$$\Phi'' + n^2 \iota^2 \Phi + n \cos \varphi \left[H_0 \left(1 - \frac{ab}{AB}\right) + \frac{b}{A} u_0 \left(1 - \frac{a}{B}\right) \right] = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\Phi = \cos \iota \varphi + \frac{1}{n} \frac{H_0 \left(1 - \frac{ab}{AB}\right) + \frac{b}{A} u_0 \left(1 - \frac{a}{B}\right)}{1 - \frac{ab}{AB}} \cos \varphi,$$

et

$$\Phi' = -\iota n \sin \iota \varphi - \frac{H_0 \left(1 - \frac{ab}{AB}\right) + \frac{b}{A} u_0 \left(1 - \frac{a}{B}\right)}{1 - \frac{ab}{AB}} \sin \varphi.$$

Les expressions de l et de m deviennent par là :

$$(59) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} l &= \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) - \iota n \sin \iota \varphi - \frac{b}{A} u_0 \frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}} \sin \varphi, \\ m &= -\frac{a}{B} n \left\{ \frac{\alpha_1}{n_1} \cos(n_1 t + \beta_1) - \cos \iota \varphi + \frac{1 - \frac{b}{A}}{1 - \frac{ab}{AB}} \frac{u_0}{n} \cos \varphi \right\}, \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

ou, si nous laissons de côté les termes relatifs aux variations séculaires :

$$(60) \quad \ldots \quad \left\{ l = -\frac{b}{A} u_0 \frac{1-\frac{a}{B}}{1-\frac{ab}{AB}} \sin \varphi ; \qquad m = -\frac{a}{B} u_0 \frac{1-\frac{b}{A}}{1-\frac{ab}{AB}} \cos \varphi . \right.$$

Au moyen des formules (11), on obtient alors, en appelant θ l'inclinaison du plan de l'équateur xy sur le plan fixe XY, et en faisant abstraction de la nutation diurne :

$$(61) \quad \ldots \ldots \quad \left\{ \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad \sin\theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B} + \frac{b}{A}\right) - \frac{ab}{AB}}{1 - \frac{ab}{AB}} u_0 . \right.$$

La première équation donne

$$\theta = \text{constante} = \theta_0 ;$$

et la seconde

$$(62) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \sin\theta_0 \Delta\psi = \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} u_0 \, t ,$$

en faisant

$$(63) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B} + \frac{b}{A}\right), \quad \varpi = \frac{ab}{AB}$$

et en appelant $\Delta\psi$ la variation de l'angle ψ depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t.

32. Dans le cas général, dont nous allons nous occuper maintenant, nous ne reviendrons plus sur les termes $\alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1)$ et Φ.

La forme des expressions (55) de p et q, que nous écrirons

$$(64) \quad \ldots \ldots \quad p = u \sin (v_2 \pm 1)\varphi , \quad q = \pm u \cos (v_2 \pm 1)\varphi ,$$

Digitized by Google

en faisant $v = nv_2$, nous conduira donc à poser simplement :

$$l = \mathrm{H} \sin(v_2 \pm 1)\varphi;$$

d'où :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{\mathrm{B}} n(\mathrm{H} + u) \sin(v_2 \pm 1)\varphi,$$

et, en intégrant,

$$m = -\frac{a}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{H} + u}{v_2 \pm 1} \cos(v_2 \pm 1)\varphi.$$

Substituant dans la première des équations (1), on trouve, en laissant de côté le facteur $\cos(v_2 \pm 1)\varphi$:

$$\mathrm{H}(v_2 \pm 1) = \frac{ab}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{H} + u}{v_2 \pm 1} \mp \frac{b}{\mathrm{A}} u;$$

d'où :

$$\mathrm{H} = \mp \frac{b}{\mathrm{A}} \frac{u}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}}$$

et

$$\frac{a}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{H} + u}{v_2 \pm 1} = u \frac{\frac{a}{\mathrm{B}} \pm \mathrm{Q}}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}},$$

Q représentant, suivant le cas, l'un ou l'autre des produits

$$(65) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{c}{\mathrm{A}} \frac{a}{\mathrm{B}} \frac{1}{v_2 \pm \left(1 - \frac{a}{\mathrm{B}}\right)}.$$

Nous trouverons ainsi, pour les valeurs de l, m, correspondantes à chacune des expressions (55) ou (64) de p et q :

$$(66) \quad l = \mp \frac{b}{\mathrm{A}} \frac{u}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}} \sin(vt \pm \varphi); \quad m = -\left(\frac{a}{\mathrm{B}} \pm \mathrm{Q}\right) \frac{u}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}} \cos(vt \pm \varphi).$$

Digitized by Google

33. Au moyen des formules (11) on obtient alors, en faisant abstraction de la nutation diurne, et remplaçant Q par sa valeur (65) :

$$(67)\qquad \frac{d\theta}{dt} = u\,\frac{\frac{b}{A} + \frac{1}{2}\frac{c}{A}\left(1 + \frac{a}{B}\frac{1}{1 \pm v_2 - \frac{a}{B}}\right)}{1 \pm v_2 + \frac{a}{B}\left(1 + \frac{c}{A}\frac{1}{1 \pm v_2 - \frac{a}{B}}\right)} \sin vt = u\,\frac{\mu(1 \pm v_2) - \varpi}{(1 \pm v_2)^2 - \varpi} \sin vt.$$

Quant à la valeur de $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$, on la trouvera en changeant simplement dans l'expression précédente $\sin vt$ en $\cos vt$.

34. Si l'on intègre l'équation (67), on trouve :

$$(68)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta\theta = -\dfrac{u}{v}\dfrac{\mu(1 \pm v_2) - \varpi}{(1 \pm v_2)^2 - \varpi}\cos vt; \\ \text{et de même :} \\ \sin\theta\Delta\psi = \dfrac{u}{v}\dfrac{\mu(1 \pm v_2) - \varpi}{(1 \pm v_2)^2 - \varpi}\sin vt, \end{array}\right.$$

en admettant que les variations de θ sont assez faibles pour que θ puisse être considéré comme une constante dans $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$, fait que nous trouverons vérifié, en effet, dans l'expression numérique de ces variations.

Nous verrons également, par ces expressions numériques, que la différence entre $\frac{a}{B}$ et $\frac{b}{A}$, pour la Terre entière, est une quantité excessivement faible; et, dans la plupart des termes de $\Delta\theta$ et de $\Delta\psi$, nous pourrons, en conséquence, considérer ces quantités comme égales; alors $\frac{a}{B} = \frac{b}{A} = \mu$, et les formules (68) deviennent :

$$(69)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta\theta = -\dfrac{u}{v}\dfrac{\mu}{1 \pm v_2 + \mu}\cos vt. \\ \sin\theta\Delta\psi = \dfrac{u}{v}\dfrac{\mu}{1 \pm v_2 + \mu}\sin vt. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Établissement des formules auxiliaires.

35. Afin de ne pas entraver plus tard la marche des développements, nous indiquerons maintenant quelles sont les formules auxiliaires dont il sera fait usage.

Toutes ces formules, au surplus, sont données dans la plupart des ouvrages qui traitent la question du mouvement de rotation de la Terre.

Nous les rechercherons néanmoins, afin que le lecteur soit à même de suivre notre théorie sans recourir à aucune source étrangère.

L'expression de p est, comme nous l'avons vu (art. 2) :

$$p = -3\frac{M}{D^3}\frac{xz}{D^2};$$

nous l'écrirons :

$$-3\frac{M}{a^3}\frac{xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3 \text{ ou } -3\frac{m_1^2}{n}\frac{xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3,$$

s'il s'agit du Soleil, et

$$-3\frac{M'}{a'^3}\frac{xz}{D'^2}\left(\frac{a'}{D'}\right)^3 \text{ ou } -3f\frac{m_1^2}{n}\frac{xz}{D'^2}\left(\frac{a'}{D'}\right)^3,$$

s'il s'agit de la Lune; M, D, a et M', D', a' désignant respectivement, dans l'un et l'autre cas : la masse de l'astre attirant, sa distance à la Terre et le demi-grand axe de son orbite, f le rapport des actions de la Lune et du Soleil, m_1 le moyen mouvement de celui-ci; ou enfin :

$$(70) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p = h\frac{xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3, \quad h = -3\frac{m_1^2}{n}$$

expression relative au Soleil, et dans laquelle nous n'aurons qu'à accentuer les quantités h, a, D pour les rapporter à la Lune, h' étant égal à fh.

Digitized by Google

36. Nous ne nous occuperons, dans le développement des calculs, que de ce dernier astre, duquel il sera facile de passer au premier, en rendant simplement nulle l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique; et nous supprimerons les accents dans ce développement, en prévenant le lecteur qu'il veuille bien les supposer implicitement compris dans h, a, D, et dans les différentes coordonnées de la Lune.

Les coordonnées x, y, z étant relatives aux axes principaux de la Terre, il faudra commencer par les rapporter à des axes absolument fixes X, Y, Z.

On fera passer l'axe des X par l'équinoxe d'une époque déterminée, et l'on prendra pour plan des XY l'écliptique de cette même époque, l'axe Z étant dirigé au nord de ce plan.

Désignons par θ l'angle de l'équateur xy avec l'écliptique fixe XY; par ψ l'angle que fait l'intersection de ces deux plans avec l'axe des X, compté dans le sens direct; et par φ l'angle que l'axe principal x fait avec cette intersection, compté dans le même sens, c'est-à-dire dans le sens du mouvement de rotation de la Terre.

Les formules connues de la transformation des coordonnées donnent les expressions suivantes (*) :

$$(71)\quad \begin{cases} x = \cos\theta \sin\varphi (\mathrm{Y}\cos\psi - \mathrm{X}\sin\psi) + \cos\varphi (\mathrm{X}\cos\psi + \mathrm{Y}\sin\psi) - \mathrm{Z}\sin\theta\sin\varphi. \\ z = \sin\theta (\mathrm{Y}\cos\psi - \mathrm{X}\sin\psi) + \mathrm{Z}\cos\theta. \end{cases}$$

Les coordonnées X, Y, Z s'exprimeront simplement en coordonnées sphériques, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe fixes, au moyen des formules connues :

$$(72)\quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{D}} = \sin\beta; \quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{D}} = \cos\beta\sin\lambda; \quad \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{D}} = \cos\beta\cos\lambda$$

dans lesquelles β et λ désignent la latitude et la longitude de l'astre, rapportées à ce plan et à ce point.

(*) Ces formules diffèrent de celles de Laplace et de Poisson, par le signe de l'angle ψ, que nous avons compté comme l'angle φ dans le sens direct, tandis que ces géomètres l'ont compté en sens contraire.

Digitized by Google

37. Ces coordonnées doivent être exprimées ensuite en fonction de la longitude vraie de l'astre.

La latitude β s'exprimera d'abord en fonction de la longitude λ de l'astre, de celle Ω de son nœud sur l'écliptique fixe, et de l'inclinaison i de son orbite sur ce plan, par la formule :

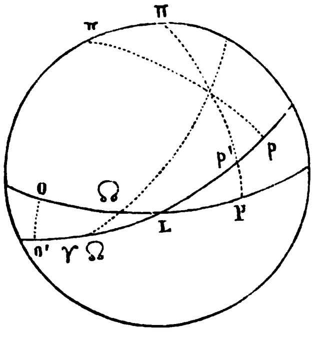
$$\text{(73)} \quad \operatorname{tg} \beta = i \sin(\lambda - \Omega).$$

De même on aurait, en désignant par de petites lettres les mêmes quantités rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe vrais :

$$\text{(73 \textit{bis})} \quad \operatorname{tg} \beta = i \sin(\lambda - \Omega).$$

Soient maintenant Π et π les pôles de l'écliptique fixe et de l'écliptique vraie, ε leur inclinaison mutuelle, Λ la longitude du nœud de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, β_0 la partie de β comprise entre ces deux plans. Vu l'extrême petitesse de ε nous pourrons poser :

Fig. 2.



$$\beta = \beta + \beta_0,$$

et même :

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta_0.$$

On tirera de là, en négligeant la quatrième puissance de i, le carré de ε et le produit εi^2 :

$$\text{(74)} \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= i \sin(\lambda - \Omega) + \varepsilon \sin(\lambda - \Lambda) \\ \sin \beta &= i\left(1 - \frac{3}{8} i^2\right) \sin(\lambda - \Omega) + \frac{i^3}{8} \sin 3(\lambda - \Omega) + \varepsilon \sin(\lambda - \Lambda) \\ \cos \beta &= 1 - \frac{i^2}{4} + \frac{i^2}{4} \cos 2(\lambda - \Omega) + \frac{1}{2} i\varepsilon \left\{ \cos(2\lambda - \Omega - \Lambda) - \cos(\Omega - \Lambda) \right\}. \end{aligned} \right.$$

38. Pour exprimer λ en fonction de λ, nous considérerons dans la figure ci-jointe LP comme égal à Lp', vu l'extrême petitesse de ε. Par suite :

$$\mathrm{L}p - \mathrm{LP} = pp' = \operatorname{tg} \beta \cot p'$$

Digitized by Google

en prenant pp' égal à son sinus. Mais

$$\cot p' = \sin \beta_0 \cot (\lambda - \Lambda),$$

ou, sans erreur sensible,

$$= \operatorname{tg} \beta_0 \cot (\lambda - \Lambda) = \varepsilon \cos (\lambda - \Lambda);$$

d'où enfin, puisque nous avons représenté par ψ l'angle compris entre l'équinoxe vrai et l'équinoxe fixe, angle qui n'est autre que le mouvement de l'équinoxe depuis l'instant initial jusqu'à l'instant actuel :

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda &= \mathrm{OP} - \Upsilon p = \mathrm{OL} + \mathrm{LP} - (\mathrm{O'L} - \mathrm{O'}\Upsilon + \mathrm{L}p) = \mathrm{LP} + \mathrm{O'}\Upsilon - \mathrm{L}p \\ &= \psi - \varepsilon \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda - \Lambda), \end{aligned}$$

où l'on peut écrire $\lambda - \Lambda$ au lieu de $\lambda - \Lambda$.

On déduit de là, à l'aide de la formule (73^{bis}) :

$$\begin{aligned} \sin (\lambda - \psi \pm \varphi) &= \sin (\lambda \pm \varphi) - \varepsilon \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda - \Lambda) \cos (\lambda \pm \varphi) \\ &= \sin (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \left\{ \begin{array}{l} \sin (3\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi) - \sin (\lambda + \Omega - \Lambda \pm \varphi) \\ + \sin (\lambda - \Omega + \Lambda \pm \varphi) + \sin (\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi) \end{array} \right\}. \\ \cos (\lambda - \psi \pm \varphi) &= \cos (\lambda \pm \varphi) + \varepsilon \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda - \Lambda) \sin (\lambda \pm \varphi) \\ &= \cos (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \left\{ \begin{array}{l} \cos (3\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi) - \cos (\lambda + \Omega - \Lambda \pm \varphi) \\ + \cos (\lambda - \Omega + \Lambda \pm \varphi) - \cos (\lambda - \Omega - \Lambda \mp \varphi) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Afin d'abréger l'écriture, nous mettrons ces deux expressions sous la forme :

$$(75) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin (\lambda - \psi \pm \varphi) = \sin (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \Sigma \sin (\mu\lambda + \mu') \\ \cos (\lambda - \psi \pm \varphi) = \cos (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \Sigma \cos (\mu\lambda + \mu') \end{array} \right.$$

dans laquelle $\mu\lambda + \mu'$ est l'expression symbolique de chacun des angles :

$$+ (3\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi), \; - (\lambda + \Omega - \Lambda \pm \varphi), \; + (\lambda - \Omega + \Lambda \pm \varphi), \; - (- \lambda + \Omega + \Lambda \pm \varphi),$$

les sinus et cosinus de ces angles ayant, dans les sommes Σ, les signes mêmes dont nous avons fait précéder les angles.

Digitized by Google

39. Il restera enfin à exprimer la longitude vraie λ en fonction du temps.

Comme nous négligerons, avec la plupart des géomètres, les inégalités de la Lune autres que l'équation du centre, inégalités dont il sera du reste aisé de tenir compte, nous pourrons lui appliquer les formules du mouvement elliptique dans son plan.

En appelant v son anomalie vraie, ainsi comptée, m_1 son moyen mouvement, l'équation de l'orbite donne :

$$\frac{D}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v},$$

et le principe des aires :

$$\frac{D^2}{a^2}\frac{dv}{dt} = m_1\sqrt{1 - e^2};$$

d'où l'on tire, en s'arrêtant à la troisième puissance de l'excentricité (*) :

$$m_1 dt = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}[1 + e \cos v]^{-2}\, dv = \left(1 - 2\, e \cos v + \frac{3}{2} e^2 \cos 2v - e^3 \cos 3v\right) dv.$$

Intégrant, et désignant par μ_1 la constante, on a :

$$m_1 t + \mu_1 = v - 2e \sin v + \frac{3}{4} e^2 \sin 2v - \frac{e^3}{3} \sin 3v.$$

Le premier membre peut se remplacer par ☾ — Γ, la longitude moyenne de la Lune étant représentée par ☾, et celle du périgée par Γ.

On déduit alors de là, au moyen de la formule de Lagrange :

$$(76) \qquad v = ☾ - \Gamma + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin (☾ - \Gamma) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2 (☾ - \Gamma) + \frac{13}{12} e^3 \sin 3 (☾ - \Gamma).$$

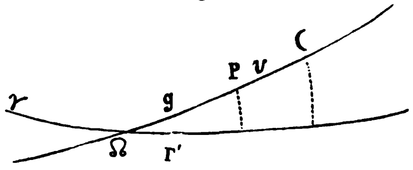
40. Il nous faut encore trouver la relation entre v et la longitude vraie λ, afin de pouvoir exprimer celle-ci en fonction de ☾ ou du temps.

(*) Voir la note de l'article 43.

Digitized by Google

Or, si g désigne la distance du périgée de la Lune au nœud, dans son orbite, ι l'angle de celle-ci avec l'écliptique vraie, angle dont la tangente est i, Ω la longitude du nœud, on a :

Fig. 3.



$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \cos\iota \operatorname{tg}(v + g),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\lambda - \Omega &= v + g - \tfrac{1}{4} i^2 \sin 2(v + g) + \cdots \\ &= v + g - \tfrac{1}{4} i^2 \sin 2(\lambda - \Omega)\end{aligned}$$

ou

$$(77) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda = v + \Gamma - \tfrac{1}{4} i^2 \sin 2(\lambda - \Omega),$$

aux quantités du quatrième ordre près.

De même, si Γ' désigne la longitude du périgée lunaire :

$$\operatorname{tg}(\Gamma' - \Omega) = \cos\iota \operatorname{tg} g,$$

d'où

$$g = \Gamma' - \Omega + \frac{i^2}{4} \sin 2(\Gamma' - \Omega) + \cdots$$

et

$$(77\,bis) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Gamma = \Gamma' + \frac{i^2}{4} \sin 2(\Gamma' - \Omega).$$

Si l'on porte la valeur (76) dans l'expression précédente de λ, il vient

$$\lambda = \text{☾} + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin(\text{☾} - \Gamma) + \cdots - \frac{1}{4} i^2 \sin 2(\lambda - \Omega);$$

et enfin :

$$(78) \quad \left\{\begin{aligned}\lambda = \text{☾} &+ \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin(\text{☾} - \Gamma) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(\text{☾} - \Gamma) + \frac{13}{12} e^3 \sin 3(\text{☾} - \Gamma) \\ &- \frac{i^2}{4} \sin 2(\text{☾} - \Omega) + \frac{1}{2} e i^2 \{\sin(\text{☾} + \Gamma - 2\Omega) - \sin(3\text{☾} - \Gamma - 2\Omega)\}.\end{aligned}\right.$$

On tire de là, en retournant la série :

$$(78\,bis) \left\{\begin{aligned}\text{☾} = \lambda &- 2e \sin(\lambda - \Gamma) + \frac{3}{4} e^2 \sin 2(\lambda - \Gamma) + \frac{1}{3} e^3 \sin 3(\lambda - \Gamma) + \frac{i^2}{4} \sin 2(\lambda - \Omega) \\ &- \frac{1}{4} e i^2 \{\sin(3\lambda - \Gamma - 2\Omega) + \sin(\lambda + \Gamma - 2\Omega)\}.\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

41. De l'expression de λ nous allons tirer celle de $\sin(l\lambda + L)$, qui nous sera fort utile.

En nous bornant aux cubes de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite, nous trouverons :

$$
(79)\quad \left\{\begin{aligned}
\sin(l\lambda + L) = {} & (1 - l^2e^2)\sin(l☾ + L) \\
& + \left[le - \left(\frac{1}{8}l + \frac{1}{2}l^3\right)e^3\right]\left\{\sin[(l+1)☾ + L - \Gamma] - \sin[(l-1)☾ + L + \Gamma]\right\} \\
& + \left(\frac{5}{8}l + \frac{1}{2}l^2\right)e^2\sin[(l+2)☾ + L - 2\Gamma] - \left(\frac{5}{8}l - \frac{1}{2}l^2\right)e^2\sin[(l-2)☾ + L + 2\Gamma] \\
& - \frac{1}{8}li^2\sin[(l+2)☾ + L - 2\Omega] + \frac{1}{8}li^2\sin[(l-2)☾ + L + 2\Omega] \\
& + \frac{1}{8}(l^2 + 2l)ei^2\sin[(l+1)☾ + L + \Gamma - 2\Omega] + \frac{1}{8}(l^2 - 2l)ei^2\sin[(l-1)☾ + L - \Gamma + 2\Omega] \\
& - \frac{1}{8}(l^2 + 2l)ei^2\sin[(l+3)☾ + L - \Gamma - 2\Omega] - \frac{1}{8}(l^2 - 2l)ei^2\sin[(l-3)☾ + L + \Gamma + 2\Omega] \\
& + \left(\frac{13}{24}l + \frac{5}{8}l^2 + \frac{1}{6}l^3\right)e^3\sin[(l+3)☾ + L - 3\Gamma] - \left(\frac{13}{24}l - \frac{5}{8}l^2 + \frac{1}{6}l^3\right)e^3\sin[(l-3)☾ + L + 3\Gamma].
\end{aligned}\right.
$$

On obtiendrait un résultat absolument analogue pour le développement de $\cos(l\lambda + L)$; il suffirait de remplacer partout les sin. par des cos. dans la formule précédente.

42. Nous aurons besoin également de l'expression de

$$
\left(\frac{a}{D}\right)^3 = \left(\frac{1 + e\cos v}{1 - e^2}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos v + \frac{3}{2}e^2\cos 2v + \frac{e^3}{4}\cos 3v,
$$

ce qui donne, à l'aide de la formule (77) :

$$
(80)\quad \ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{a}{D}\right)^3 = {} & 1 + \frac{9}{2}e^2 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos(\lambda - \Gamma) \\
& + \frac{3}{2}e^2\cos 2(\lambda - \Gamma) + \frac{1}{4}e^3\cos 3(\lambda - \Gamma) \\
& + \frac{3}{8}ei^2[\cos(3\lambda - \Gamma - 2\Omega) - \cos(\lambda + \Gamma - 2\Omega)].
\end{aligned}\right.
$$

Digitized by Google

43. Nous sommes en possession maintenant de toutes les formules nécessaires pour exprimer p en fonction du temps, et, par suite, pour intégrer les formules du mouvement de l'axe du monde.

Comme on l'a vu, nous avons conservé les termes dépendants du cube de l'excentricité; à la rigueur même, devrait-on tenir compte de la quatrième puissance de cette quantité, si elle multipliait des termes dépendants du périgée solaire exclusivement; mais ces termes se détruisent complètement (*). Dans les autres, on peut naturellement en faire abstraction.

De même ferons-nous abstraction des termes qui dépendent des multiples, supérieurs à 4, des longitudes des astres, comme étant tout à fait insensibles, vis-à-vis du moins des termes nouveaux que notre théorie introduira dans les formules de la nutation annuelle.

Il sera aisé au lecteur de restituer, non seulement tous les termes que nous omettrons, mais également, comme nous l'avons dit, ceux qui dépendent de l'évection, de la variation et des autres inégalités de la Lune. Il lui suffirait, pour celles-ci, de recourir aux formules complètes qui expriment la longitude de cet astre, son rayon vecteur et l'inclinaison de son orbite, en fonction du temps.

(*) L'importance de ce point affirmé par Laplace (*Méc. cél.*, livre V, art. 5) et par Serret (*Ann. Observ. de Paris*, t. V, p. 309) nous a engagé à le vérifier en détail. Or nous nous sommes assuré que les termes en $e^4 \sin(2\Gamma \pm \varphi)$ se détruisent en effet entièrement. Il en est de même des termes en $e^2 i^2 \sin(2\Gamma' \pm \varphi)$.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Formules différentielles de la précession et de la nutation annuelles.

44. Nous avons trouvé, article 2, en laissant de côté les accents qui indiquent qu'on a affaire à la Lune,

$$p = h\frac{xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Commençons par calculer $\frac{xz}{D^2}$. Les formules (71) et (72) donnent

$$\frac{2x}{D} = \cos\beta\left[(1+c_1)\cos(\lambda-\psi-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda-\psi+\varphi)\right] - 2s_1\sin\beta\sin\varphi.$$
$$\frac{z}{D} = s_1\cos\beta\sin(\lambda-\psi)+c_1\sin\beta;$$

ou, par la formule (75), en laissant de côté les termes en ε, qui sont relatifs aux variations séculaires :

$$(81)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{2x}{D} &= \left(1-\frac{i^2}{4}\right)\left[(1+c_1)\cos(\lambda-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda+\varphi)\right]+is_1\left(1-\frac{3}{8}i^2\right)\left[\cos(\lambda-\Omega+\varphi)-\cos(\lambda-\Omega-\varphi)\right]\\
&+\frac{i^2}{8}\left\{(1+c_1)\left[\cos(3\lambda-2\Omega-\varphi)+\cos(\lambda-2\Omega+\varphi)\right]+(1-c_1)\left[\cos(3\lambda-2\Omega+\varphi)+\cos(\lambda-2\Omega-\varphi)\right]\right\}\\
&+\frac{i^3}{8}s_1\left[\cos(3\lambda-3\Omega+\varphi)-\cos(3\lambda-3\Omega-\varphi)\right].\\
\frac{z}{D} &= s_1\left(1-\frac{i^2}{4}\right)\sin\lambda+i\left(1-\frac{3}{8}i^2\right)c_1\sin(\lambda-\Omega)+\frac{i^2}{8}s_1\left[\sin(3\lambda-2\Omega)-\sin(\lambda-2\Omega)\right]+\frac{i^3}{8}c_1\sin 3(\lambda-\Omega).
\end{aligned}\right.$$

45. Le produit de ces deux expressions donnera :

$$(82)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{4xz}{D^2} &= s_2\left(1-\frac{3}{2}i^2\right)\sin\varphi+s_1\left(1-\frac{1}{2}i^2\right)\left[(1+c_1)\sin(2\lambda-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\lambda+\varphi)\right]\\
&+i\left(1-\frac{3}{4}i^2\right)\left\{(c_1+c_2)\left[\sin(2\lambda-\Omega-\varphi)-\sin(\Omega-\varphi)\right]+(c_1-c_2)\left[\sin(2\lambda-\Omega+\varphi)-\sin(\Omega+\varphi)\right]\right\}\\
&-\frac{3}{4}s_2 i^2\left[\sin(2\lambda-2\Omega-\varphi)-\sin(2\lambda-2\Omega+\varphi)\right]+s_1\frac{i^2}{4}\left[(1+c_1)\sin(2\Omega-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{1}{4}s_1 i^2\left[(1+c_1)\sin(4\lambda-2\Omega-\varphi)+(1-c_1)\sin(4\lambda-2\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{1}{4}i^3\left[(c_1+c_2)\sin(2\lambda-3\Omega+\varphi)+(c_1-c_2)\sin(2\lambda-3\Omega-\varphi)\right]\\
&+\frac{1}{4}i^3\left[(c_1+c_2)\sin(4\lambda-3\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(4\lambda-3\Omega+\varphi)\right].
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

46. Multipliant enfin cette expression par celle $\left(\frac{a}{D}\right)^3$, donnée ci-dessus, on trouve, en écrivant en premier lieu les termes indépendants de la longitude de l'astre, à l'exception de ceux qui sont affectés des facteurs i^2e^2 ou e^4, puisqu'ils se détruiront dans la formule (84) (*) :

$$
\begin{aligned}
\frac{4p}{h}=\frac{4xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3 &= s_2\left(1+\frac{9}{2}e^2+\frac{21}{2}e^4-\frac{3}{2}i^2-\frac{27}{4}e^2i^2\right)\sin\varphi \\
&\quad -i\left(1+\frac{9}{2}e^2+\frac{21}{2}e^4-\frac{3}{4}i^2-\frac{51}{16}e^2i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(\Omega-\varphi)\\ +(c_1-c_2)\sin(\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{4}s_1i^2\left(1+\frac{15}{4}e^2-\frac{1}{4}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\Omega-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{4}e^2i\left(1+5e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(2\Gamma-\Omega-\varphi)\\ +(c_1-c_2)\sin(2\Gamma-\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{4}s_1e^2\left(1+3e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\Gamma-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(2\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{3}{16}s_1e^2i^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(4\Gamma-2\Omega-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(4\Gamma-2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{8}s_2e^2i^2\left\{\begin{matrix}\sin(2\Gamma-2\Omega+\varphi)\\ -\sin(2\Gamma-2\Omega-\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{3}{16}e^2i^3\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(4\Gamma-3\Omega-\varphi)\\ +(c_1-c_2)\sin(4\Gamma-3\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +s_1\left(1+\frac{9}{2}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\lambda-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(2\lambda+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{5}{2}es_2\left(1+\frac{13}{4}e^2-\frac{3}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda-\Gamma+\varphi)\\ -\sin(\lambda-\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{2}es_1\left(1+\frac{13}{4}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda+\Gamma-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(\lambda+\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad -\frac{1}{8}e^3s_1\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda-3\Gamma+\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(\lambda-3\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{5}{4}s_2e^2\left\{\begin{matrix}\sin(2\lambda-2\Gamma+\varphi)\\ -\sin(2\lambda-2\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{8}s_2e^3\left\{\begin{matrix}\sin(3\lambda-3\Gamma+\varphi)\\ -\sin(3\lambda-3\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{3}{2}es_1\left(1+\frac{13}{4}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(3\lambda-\Gamma-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(3\lambda-\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{4}e^2s_1\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(4\lambda-2\Gamma-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(4\lambda-2\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\}+i\left(1+\frac{9}{2}c^2-\frac{3}{4}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(2\lambda-\Omega-\varphi)\\ +(c_1-c_2)\sin(2\lambda-\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad -\frac{3}{4}s_2i^2\left\{\begin{matrix}\sin(2\lambda-2\Omega-\varphi)\\ -\sin(2\lambda-2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{4}s_1i^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(4\lambda-2\Omega-\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(4\lambda-2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{1}{4}i^3\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)[\sin(2\lambda-3\Omega+\varphi)+\sin(4\lambda-3\Omega-\varphi)]\\ +(c_1-c_2)[\sin(2\lambda-3\Omega-\varphi)+\sin(4\lambda-3\Omega+\varphi)]\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{4}s_2ei^2\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda+\Gamma-2\Omega+\varphi)\\ -\sin(\lambda+\Gamma-2\Omega-\varphi)\end{matrix}\right\}-\frac{9}{16}s_1ei^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda-\Gamma-2\Omega+\varphi)\\ +(1-c_1)\sin(\lambda-\Gamma-2\Omega-\varphi)\end{matrix}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{2}ei\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)[\sin(\lambda+\Gamma-\Omega-\varphi)-\sin(\lambda-\Gamma+\Omega-\varphi)+\sin(\lambda-\Gamma-\Omega+\varphi)]\\ +(c_1-c_2)[\sin(\lambda+\Gamma-\Omega+\varphi)-\sin(\lambda-\Gamma+\Omega+\varphi)+\sin(\lambda-\Gamma-\Omega-\varphi)]\end{matrix}\right\}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

(*) Voir la note précédente.

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+\frac{3}{16}ei^2s_1\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda+3\Gamma-2\text{☊}-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\lambda+3\Gamma-2\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{3}{16}s_2ei^2\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda-3\Gamma+2\text{☊}+\varphi)\\-\sin(\lambda-3\Gamma+2\text{☊}-\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+\frac{3}{2}ei\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(3\lambda-\Gamma-\text{☊}-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(3\lambda-\Gamma-\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&-\frac{21}{16}s_2i^2e\left\{\begin{matrix}\sin(3\lambda-\Gamma-2\text{☊}-\varphi)\\-\sin(3\lambda-\Gamma-2\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{3}{16}s_1ei^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(3\lambda-3\Gamma+2\text{☊}-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(3\lambda-3\Gamma+2\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+\frac{3}{4}e^2i\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\left[\begin{matrix}\sin(2\lambda-2\Gamma-\text{☊}+\varphi)-\sin(2\lambda-2\Gamma+\text{☊}-\varphi)\\+\sin(4\lambda-2\Gamma-\text{☊}-\varphi)\end{matrix}\right]\\+(c_1-c_2)\left[\begin{matrix}\sin(2\lambda-2\Gamma-\text{☊}-\varphi)-\sin(2\lambda-2\Gamma+\text{☊}+\varphi)\\+\sin(4\lambda-2\Gamma-\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right]\end{matrix}\right\}
\end{aligned}
$$

47. Il reste enfin à remplacer la longitude vraie λ en fonction de la longitude moyenne ☾ à l'aide de la formule (79); toutes réductions faites, on trouvera, en négligeant les termes qui dépendent de la longitude, lorsqu'ils ont i^2e, i^3, etc., comme facteur :

$$
(84)\quad
\begin{aligned}
\frac{4p}{h}&=s_2\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4-\frac{3}{2}i^2-\frac{9}{4}e^2i^2+\frac{3}{2}i^4\right)\sin\varphi\\
&-i\left(1+\frac{3}{2}e^2-i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(\text{☊}-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+\frac{1}{2}i^2s_1\left(1-\frac{i^2+e^2}{2}\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\text{☊}-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+s_1\left(1-\frac{1}{2}i^2-\frac{5}{2}e^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\text{☾}-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\text{☾}+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+\frac{3}{2}s_2e\left(1+\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}\sin(\text{☾}-\Gamma+\varphi)\\-\sin(\text{☾}-\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&-\frac{1}{2}s_1e\left(1-\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\text{☾}+\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\text{☾}+\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{7}{2}s_1e\left(1-\frac{1}{2}i^2-\frac{123}{112}e^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(3\text{☾}-\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(3\text{☾}-\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+i\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{3}{4}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(2\text{☾}-\text{☊}-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(2\text{☾}-\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}-\frac{3}{4}s_2i^2\left(1-\frac{5}{2}e^2-i^2\right)\left\{\begin{matrix}\sin(2\text{☾}-2\text{☊}-\varphi)\\-\sin(2\text{☾}-2\text{☊}+\varphi)\end{matrix}\right\}\\
&+\frac{1}{2}ei\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)[-\sin(\text{☾}+\Gamma-\text{☊}-\varphi)-3\sin(\text{☾}-\Gamma+\text{☊}-\varphi)+3\sin(\text{☾}-\Gamma-\text{☊}+\varphi)+7\sin(3\text{☾}-\Gamma-\text{☊}-\varphi)]\\+(c_1-c_2)[-\sin(\text{☾}+\Gamma-\text{☊}+\varphi)-3\sin(\text{☾}-\Gamma+\text{☊}+\varphi)+3\sin(\text{☾}-\Gamma-\text{☊}-\varphi)+7\sin(3\text{☾}-\Gamma-\text{☊}+\varphi)]\end{matrix}\right\}\\
&+\frac{9}{4}s_2e^2[\sin(2\text{☾}-2\Gamma+\varphi)-\sin(2\text{☾}-2\Gamma-\varphi)]\\
&+4s_1i^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)[\sin(4\text{☾}-3\Gamma-\varphi)]\\+(1-c_1)[\sin(4\text{☾}-3\Gamma+\varphi)]\end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Afin d'abréger l'écriture nous ferons :

$$(85)\begin{cases} 1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4=1+x; \quad 1+\frac{3}{2}e'^2+\frac{15}{8}e'^4-\frac{3}{2}i^2-\frac{9}{4}e'^2i^2+\frac{3}{2}i^4=1-x'; \\ 1+\frac{3}{2}e'^2-i^2=1-x'', \end{cases}$$

et nous négligerons, vis-à-vis de l'unité, les quantités e^2, e'^2, i^2 dans tous les termes qui renferment la longitude des astres.

48. On a vu (art. 30-32) comment l'expression de q se déduit de celle de p, et comment de l'une et de l'autre se déduisent celles de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$.

Mais, puisque les formules données dans les articles 33 et 34 nous permettent de passer directement à l'intégration, nous pourrons procéder à celle-ci, en ne faisant usage que de l'expression (84).

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

Intégrations des équations du mouvement annuel de l'axe du monde.

49 Avant d'appliquer le procédé et les formules (62), (68), (69), exposés dans les articles 32-34, nous remarquerons, tout d'abord, que les deux termes de l'intégrale $\Delta\theta$, qui proviennent respectivement des termes en $\sin(vt + \varphi)$ et $\sin(vt - \varphi)$, sont de signes contraires, et à très peu de chose près égaux, si ces deux sinus ont le même coefficient.

Dans ce cas, nous pourrons donc négliger ces termes, puisque, du reste, le facteur qui multiplie $\sin(vt \pm \varphi)$ est lui-même déjà très faible dans chacun d'eux.

Il n'en est pas de même pour l'intégrale $\sin\theta_0\Delta\psi$.

Alors, si ω_1 et γ'_1 désignent les vitesses du nœud et du périgée lunaires, l'année julienne étant prise pour unité, γ_1 celle du périgée solaire, ω_2, γ'_2, γ_2 leurs rapports au mouvement diurne, et si l'on rétablit les accents dans toutes les quantités relatives à la Lune, on obtiendra les formules suivantes, dans lesquelles nous avons omis les termes dont le coefficient est inférieur à 0''.0001 :

$$(86)\quad \begin{cases} \Delta\theta = \dfrac{3}{4}\dfrac{m_1^2}{n} f \left\{ \begin{aligned} & -\frac{i(1-x'')}{\omega_1}\left[(c_1+c_2)\frac{\mu(1-\omega_2)-\varpi}{(1-\omega_2)^2-\varpi} + (c_1-c_2)\frac{\mu(1+\omega_2)-\varpi}{(1+\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos\Omega \\ & +\frac{1}{4}\frac{i^2\left(1-\frac{i^2+e'^2}{2}\right)s_1}{\omega_1}\left[(1+c_1)\frac{\mu(1-2\omega_2)-\varpi}{(1-2\omega_2)^2-\varpi} + (1-c_1)\frac{\mu(1+2\omega_2)-\varpi}{(1+2\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos 2\Omega \end{aligned} \right\} \\[2ex] \quad + \dfrac{3}{4}\dfrac{m_1^2}{n}\mu \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2+\mu} + \frac{1-c_1}{1+2m_2+\mu}\right]\cos 2\odot \\ & -\frac{1}{2}\frac{es_1}{m_1+\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2-\gamma_2+\mu} + \frac{1-c_1}{1+m_2+\gamma_2+\mu}\right]\cos(\odot+\Gamma) \\ & +\frac{7}{2}\frac{es_1}{3m_1-\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2+\gamma_2+\mu} + \frac{1-c_1}{1+3m_2-\gamma_2+\mu}\right]\cos(3\odot-\Gamma) \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

$$
(86)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2'+\mu}\right]\cos 2\text{☾} \\
&-\frac{1}{2}\frac{e's_1}{m_1'+\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2'-\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\cos(\text{☾}+\Gamma') \\
&+\frac{7}{2}\frac{e's_1}{3m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2'+\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2'-\gamma_2'+\mu}\right]\cos(3\text{☾}-\Gamma') \\
&+\frac{i}{2m_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-2m_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+2m_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(2\text{☾}-\Omega)
\end{aligned}\right. \\
&+\frac{1}{2}e'i\left[
\begin{aligned}
&-\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(\text{☾}+\Gamma'-\Omega)}{m_1'+\gamma_1'-\omega_1} \\
&-3\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(\text{☾}-\Gamma'+\Omega)}{m_1'-\gamma_1'+\omega_1}
\end{aligned}\right. \\
&\qquad\left.
\begin{aligned}
&+3\left[\frac{c_1+c_2}{1+m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1-m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(\text{☾}-\Gamma'-\Omega)}{m_1'-\gamma_1'-\omega_1} \\
&+7\left[\frac{c_1+c_2}{1-3m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+3m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(3\text{☾}-\Gamma'-\Omega)}{3m_1'-\gamma_1'-\omega_1}
\end{aligned}\right] \\
&\qquad+4e'^2s_1\left[\frac{1+c_1}{1-4m_2'+2\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+4m_2'-2\gamma_2'+\mu}\right]\frac{\cos(4\text{☾}-2\Gamma')}{4m_1'-2\gamma_1'}
\end{aligned}\right.
$$

et

$$
(87)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\sin\theta_0\Delta\psi=\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}s_2\Big[(1+x)+f(1-x')\Big]\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}t \\
&+\frac{3}{4}m_1^2 f\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{i}{\omega_1}(1-x'')\left[(c_1+c_2)\frac{\mu(1-\omega_2)-\varpi}{(1-\omega_2)^2-\varpi}-(c_1-c_2)\frac{\mu(1+\omega_2)+\varpi}{(1+\omega_2)^2-\varpi}\right]\sin\Omega \\
&+\frac{1}{4}\frac{i^2s_1}{\omega_1}\left(1-\frac{i^2+e'^2}{2}\right)\left[(1+c_1)\frac{\mu(1-2\omega_2)-\varpi}{(1-2\omega_2)^2-\varpi}-(1-c_1)\frac{\mu(1+2\omega_2)-\varpi}{(1+2\omega_2)^2-\varpi}\right]\sin 2\Omega
\end{aligned}\right\} \\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2+\mu}\right]\sin 2\odot \\
&-\frac{3}{2}\frac{es_2}{m_1-\gamma_1}\left[\frac{1}{1+m_2-\gamma_2+\mu}+\frac{1}{1-m_2+\gamma_2+\mu}\right]\sin(\odot-\Gamma) \\
&-\frac{1}{2}\frac{es_1}{m_1+\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2-\gamma_2+\mu}-\frac{1-c_1}{1+m_2+\gamma_2+\mu}\right]\sin(\odot+\Gamma) \\
&+\frac{7}{2}\frac{es_1}{3m_1-\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2+\gamma_2+\mu}-\frac{1-c_1}{1+3m_2-\gamma_2+\mu}\right]\sin(3\odot-\Gamma) \\
&-\frac{9}{8}\frac{e^2s_2}{m_1-\gamma_1}\left[\frac{1}{1+2m_2-2\gamma_2+\mu}+\frac{1}{1-2m_2+2\gamma_2+\mu}\right]\sin 2(\odot-\Gamma)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

Digitized by Google

$$
(87)\quad
\begin{aligned}
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+\mu}-\frac{1-c_1}{1+2m_2'+\mu}\right]\sin 2\text{☾}\\
&-\frac{3}{2}\frac{e's_2}{m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1}{1+m_2'-\gamma_2'+\mu}+\frac{1}{1-m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\sin(\text{☾}-\Gamma')\\
&-\frac{1}{2}\frac{e's_1}{m_1'+\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2'-\gamma_2'+\mu}-\frac{1-c_1}{1+m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\sin(\text{☾}+\Gamma')\\
&+\frac{7}{2}\frac{e's_1}{3m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2'+\gamma_2'+\mu}-\frac{1-c_1}{1+3m_2'-\gamma_2'+\mu}\right]\sin(3\text{☾}-\Gamma')\\
&-\frac{9}{8}\frac{e'^2s_2}{m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1}{1+2m_2'-2\gamma_2'+\mu}+\frac{1}{1-2m_2'+2\gamma_2'+\mu}\right]\sin 2(\text{☾}-\Gamma')
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f\frac{i}{2m_1'-\omega_1}\left(1-\frac{5}{2}e'^2-\frac{3}{4}i^2\right)\left[\frac{c_1+c_2}{1-2m_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+2m_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(2\text{☾}-\Omega)\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f i^2\left\{-\frac{3}{8}\frac{s_2}{m_1'-\omega_1}\left[\frac{1}{1-2m_2'+2\omega_2+\mu}+\frac{1}{1+2m_2'-2\omega_2+\mu}\right]\sin 2(\text{☾}-\Omega)\right\}\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f e' i\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{m_1'+\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(\text{☾}+\Gamma'-\Omega)\\
&-\frac{3}{2}\frac{1}{m_1'-\gamma_1'+\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\sin(\text{☾}-\Gamma'+\Omega)\\
&+\frac{3}{2}\frac{1}{m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(\text{☾}-\Gamma'-\Omega)\\
&+\frac{7}{2}\frac{1}{3m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-3m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+3m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(3\text{☾}-\Gamma'-\Omega)
\end{aligned}\right\}\\
&+3\frac{m_1'^2}{n}\mu f\frac{e'^2s_1}{4m_1'-3\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-4m_2'+2\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+4m_2'-2\gamma_2'+\mu}\right]\sin(4\text{☾}-2\Gamma')
\end{aligned}
$$

50. Les deux formules précédentes se distinguent de celles des Géomètres (Laplace, Bessel, Poisson, suivi par Peters, Serret) en quelques points qui ne sont pas sans importance.

Occupons-nous d'abord de la comparaison des coefficients fondamentaux. Celui des Géomètres, $\frac{2C-A-B}{C}$, qui est symétrique en A et B, est commun à tous les termes de la précession et de la nutation.

Nos coefficients, à l'exception d'un seul, ne sont pas symétriques; ils ne sont pas non plus communs à tous les termes, à moins que l'on n'y néglige de petites quantités, dont il est indispensable de tenir compte en présence de la précision toujours croissante des observations astronomiques.

Digitized by Google

Le plus simple d'entre eux, seul, a la même forme que le précédent; c'est celui de la précession :

$$\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} = \frac{1}{2} \frac{2C - A - B}{C}.$$

Celui de la nutation, au contraire, renfermant, avec des coefficients différents, les deux fractions

$$\frac{\mu(1 \pm \omega_2) - \varpi}{(1 \pm \omega_2)^2 - \varpi},$$

ne présente pas cette symétrie en A et B.

De là résulte une conséquence très importante.

La comparaison des valeurs numériques des coefficients de la précession et de la nutation, avec les expressions que leur donnent nos formules, permettrait, en effet, si ces valeurs numériques étaient connues avec une très grande précision, de déterminer les deux inconnues μ et ϖ, et, par suite, $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$.

A la rigueur, une troisième valeur numérique serait nécessaire pour déterminer celle du coefficient f de l'action lunaire; mais le calcul que nous en avons fait, à l'aide de la comparaison précédente, et en nous servant successivement des valeurs de Bessel et de Struve pour la constante de la précession, nous a conduit à des quantités si peu différentes (2.1805_B, 2.1791_S) que la légère incertitude de ces déterminations ne pourra guère exercer d'influence sur celle de μ.

Or, il découlera à l'évidence, pensons-nous, des résultats auxquels nous serons conduit dans l'une et l'autre hypothèse, en partant de la constante de Peters, que, si la valeur de Bessel n'offre pas une précision tout à fait suffisante pour déterminer le produit $\varpi = \frac{ab}{AB} = \frac{(C-A)(C-B)}{AB}$, celle de Struve, par contre, fait trouver pour ce produit une valeur trop considérable.

Si donc la constante adoptée pour la nutation annuelle était exacte, comme les astronomes semblent l'admettre, nous serions obligé de conclure de notre comparaison, que la constante de la précession de Bessel est préférable à celle de Struve.

Digitized by Google

C'est de cette première que nous ferons usage dans le calcul de nos coefficients (*).

51. Démontrons d'abord le point capital que nous venons d'affirmer.

Les valeurs numériques que nous avons adoptées sont les suivantes, rapportées à 1800.0 :

$\theta_0 = 23°27'54''.22$		
$\lg s_1 = 9.6000901.$	$\lg c_1 = 9.96251284.$	$\lg c_2 = 9.83435063.$
$e = 0.0167712.$	$e' = 0.054857.$	
$\lg e = 8.2245642.$	$\lg e' = 8.7394271.$	$\lg i = 8.954385114.$
$1 + \varkappa = 1.00042206.$	$1 - \varkappa' = 0.9923410.$	$1 - \varkappa'' = 0.9964327.$
log : 0.000183256.	9.996660935.	9.998447971.
$\lg n = 3.3619576.$	$\lg m_1 = 0.7981723.$	$\lg m'_1 = 1.9242642.$
$\lg - \omega_1 = 9.528366607$	$\lg \gamma_1 = 5.7473.$	$\lg \gamma'_1 = 9.8513704.$

52. Désignons par P, N, ω_1, ω_2 les valeurs *absolues* des constantes de la précession et de la nutation, de la vitesse du nœud et de son rapport au mouvement diurne.

Les formules (86) et (87) donnent alors :

$$(88)\quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\left\{1 + \varkappa + f(1 - \varkappa')\right\} c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}; \\ N &= \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\frac{if}{\omega_1}(1 - \varkappa'')\left\{\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\omega_2\frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}\right) c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} + \frac{\omega_2 \varpi}{1 - \varpi}\left(c_2 - \omega_2 c_1 \frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}\right)\right\}. \end{aligned} \right.$$

Comme ω_2 est égal à 0.0001467 et ϖ à 0.00001 approximativement, nous pourrons, dans le calcul de f, négliger le terme en $\omega_2\varpi$.

(*) Ce n'est qu'à défaut d'une base plus sûre que nous avons adopté la constante de Peters et, par suite, celle de Bessel, qui concorde le mieux avec elle.

Nous partageons, sur l'exactitude de cette dernière, les doutes exprimés par des astronomes éminents. Quant à celle de Peters, il nous paraît certain qu'elle doit être augmentée peut-être de 0''.01 environ (voir p. 63).

Déjà M. le Prof. Nyrén a déduit des observations au premier vertical de Poulkowa une valeur supérieure à celle de Peters.

M. le Dr L. de Ball, en recherchant, d'après nos formules, la constante de la nutation

Digitized by Google

Alors la division des deux équations l'une par l'autre fait disparaître le facteur $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$, et permet de déterminer f.

On trouve ainsi, en se servant successivement des constantes de Bessel et de Struve :

$$\lg f = \begin{matrix} 0.53856240 \\ 0.53828457 \end{matrix} \quad f = \begin{matrix} 2.18053 & \text{Bessel.} \\ 2.17914 & \text{Struve.} \end{matrix}$$

53. Cela étant, les équations (88) deviennent, [log] désignant le nombre qui a pour logarithme log :

$$(89) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} P &= \frac{m_1^2}{n} \left\{ \begin{matrix} [0,50029502]_B \\ [0.50010511]_S \end{matrix} \right\} c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} \\ \frac{2}{3} N &= \frac{m_1^2}{n} \left\{ \begin{matrix} [9.76300266]_B \\ [9.76272485]_S \end{matrix} \right\} c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} + \frac{m_1^2}{n} \left\{ \begin{matrix} [5.7637]_B \\ [5.7634]_S \end{matrix} \right\} \frac{\varpi}{1 - \varpi}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination du terme en $c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$ conduit à l'équation :

$$(90) \quad \ldots \quad \frac{2}{3} \left\{ \begin{matrix} -[1.46517142] + [1.46517194]_B \\ -[1.46498127] + [1.46498205]_S \end{matrix} \right\} = \frac{m_1^2}{n} \left\{ \begin{matrix} [6.2640]_B \\ [6\,2635]_S \end{matrix} \right\} \frac{\varpi}{1 - \varpi},$$

dans laquelle les nombres P et N ont été exprimés en secondes.

On trouve ainsi, pour la valeur de $\frac{\varpi}{1 - \varpi}$, selon que l'on adopte la constante de Bessel ou celle de Struve :

$$\begin{aligned} 7''.596 &= 0.0000359 \quad \text{B.} \\ 10''.080 &= 0.0000525 \quad \text{S.} \end{aligned}$$

La première est probablement trois fois trop forte, mais la seconde l'est cinq fois environ.

Il ne semble donc pas douteux que la constante de Bessel ne soit, quoique

diurne, ainsi que la correction à apporter à la constante de Peters, est même arrivé à une valeur encore plus forte (voir *Astr. Nachr.*, nos 2542-2544).

Mais il faudrait des observations plus nombreuses que celles dont il a pu faire usage jusqu'à présent, pour établir, sur une base tout à fait solide, le calcul des constantes de la nutation annuelle et de la nutation diurne. (20 août 1883.)

Digitized by Google

un peu faible, préférable à celle de Struve, si l'on admet comme exacte la constante de la nutation de Peters (*).

54. Pour déterminer $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$, mieux vaudrait, en présence de cette incertitude, ne se servir que de la seconde formule (89).

On pourrait commencer par y négliger le second terme, pour trouver une première valeur approchée de $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$, et en déduire celle de μ, en admettant que $\varpi=\mu^2$; d'où $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}=\frac{1+\mu}{\mu}$. Nous supposerons qu'on soit arrivé ainsi à $\varpi=0.00001=2''$.

La seconde équation (89) donnera alors, en partant de la constante de Bessel :

$$\frac{2}{3}[0.9648769]=[7.9599025]\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}+[3.7602]\varpi.$$

On voit que le dernier terme est tellement faible qu'il est impossible d'en tenir compte.

Il restera donc $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$, ou, comme nous venons de l'admettre,

$$(91)\quad . \quad . \quad \frac{\mu}{1+\mu}=\frac{2}{3}[3.0049744]=674''.3=0.0032693;\quad \mu=0.003280\ (^{**}).$$

55. Comme contrôle, nous pouvons déterminer théoriquement, au moyen de la valeur (91), que nous venons de trouver, en partant de la constante de la nutation annuelle, pour $\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}$, la constante de la précession. La pre-

(*) J'ai calculé, d'après les formules (88), ce que devrait être la constante de la précession, pour la valeur suivante de la constante de la nutation annuelle : 9.23; et j'ai trouvé 50.39, valeur notablement plus forte que celle même de Struve.

La détermination de ces constantes et de celle de l'aberration devra, dans tous les cas, être soumise à une nouvelle investigation, dans laquelle il faudra tenir compte de la nutation diurne; mais on ne pourra utilement le faire que quand celle-ci sera connue avec une précision suffisante. (20 août 1883.)

(**) Il semble résulter des données actuelles sur la physique du globe que cette valeur est trop faible. Il en serait de même, par conséquent, des constantes de Bessel et de Peters.

Digitized by Google

mière formule (89) donnera, si l'on y remplace $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$ par $\frac{2}{3}$ [3.0049744] :

$$\lg P = 1.7021692.$$

On voit combien cette valeur diffère peu de celle 1.7021688 que nous avons prise pour le logarithme de la constante de Bessel, en 1800. En nombres, la différence est seulement de 0''.00005.

56. Afin de pouvoir comparer les coefficients des autres termes de nos formules, aux termes analogues de Peters, il sera utile que nous commencions par les réduire en nombres, comme l'a fait cet astronome pour les siens.

Dans cette réduction, outre les valeurs numériques données à l'article 51, nous emploierons celle que nous venons de trouver : $\mu = 0.003280$.

Les formules (86) et (87) s'écriront alors, pour 1800.0, tous les coefficients étant exprimés en secondes :

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\theta = {} & 9.2231 \cos \Omega - 0.0863 \cos 2\Omega + 0.0891 \cos 2☾_m + 0.0194 \cos (2☾_m - \Omega) \\ & + 0.0127 \cos (3☾_m - \Gamma') - 0.0050 \cos (☾_m + \Gamma') - 0.0032 \cos (☾_m - \Gamma' + \Omega) \\ & + 0.0030 \cos (☾_m - \Gamma' - \Omega) - 0.0010 \cos (☾_m + \Gamma' - \Omega) \\ & + 0.0026 \cos (3☾_m - \Gamma' - \Omega) + 0.0012 \cos (4☾_m - 2\Gamma') \\ & + 0.5521 \cos 2\odot_m - 0.0092 \cos (\odot_m + \Gamma) + 0.0217 \cos (3\odot_m - \Gamma). \end{aligned}\right.$$

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\psi = {} & - 17.2421 \sin \Omega + 0.2083 \sin 2\Omega - 0.2217 \sin 2☾_m - 0.0583 \sin (2☾_m - \Omega) \\ & + 0.0687 \sin (☾_m - \Gamma') + 0.0027 \sin 2 (☾_m - \Gamma') + 0.0025 \sin 2 (☾_m - \Omega) \\ & - 0.0300 \sin (3☾_m - \Gamma') + 0.0107 \sin (☾_m + \Gamma') + 0.0061 \sin (☾_m - \Gamma' + \Omega) \\ & - 0.0060 \sin (☾_m - \Gamma' - \Omega) + 0.0020 \sin (☾_m + \Gamma' - \Omega) \\ & - 0.0052 \sin (3☾_m - \Gamma' - \Omega) - 0.0028 \sin (4☾_m - 2\Gamma') \\ & - 1.2726 \sin 2\odot_m + 0.0213 \sin (\odot_m + \Gamma) - 0.0520 \sin (3\odot_m - \Gamma) \\ & + 0.1275 \sin (\odot_m - \Gamma) + 0.0016 \sin 2 (\odot_m - \Gamma). \end{aligned}\right.$$

Les coefficients de Peters, écrits dans le même ordre, sont, pour $\Delta\theta$:

1) + 9.2231	2) — 0.0897	3) + 0.0886	4) + 0.0181
5) + 0.0113	6) — 0.0050	7) — 0.0031	
8) + 0.0030	9) — 0.0010		
13) + 0.5510	14) + 0.0093	15) + 0.0027	

Digitized by Google

et pour $\Delta\psi$:

1') — 17.2405	2') + 0.2073	3') — 0.2041	4') — 0.0339
5') + 0.0677	6') + 0.0028	7') + 0.0024	
8') — 0.0261	9') + 0.0115	10') + 0.0058	
11') + 0.0057	12') + 0.0020	13') 0	
14') — 1.2694	15') — 0.0213	16') — 0.0058	
17') + 0.1279	18') — 0.0005.		

Nous n'avons eu ni le loisir, ni le goût de rechercher à fond les causes des quelques divergences qui existent entre certains de nos coefficients et ceux de Peters (*).

Les observations suivantes pourront n'être pas dépourvues d'intérêt.

Nous ne comprenons pas l'omission, dans les formules de Peters, de nos termes 10 et 13', qui ne sont pas du tout insignifiants, non plus que le signe attribué dans ces formules, par inadvertance sans doute, au terme 11' (**).

Quant à la différence qui existe entre nos coefficients 14 et 15, 15' et 16' et ceux de Peters, elle n'est qu'apparente, comme nous allons le voir.

57. Nos formules (92) et (93) renferment les longitudes *moyennes* du Soleil et de la Lune, expressément indiquées par l'indice *m*.

Mais Peters a introduit dans les siennes la longitude *vraie* du Soleil.

Modifions en conséquence nos formules (86) et (87), dans lesquelles nous remplacerons les longitudes *moyennes* de la Lune et du Soleil, qui y sont représentées par ☾ et ⊙, en fonction de leurs longitudes *vraies*, au moyen de la formule (78^{bis}).

(*) Voir la préface.

(**) Le professeur Nyrén, qui a refait, sur des données nouvelles, les calculs de Peters, a réparé l'omission signalée ci-dessus. Mais l'erreur de signe, que nous avons relevée dans le terme 11', subsiste dans ses formules (voir *Mém. de l'Acad. des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XIX, 1872).

Digitized by Google

Après avoir réduit en nombres, nous obtiendrons ainsi, ☾ et ⊙ *désignant maintenant les longitudes* VRAIES de la Lune et du Soleil :

$$
(94)\left\{\begin{array}{ll}
 & \Delta\theta = 9.2231 \cos \Omega - 0.0865 \cos 2\Omega + 0.0895 \cos 2☾ + 0.0196 \cos (2☾ - \Omega) \\
\text{II} & + 0.0028 \cos (3☾ - \Gamma') + 0.0048 \cos (☾ + \Gamma') - 0.0052 \cos (☾ - \Gamma' + \Omega) \\
\text{III} & + 0.0030 \cos (☾ - \Gamma' - \Omega) + 0.0011 \cos (☾ + \Gamma' - \Omega) \\
 & + 0.0004 \cos (3☾ - \Gamma' - \Omega) + 0{,}0012 \cos (4☾ - 2\Gamma') \\
\text{IV} & + 0.00005 \cos (2\Gamma' - \Omega) + 0.00005 \cos 2\Gamma' \\
\text{V} & + 0.5527 \cos 2⊙ + 0.0095 \cos (⊙ + \Gamma) + 0.0031 \cos (3⊙ - \Gamma) \\
\text{VI} & + 0.00004 \cos 2\Gamma.
\end{array}\right.
$$

$$
(95)\left\{\begin{array}{ll}
 & \Delta\psi = -17.2421 \sin \Omega + 0.2087 \sin 2\Omega - 0.2246 \sin 2☾ - 0.0388 \sin (2☾ - \Omega) \\
\text{II}' & + 0.0689 \sin (☾ - \Gamma') + 0.0027 \sin 2 (☾ - \Gamma') + 0.0025 \sin 2 (☾ - \Omega) \\
\text{III}' & - 0.0055 \sin (3☾ - \Gamma') - 0.0140 \sin (☾ + \Gamma') + 0.0060 \sin (☾ - \Gamma' + \Omega) \\
\text{IV}' & - 0.0059 \sin (☾ - \Gamma' - \Omega) - 0.0022 \sin (☾ + \Gamma' - \Omega) \\
 & - 0.0008 \sin (3☾ - \Gamma' - \Omega) - 0.0028 \sin (4☾ - 2\Gamma') \\
\text{V}' & - 0.00003 \sin (2\Gamma' - \Omega) - 0.00024 \sin 2\Gamma' \\
\text{VI}' & - 1.2742 \sin 2⊙ - 0.0216 \sin (⊙ + \Gamma) - 0.0093 \sin (3⊙ - \Gamma) \\
\text{VII}' & + 0.1273 \sin (⊙ - \Gamma) + 0.0015 \sin 2 (⊙ - \Gamma) \\
\text{VIII}' & - 0.00009 \sin 2\Gamma.
\end{array}\right.
$$

Ces formules se distinguent des précédentes par les valeurs numériques et même par les signes de certains coefficients, mais surtout par l'introduction de termes nouveaux qui, vu leur signification théorique, ne sont nullement négligeables. Ces termes sont ceux des lignes IV et V′, et surtout VI et VIII′.

Le terme VIII′, variant avec une excessive lenteur, devrait rentrer dans la constante de la précession, qui deviendrait, dès lors, une variable, dans l'expression même de la précession lunisolaire annuelle!

C'est donc par un véritable abus, provenant de la négligence des Géomètres, que l'on continue en général à calculer les formules de la nutation au moyen des longitudes vraies des astres, formule (89), tandis que la formule (88), qui renferme les longitudes moyennes, est beaucoup plus simple à calculer, et ne contient surtout aucun terme dépendant *du périgée*

Digitized by Google

solaire, et qui ferait varier la constante de la précession, ni même du périgée lunaire.

On nous pardonnera de nous exprimer, avec un peu trop de chaleur peut-être, sur ce point, dont nous ne croyons pas nous exagérer l'importance.

Notre excuse est d'abord : *Amicus Plato, magis amica veritas;* ensuite l'autorité de Gauss lui-même, sur la proposition de qui Encke avait introduit dans le *Berl. Jahrb.* les longitudes moyennes de la Lune (*).

Qu'on nous permette donc de formuler, en faveur des jeunes astronomes qui ont des réductions de circompolaires à calculer, le vœu qu'à l'avenir les formules de réduction soient exprimées en longitudes moyennes, et que celles-ci soient insérées, tant pour le Soleil que pour la Lune, en quelques pages des annuaires astronomiques!

58. Afin que le lecteur puisse vérifier plus aisément la formule (89) et s'assurer mieux encore de l'inconvénient de l'introduction des longitudes vraies, nous donnerons au complet la formule (86), y compris quelques termes qui, quoique négligeables, pourront se réduire avec des termes semblables lors de la conversion des longitudes moyennes en longitudes vraies, ainsi que la formule (86^{bis}), dans laquelle cette conversion est effectuée.

Les chiffres romains qui figurent dans cette dernière formule sont les coefficients complets des termes de la formule (86) vis-à-vis desquels ils sont placés.

(*) « Nach dem Wunsche des Herrn Gauss ist der Zusatz für die mittlere Länge des Mondes und ihre Bewegung gemacht worden. » (*Berl. Jahrb. für* 1841.)

Si l'on fait usage de l'*Annuaire de Berlin*, ou des *Tab. Pulc.*, ou bien encore de la *Conn. des Temps* à partir de 1884, on pourra calculer exactement, d'après les formules de Peters, les termes qui dépendent de la longitude de la Lune.

Ce que nous proposons donc, c'est que l'on calcule tous les termes de la nutation en longitudes moyennes, pour le Soleil comme pour la Lune, afin de n'être pas obligé de négliger certaines quantités qu'introduit la conversion en longitudes vraies, et dont il est impossible de tenir compte.

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta = \frac{3m_1^2}{4n} f \Bigg\{ & -i\left(\frac{1-x''}{\omega_1}\right)\left[(c_1+c_2)\frac{\mu(1-\omega_2)-\varpi}{(1-\omega_2)^2-\varpi}+(c_1-c_2)\frac{\mu(1+\omega_2)-\varpi}{(1+\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos\Omega && \text{I}\\
& +\frac{1}{4}\frac{i^2(1-sc''^2)s_1}{\omega_1}\left[(1+c_1)\frac{\mu(1-2\omega_2)-\varpi}{(1-2\omega_2)^2-\varpi}+(1-c_1)\frac{\mu(1+2\omega_2)-\varpi}{(1+2\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos 2\Omega \Bigg\} && \text{II}\\
+\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu \Bigg\{ & \frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2+\mu}\right]\cos 2\odot_m && \text{III}\\
& -\frac{1}{2}\frac{es_1}{m_1+\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2-\gamma_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+m_2+\gamma_2+\mu}\right]\cos(\odot_m+\Gamma) && \text{IV}\\
& +\frac{7}{2}\frac{es_1}{3m_1-\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2+\gamma_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2-\gamma_2+\mu}\right]\cos(3\odot_m-\Gamma) \Bigg\} && \text{V}\\
+\frac{3m_1'^2}{4n}\mu f \Bigg\{ & \frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2'+\mu}\right]\cos 2\text{☾}_m && \text{VI}\\
& -\frac{1}{2}\frac{e's_1}{m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2'-\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\cos(\text{☾}_m+\Gamma') && \text{VII}\\
& +\frac{7}{2}\frac{e's_1}{3m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2'+\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2'-\gamma_2'+\mu}\right]\cos(3\text{☾}_m-\Gamma) \Bigg\} && \text{VIII}\\
+\frac{3m_1'^2}{4n}\mu f \Bigg\{ & \frac{i}{2m_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-2m_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1+c_2}{1+2m_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(2\text{☾}_m-\Omega) && \text{IX}\\
& -\frac{1}{2}\frac{e'i}{m_1'+\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(\text{☾}_m+\Gamma'-\Omega) && \text{X}\\
& -\frac{3}{2}\frac{e'i}{m_1'-\gamma_1'+\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\cos(\text{☾}_m-\Gamma'+\Omega) && \text{XI}\\
& +\frac{3}{2}\frac{e'i}{m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1+m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1-m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\cos(\text{☾}_m-\Gamma'-\Omega) && \text{XII}\\
& +\frac{7}{2}\frac{e'i}{3m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-3m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+3m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(3\text{☾}_m-\Gamma'-\Omega) && \text{XIII}\\
& -\frac{1}{4}s_1\frac{i^2}{2m_1'-2\gamma_1'+2\omega_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+2\gamma_2'-2\omega_2+\mu}\right.\\
& \qquad\left.+\frac{1-c_1}{1+2m_2'-2\gamma_2'+2\omega_2+\mu}\right]\cos(2\text{☾}_m-2\Gamma'+2\Omega) && \text{XIV}\\
& +4s_1\frac{e'^2}{4m_1'-2\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-4m_2'+2\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+4m_2'-2\gamma_2'+\mu}\right]\frac{\cos(4\text{☾}-2\Gamma')}{4m_1'-2\gamma_1'} \Bigg\} && \text{XV}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Digitized by Google

(86 *bis*)

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta = & \left\{ I + \frac{1}{4} i^2 . IX + e' . XI - e' . XII \right\} \cos \Omega \\
& + \left\{ II + \frac{1}{4} i^2 . VI \right\} \cos 2\Omega \\
& + \left\{ (1 - 4e'^2) . VI + e' . VII - 3e' . VIII - 3e' . XIII \right\} \cos 2☾ \\
& + \left\{ (1 - 4e'^2) . IX + e' . X \right\} \cos (2☾ - \Omega) \\
& + \left\{ (1 - 9e'^2) . VIII + 2e'\, VI + \frac{9}{8} e'^2 . VII \right\} \cos (3☾ - \Gamma') + \left\{ \frac{13}{4} e'^2 . VI - 4e' . XIV \right\} \cos (3☾ - 2\Gamma') \\
& - \left\{ e'^3 . VI \frac{1}{8} e'^2 . VII \right\} \cos (☾ - 3\Gamma') + \left\{ (1 - e'^2) . VII - 2e' . VI + \frac{13}{4} e'^2 . VIII \right\} \cos (☾ + \Gamma') \\
& + XI . \cos (☾ - \Gamma' + \Omega) + XII . \cos (☾ - \Gamma' - \Omega) \\
& + \left\{ XIII + 2e' . IX \right\} \cos (3☾ - \Gamma' - \Omega) + \left\{ X - 2e' . IX \right\} \cos (☾ + \Gamma' - \Omega) \\
& + \frac{1}{8} i^2 . VII \cos (☾ - \Gamma' - 2\Omega) + \frac{3}{8} i^2 . VIII \cos (☾ - \Gamma' + 2\Omega) \\
& + (XIII + 2e' . IX) \cos (3☾ - \Gamma' - \Omega) \\
& + \left\{ e' i^2 . VI - \frac{1}{8} i^2 . VII \right\} \cos (3☾ + \Gamma' - 2\Omega) + \frac{13}{4} e'^2 . IX \cos (3☾ - 2\Gamma' - \Omega) \\
& + e' . XII \cos (2☾ - 2\Gamma' + \Omega) + e' . XII \cos (2☾ - 2\Gamma' - \Omega) \\
& + XV \cos (4☾ - 2\Gamma') + 3e' \left\{ VIII + XIII \right\} \cos (4☾ - 2\Gamma') \\
& - \frac{1}{4} i^2 . VII \cos (4☾ - 2\Omega) - \frac{1}{4} i^2 . IX \cos (4☾ - 3\Omega) \\
& + \left\{ \frac{3}{4} e'^2 . IX - e' . X \right\} \cos (2\Gamma' - \Omega) \\
& + \left\{ \frac{3}{4} e'^2 . VI - e' . VII \right\} \cos 2\Gamma' \\
& + \left\{ (1 - 4e^2) . III + e . IV - 3e . V \right\} \cos 2\odot \\
& + \left\{ (1 - e^2) . IV - 2e . III + \frac{13}{4} e^2 . V \right\} \cos (\odot + \Gamma) \\
& + \left\{ (1 - 9e^2) . V + \frac{9}{8} e^2 . IV + 2e . III \right\} \cos (3\odot - \Gamma) \\
& - \frac{1}{8} e^2 . IV . \cos (\odot - 3\Gamma) \\
& + \left\{ \frac{3}{4} e^2 . III - e . IV \right\} \cos 2\Gamma .
\end{aligned}
$$

Cette dernière formule renferme deux fois plus de termes que la précédente ; nous n'y avons toutefois pas réduit la longitude moyenne Γ' du périgée lunaire en longitude vraie (77^{bis}); c'est une peine que nous pouvons nous épargner, puisque les astronomes, qui calculent avec exactitude les lieux apparents, ne font usage que des longitudes moyennes dans les termes relatifs à la Lune.

Mais il ressort deux conclusions importantes de la comparaison des deux dernières formules. La première, c'est que la constante de la nutation ne conserve pas la même valeur, si l'on substitue simplement, comme beaucoup d'astronomes le croient permis, les longitudes vraies de la Lune aux longitudes moyennes. La seconde, c'est qu'en convertissant les longitudes moyennes du Soleil en longitudes vraies, comme l'a fait Peters, on néglige, dans les formules (94) et (95), les termes qui dépendent du périgée solaire.

Digitized by Google

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR LES

MOUVEMENTS RESPIRATOIRES

DES INSECTES,

PAR

FÉLIX PLATEAU,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND, ETC.

Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 3 mars 1883.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER. — INTRODUCTION.

Pages.

§ I. Limites du travail 1
§ II. Historique 3
§ III. Méthodes de Hausmann et de Maurice Girard 8

CHAPITRE II. — MÉTHODES EMPLOYÉES DANS CES RECHERCHES.

§ IV. Méthode graphique 12
§ V. Méthode de projections 19
§ VI. Dissection des muscles respiratoires 23
§ VII. Procédés employés dans les expériences sur le système nerveux . . 24

CHAPITRE III. — TYPES RESPIRATOIRES.

§ VIII. Considérations préliminaires 25
§ IX. Les trois types respiratoires principaux et leurs subdivisions . . . 27

CHAPITRE IV. — ÉTUDE DU PREMIER TYPE.

A. **Coléoptères** 34
§ X. *Hydrophilus piceus*. 34
§ XI. Étude des mouvements respiratoires de l'Hydrophile par la méthode graphique. 35
§ XII. Étude des mouvements respiratoires de l'Hydrophile par la méthode des projections 40
§ XIII. Muscles respiratoires de l'Hydrophile. 44

Digitized by Google

Pages.
§ XIV. Expériences sur le système nerveux de l'Hydrophile 47
§ XV. *Hydrochares* (*Hydrous*) *caraboides* 50
§ XVI. *Dytiscus* 51
§ XVII. Étude des mouvements respiratoires des Dytiques par la méthode graphique 51
§ XVIII. Étude des mouvements respiratoires des Dytiques par la méthode des projections 54
§ XIX. Muscles respiratoires des Dytiques. 59
§ XX. Expériences sur le système nerveux des Dytiques 60
§ XXI. *Colymbetes fuscus*. (Étude par la méthode des projections.) 63
§ XXII. *Carabus auratus* et *Abax striola*. (Étude par la méthode des projections). 64
§ XXIII. *Tenebrio molitor*. (Étude par la méthode des projections.) 67
§ XXIV. *Cicindela hybrida*. (Étude par la méthode des projections.) 68
§ XXV. Scarabéiens. Historique 69
§ XXVI. *Oryctes nasicornis*. (Étude par la méthode graphique.) 71
§ XXVII. Étude des mouvements respiratoires de l'*Oryctes* par la méthode des projections 74
§ XXVIII. Muscles respiratoires de l'*Oryctes* 76
§ XXIX. Expériences sur le système nerveux de l'*Oryctes* 77
§ XXX. *Onthophagus nuchicornis*. (Étude par la méthode des projections.). . 83
§ XXXI. *Geotrupes sylvaticus*. (Étude par la méthode des projections.) . . . 84
§ XXXII. Hanneton (*Melolontha vulgaris*). (Étude par la méthode graphique.) . 85
§ XXXIII. Étude des mouvements respiratoires du Hanneton par la méthode des projections 86
§ XXXIV. Muscles respiratoires du Hanneton 90
§ XXXV. *Phyllopertha horticola*. (Étude par la méthode des projections.) . . 92
§ XXXVI. *Trichius abdominalis*. (Étude par la méthode des projections.) . . . 92
§ XXXVII. Staphyliniens. (Étude par la méthode des projections.) 93
§ XXXVIII. Muscles respiratoires du *Staphylinus olens* 96
§ XXXIX. Curculioniens (*Chlorophanus viridis*. (Étude par la méthode des projections.) 97
§ XL. Élatérides (*Corymbites latus*.) (Étude par la méthode des projections.). 97
§ XLI. *Donacia simplex*, *Crioceris merdigera* et *Chrysomela staphylœa*. (Étude par la méthode des projections.). 98
§ XLII. Coléoptères chez lesquels les régions latérales des arceaux tergaux se creusent en expiration, tandis que la partie médiane se soulève ou présente un sillon longitudinal : *Telephorus*, *Clytus*, *Coccinella*. . 100

Digitized by Google

CHAPITRE V. — Suite de l'étude du premier type.

Pages.

B. **Hémiptères hétéroptères** 104

§ XLIII. *Nepa cinerea*. (Étude par la méthode des projections.) 105

§ XLIV. *Pyrrhocoris apterus*. (Étude par la méthode des projections.) . . . 107

C. **Orthoptères blattiens** 107

§ XLV. *Periplaneta orientalis*. (Étude par la méthode des projections.). . . 107

§ XLVI. Muscles respiratoires de la *Periplaneta orientalis* 110

CHAPITRE VI. — Étude du deuxième type.

A. **Odonates** 111

§ XLVII. *Libellula quadrimaculata*. (Étude par la méthode graphique.) . . . 113

§ XLVIII. Étude des mouvements respiratoires de la Libellule par la méthode des projections 117

§ XLIX. Expériences sur le système nerveux des Libellules 118

§ L. *Aeschna grandis*. (Étude par la méthode graphique.) 120

§ LI. Muscles respiratoires de l'*Agrion sanguineum* 121

B. **Diptères** 123

§ LII. *Tipula gigantea*. (Étude par la méthode des projections.) 124

§ LIII. *Calliphora vomitoria* 125

§ LIV. Étude des mouvements respiratoires de la *Calliphora vomitoria* par la méthode des projections 126

§ LV. Muscles respiratoires de la *Calliphora vomitoria* 128

§ LVI. *Scatophaga stercoraria*. (Étude par la méthode des projections.) . . 129

§ LVII. Syrphides : *Eristalis tenax* et *Syrphus ribesii*. (Étude par la méthode des projections.). 129

§ LVIII. Muscles respiratoires de l'*Eristalis tenax*. 131

§ LIX. *Asilus* (*s.p.?*) (Étude par la méthode des projections.) 132

§ LX. *Tabanus bovinus*. (Étude par la méthode des projections.) 133

§ LXI. Muscles respiratoires du *Tabanus bovinus* 135

§ LXII. Appendice aux Diptères : Hyménoptères chrysidiens. *Chrysis ignita*. (Étude par la méthode des projections.) 136

C. **Hyménoptères porte-aiguillon** 137

§ LXIII. Historique 137

§ LXIV. *Vespa germanica*. (Étude par la méthode des projections.) 139

Digitized by Google

Pages.
§ LXV. Muscles respiratoires de la *Vespa germanica*. 143
§ LXVI. *Bombus muscorum* et *Bombus terrestris*. (Étude par la méthode des projections.) 146
§ LXVII. Muscles respiratoires du *Bombus terrestris* 148
§ LXVIII. *Apis mellifica*. (Étude par la méthode des projections.) 150
§ LXIX. *Anthophora retusa*. (Étude par la méthode des projections.). . . . 152
§ LXX. Hypothèse de Wolff 152
§ LXXI. Appendice aux Hyménoptères porte-aiguillon. — Névroptères phryganiens. — *Phryganea striata*. (Étude des mouvements respiratoires et des muscles de la respiration.) 157

D. **Orthoptères Forficuliens et Acridiens** 161
§ LXXII. *Forficula auricularia*. (Étude des mouvements respiratoires et des muscles de la respiration.) 162
§ LXXIII. Acridiens 164
§ LXXIV. *Stethophyma grossum*. (Étude par la méthode des projections.). . . 166
§ LXXV. Muscles respiratoires du *Stethophyma grossum* 169
§ LXXVI. Expériences sur le système nerveux du *Stethophyma grossum* . . . 172
§ LXXVII. *Stenobothrus variabilis*. (Étude des mouvements respiratoires et expérience sur le système nerveux.) 175

CHAPITRE VII. — Étude du troisième type.

A. **Orthoptères locustiens**. 177
§ LXXVIII. Historique 177
§ LXXIX. *Decticus verrucivorus*. (Étude par la méthode graphique.) 178
§ LXXX. Étude des mouvements respiratoires du Dectique par la méthode des projections 182
§ LXXXI. Muscles respiratoires du Dectique 184

B. **Lépidoptères**. 185
§ LXXXII. Historique. — Constitution de l'abdomen. — Méthodes d'observation. 185
§ LXXXIII. *Pieris napi*. (Étude par la méthode des projections.) 188
§ LXXXIV. *Euchelia Jacobaeae* 189
§ LXXXV. Résumé des observations sur les mouvements respiratoires des Lépidoptères 189
§ LXXXVI. Muscles respiratoires des Lépidoptères 190

Digitized by Google

Pages.
C. **Névroptères propres** 192
§ LXXXVII. *Panorpa communis.* (Étude par la méthode des projections.) . . . 192
§ LXXXVIII. *Chrysopa vulgaris.* (Étude par la méthode des projections.) 194
§ LXXXIX. *Sialis lutaria.* (Étude par la méthode des projections.) 195
§ XC. Muscles respiratoires de la *Sialis lutaria* 196

CHAPITRE VIII. — Résumé et conclusions.

§ XCI. Relation entre la structure anatomique et la forme des mouvements respiratoires. — Mouvements abdominaux et mouvements thoraciques. — Tableau I 198
§ XCII. Diminution du diamètre vertical de l'abdomen en expiration. — Tableau II 200
§ XCIII. Types respiratoires. — Changements de longueur de l'abdomen. — Tableau III 202
§ XCIV. Mouvements respiratoires progressifs. — Tableau IV 203
§ XCV. Pauses et arrêts. — Tableau V 204
§ XCVI. Vitesses de l'expiration et de l'inspiration. — Phase active et phase passive 206
§ XCVII. Muscles respiratoires 206
§ XCVIII. Mouvements généraux de l'abdomen 211
§ XCIX. Influence du système nerveux. — Tableau VI 211

Explication des planches 217

Digitized by Google

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR LES

MOUVEMENTS RESPIRATOIRES

DES

INSECTES.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

§ I.

LIMITES DU TRAVAIL.

Fidèle au plan que je me suis tracé, il y a longtemps, et qui consiste à étudier successivement les différents phénomènes physiologiques chez les animaux articulés, j'ai consacré les recherches actuelles à l'examen des mouvements respiratoires des insectes.

Le sujet étant trop étendu pour en aborder simultanément toutes les parties, j'ai laissé momentanément de côté les larves et les nymphes et, me bornant aux insectes à l'état parfait, je me suis attaché à élucider les points suivants :

1° *Forme de l'inspiration et de l'expiration ;*

2° *Parties du corps participant aux mouvements respiratoires ;*

3° *Détermination exacte des muscles expirateurs et inspirateurs ;*

4° *Influence de quelques parties du système nerveux sur les mouvements de la respiration.*

Digitized by Google

Une notice préliminaire que j'ai présentée à l'Académie royale de Belgique le 3 juin 1882 [1] renferme l'énoncé rapide des principaux résultats que j'avais obtenus alors. Le présent Mémoire modifie peu les conclusions de la notice qui l'a précédé, mais il contient l'exposé complet des méthodes dont j'ai fait usage, la description détaillée des mouvements respiratoires des types principaux et une foule de faits plus ou moins importants que j'avais dû passer sous silence dans un simple résumé.

Postérieurement à la publication de ma *Communication préliminaire*, et alors que le Mémoire actuel était entièrement terminé, le D^r^ O. Langendorff a fait paraître dans le volume de 1883 des *Archiv für Anatomie und Physiologie* de His, Braune et Du Bois-Reymond, une note fort intéressante, intitulée *Das Athmungscentrum der Insecten.*

Ainsi qu'il arrive si souvent aujourd'hui, l'auteur, ignorant l'existence de mes recherches, a étudié, par des procédés analogues, quelques-unes des questions que j'ai cherché à résoudre. Ses résultats concordent sensiblement avec les miens. Je suis heureux de pouvoir citer Langendorff, et je ferai ressortir plus loin la part qui lui revient dans nos connaissances sur les mouvements respiratoires des insectes.

J'ai soumis à l'observation et souvent à des expériences variées 63 formes différentes; nombre considérable, si l'on tient compte des difficultés pratiques, du temps qu'ont demandé certaines études, telles que celles qui concernent l'Hydrophile, le Dytique, l'Oryctes, les Libellules, etc., et enfin de la nécessité où je me trouvais de ne m'adresser qu'à des insectes assez communs pour pouvoir répéter les essais d'une façon suffisante.

Obligé d'observer les animaux vivants et aussi vigoureux que possible, j'ai nécessairement limité mon examen aux formes indigènes. Je laisse aux naturalistes habitant l'Europe méridionale ou d'autres contrées plus riches que la nôtre en insectes de grande taille, le soin d'étudier les mouvements respiratoires de toute une série d'animaux intéressants dont je n'ai pu m'occuper.

[1] *Recherches expérimentales sur les mouvements respiratoires des insectes.* (Communication préliminaire.) Bull. de l'Acad. royale de Belgique, 3^e^ série, t. III, p. 727, 1882.

Digitized by Google

§ II.

Historique.

Les mouvements d'inspiration et d'expiration de plusieurs insectes de grande dimension appartenant aux groupes des *Coléoptères,* des *Orthoptères,* des *Odonates,* etc., sont si apparents qu'ils ont attiré de bonne heure l'attention des observateurs; aussi de nombreux physiologistes ont-ils cherché à étudier le mécanisme respiratoire de ces animaux; les uns l'ont fait à l'œil nu, d'autres se sont servis de la loupe; tous, sauf Hausmann dont je parlerai au § III et Langendorff dont la notice est postérieure à la publication de mes méthodes personnelles, se sont bornés à l'observation simple.

Comme l'exposé détaillé des résultats auxquels ces auteurs ont cru arriver a sa place marquée en tête des paragraphes qui traitent spécialement de chaque forme caractéristique, je me bornerai ici à donner, à titre de renseignement, la liste des observateurs, par ordre de dates, avec l'indication des insectes ou des groupes d'insectes qu'ils ont examinés.

Le lecteur voudra bien remarquer : 1° que cette liste *ne concerne que les observations sur les mouvements respiratoires* et ne se rapporte à aucun des autres faits rentrant dans la série des phénomènes physiques ou chimiques de la respiration; 2° qu'il a fallu conserver certains noms d'insectes d'une valeur très indécise, lorsqu'il a été impossible de savoir exactement de quelle forme il s'agissait en réalité.

1645. M. Aur. Severinus [1]. . . *Gryllus.*
1665. D. Schenck [2]. . . . Coléoptères.
1669. M. Malpighi [3] . . . Ver à soie, *Locusta.*
1721. J.-L. Frisch [4] . . . *Hydrophilus.*

[1] Severinus. *Zootomia Democritœa*, etc. Norimbergae, 1645, p. 344. (Cité d'après Hausman et Treviranus.)

[2] Schenck. *Epistola ad autorem Gammarologiae*, dans Sachs, *Gammarologia*, p. 935. Francofurti et Lipsiae, 1665.

[3] Malpighi. *Dissertatio epistolica de Bombice*, page 20 dans l'édition de ses œuvres, publiée à Leyde en 1687. (D'après Hagen la première édition est de 1669.)

[4] Frisch. *Beschreibung van allerley Insecten in Teutschland,* Th. II, p. 30. Berlin, 1721. (Cité par Nitzsch.)

Digitized by Google

1749.	AUG.-JOH. RÖSEL [5] . .	Grandes libellules.
1792.	N.-L. VAUQUELIN [6] . .	*Locusta viridissima.*
1803.	J.-F.-L. HAUSMANN [7]. .	*Locusta viridissima*, Libellules, Géotrupes.
1805.	W. SORG [8]	*Lucanus cervus*, *Locusta viridissima*, *Sphinx euphorbiae.*
1807.	L. SPALLANZANI [9]. . .	*Libellula.*
1808.	CHR.-L. NITZSCH [10] . .	Diptères, Hyménoptères, Lépidoptères et Coléoptères.
1811.	CHR.-L. NITZSCH [11] . .	*Hydrophilus.*
1814.	G.-R. TREVIRANUS [12]. .	*Libellula, Cicada, Acridium,* Coléoptères, Lépidoptères.
1817.	J.-R. RENGGER [13]. . .	*Locusta.*
1832.	H. BURMEISTER [14]. . .	*Melolontha*, *Libellula.*
1833.	L. DUFOUR [15]	*Nepa cinerea.*
1836.	G. NEWPORT [16] . . .	*Bombus*, *Apis mellifica*, *Anthophora retusa*, *Locusta viridissima*, *Sphinx ligustri.*
1836.	GOADBY [17].	Insectes non spécifiés.
1838.	ANT. DUGÈS [18] . . .	Coléoptères, Hyménoptères, *Locusta*, *Musca*, *Helophilus.*

[5] RÖSEL. L'édition que j'ai consultée est l'édition hollandaise : *Natuurlyke historie der Insecten.* Haarlem en Amsterdam, 1764-1768. — Tweede deel, p. 191, § 9.

[6] VAUQUELIN. *Observations chimiques et physiologiques sur la respiration des insectes et des vers.* (Ann. de Chimie, t. XII, p. 273, 1792.)

[7] HAUSMANN. *De Animalium exsanguium respiratione, Commentatio.* Hannoverae, 1803.

[8] SORG. *Disquisitiones physiologicae circa respirationem insectorum,* etc. Rudolstadt, 1805.

[9] SPALLANZANI. Dans SENNEBIER. *Rapports de l'air avec les êtres organisés et tirés des journaux d'observation et d'expériences de L. Spallanzani,* p. 66. Genève, 1807.

[10] NITZSCH. *Commentatio de respiratione animalium.* Vitebergae, 1808, p. 39.
Voyez aussi Archiv für die Physiologie de Reil et Autenrieth, Bd. VIII, Halle, 1807-1808.

[11] NITZSCH. *Ueber das Athmen der Hydrophilen.* (Archiv für die Physiologie de Reil et Autenrieth, Bd. X, p. 454.) Halle, 1811.

[12] TREVIRANUS. *Biologie oder Philosophie der lebenden Natur,* Bd. IV, pp. 157-158. Göttingen, 1814.

[13] RENGGER. *Physiologische Untersuchungen über die Thierische Haushaltung der Insecten,* p. 38. Tubingen, 1817.

[14] BURMEISTER. *Handbuch der Entomologie,* Bd. I, p. 419. Berlin, 1832.

[15] DUFOUR. *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Hémiptères.* (Acad. des sciences de Paris, savants étrangers, t. IV, p. 384, 1833.)

[16] NEWPORT. *On the respiration of Insects.* (Philosophical Transactions of the royal Soc. of London, part. II, 1836.)

[17] GOADBY. *Medical Gazette,* 2 avril 1836. (Cité par Newport dans l'ouvrage précédent, en note, p. 549.)

[18] DUGÈS. *Traité de physiologie comparée,* t. II, p. 555. Montpellier, 1838.

Digitized by Google

1839 et 1848. C.-G. Carus [19].	*Decticus verrucivorus.*
1854. Th. Williams [20] . . .	Insectes non spécifiés.
1855. Fr. Barlow [21] . . .	*Libellula, Gryllus.*
1860. E. Faivre [22]	*Dytiscus.*
1861. H. Rathke [23]	*Carabus, Dytiscus, Staphylinus, Scarabœus, Cetonia, Hister, Cerambyx, Tenebrio, Bruchus, Attelabus, Chrysomela*, Hyménoptères, *Tipula, Musca, Empis, Panorpa, Libellula*, Lépidoptères, *Blatta, Gryllus, Gryllotalpa, Acridium, Truxalis, Mantis*, larves et nymphes.
1864. E. Baudelot [24] . . .	Libellules et larves de libellules.
1872. O. Liebe [25]	Insectes non spécifiés (cite surtout les observations des auteurs précédents).
1873-1876. M. Girard [26] . .	Libellules.
1875. J. Künkel d'Herculais [27].	Volucelles.
1875. O.-J.-B. Wolff [28] . .	*Apis mellifica.*

19 Carus. *Traité élémentaire d'anatomie comparée.* (Traduction française, pp. 335 et suiv.) Bruxelles, 1839.

— *Tabulae anatomiam comparativam illustrantes*, pars VII, tab. III, fig. 9 et 10. Lipsiae, 1848.

20 Williams. *On the Mechanism of Aquatic respiration and on the structure of the Organs of breathing in the invertebrate animals.* (Ann. and Mag. of natural history, second series, vol. XIII, p. 135, 1854.)

21 Barlow. *Observations on the respiratory movements of Insects.* (Philosophical Trans., vol. CXLV, part. I, p. 139.) London, 1855.

22 Faivre. *De l'influence du système nerveux sur la respiration des Dytiques.* (Ann. des sc. nat., Zoologie, 4e série, t. XIII, p. 321, 1860.)

23 Rathke. *Anatomisch- physiologische Untersuchungen über den Athmung prozess der Insekten.* (Schriften der physik.-ök. Gesellsch. zu Königsberg, Jahrg. 1, Heft II, p. 99, 1861.)

24 Baudelot. *De l'influence du système nerveux sur la respiration des insectes.* (Ann. des sc. nat., Zoologie, 5e série, t. II, p. 45.) Paris, 1864.

25 Liebe. *Ueber die Respiration der Tracheaten, besonders über den Mechanismus derselben und über die Menge der ausgeathmeten Kohlensaüre.* Thèse d'Iena. Chemnitz, 1872.

26 Girard. *Traité élémentaire d'entomologie*, t. I, p. 31, et t. II, 1er fascicule, p. 330. Paris, 1873-1876.

27 Künkel d'Herculais. *Recherches sur l'organisation et le développement des Volucelles*, 1re partie. Paris, 1875.

(La 2e partie, non publiée actuellement, sauf les planches, renfermera les observations sur le mécanisme respiratoire que l'auteur se borne à effleurer dans la 1re partie.)

28 Wolff. *Das Riechorgan der Biene.* (Nova acta der K. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. XXXVIII, nr 1, pp. 11 et suiv.) Dresde, 1875.

Digitized by Google

1876. M. GIRDWOYN [29] . . . *Apis mellifica.*
1877. V. GRABER [30]. . . . *Melolontha*, Acridiens, *Libellula.*
1878-1880. A.-S. PACKARD [31]. Acridiens, Géotrupes.
1880. B. LUCHSINGER [32]. . . Larves de libellules.
1880. CH. SEDGWICK MINOT [33]. Acridiens.
1882. E. DÖNHOFF [34] . . . *Apis mellifica.*
1883. O. LANGENDORFF [35] . . *Vespa, Bombus, Apis, Melolontha, Libellula, Æschna.*

L'aspect de cette longue liste comprenant des noms d'observateurs très sérieux ferait supposer, au premier abord, que le sujet est épuisé et que les mouvements respiratoires des insectes sont parfaitement connus dans tous leurs détails. Il en serait ainsi, en effet, et mon travail n'aurait aucune raison d'être si la méthode de l'observation simple était exempte de causes d'erreurs.

Les causes d'erreurs sont malheureusement nombreuses; en effet, pendant la respiration, ce n'est pas dans un seul des anneaux du corps que les arceaux tergal et sternal se déplacent l'un par rapport à l'autre; ce ne sont pas non plus deux somites seulement qui s'éloignent ou se rapprochent; les mouvements ont lieu, en général, dans la plupart des anneaux de l'abdomen.

On comprend, dès lors, combien il est difficile de suivre de l'œil ce qui se passe à peu près en même temps dans une série de somites dont les pièces ne se meuvent pas exactement de la même manière; l'attention se

29 GIRDWOYN. *Anatomie et physiologie de l'Abeille*, p. 21. Paris, 1876.

30 GRABER. *Die Insekten*, 1r Theil, pp. 106 à 114 et 364 à 365. München, 1877.

31 PACKARD. *Anatomy and Embryology of the Locust.* (First annual Report of the United States Entomological commission. Rocky Mountain Locust, pp. 269 et suiv.) Washington, 1878.
— Second Report, etc., p. 181, en note. Washington, 1880.

32 LUCHSINGER. *Weitere Versuche und Betrachtungen zur Lehre von den Rückenmarkcentren. Anhang : Ueber das Respirationscentrum der Libellenlarven.* (Archiv für die gesammte Physiologie de Pflüger, Bd. XXII.) Bonn, 1880.

33 SEDGWICK MINOT. *Histology of the Locust and the Cricket*, dans le Report ci-dessus, p. 196.

34 DÖNHOFF. *Beiträge zur Physiologie*, § III, *Das Athmungscentrum der Honigbiene.* (Archiv für Anatomie und Physiologie de His, Braune et Du Bois-Reymond. Physiologische Abtheilung, p. 162.) Leipzig, 1882.

35 LANGENDORFF. *Studien über die Innervation der Athembewegungen. Sechste Mittheilung. Das Athmungscentrum der Insecten.* (Archiv für Anatomie und Physiologie. Physiologische Abtheilung, p. 80.) Leipzig, 1883.

Digitized by Google

fatigue, on voudrait immobiliser l'animal dans chaque phase, l'observateur consciencieux doute et finit par formuler des conclusions vagues.

L'appréciation ci-dessus est si vraie qu'il est à peu près impossible, après avoir lu les travaux de presque tous les naturalistes que je viens de citer, de se former une idée nette des mouvements respiratoires des trachéates.

Les uns, comme Schenck, Sorg, Nitzsch, Treviranus, Rengger, Burmeister, Liebe, emploient des termes sans précision ou indiquent une comparaison plus ou moins satisfaisante entre le mécanisme respiratoire des insectes et celui des vertébrés; d'autres, tels que Malpighi, Spallanzani, Newport, Dugès, Carus, Williams, Barlow, Faivre, Wolff, Girdwoyn, Packard, etc., n'ont observé qu'une forme ou un petit nombre de formes et, à supposer qu'ils aient toujours bien vu, ne possèdent point les matériaux nécessaires pour énoncer des conclusions générales.

Deux naturalistes seulement ont dominé la question de haut et ont obtenu de la méthode d'observation directe tout ce qu'elle pouvait donner : ce sont V. Graber et surtout H. Rathke, auteur d'un mémoire extrêmement remarquable, auquel je renverrai souvent. Si des détails leur ont échappé, s'ils ont été victimes de certaines illusions, c'est, encore une fois, qu'ils ne se sont servis que d'une méthode unique et imparfaite.

Je viens de signaler l'indécision dans laquelle nous laissent les publications du plus grand nombre des spécialistes. Cette indécision se traduit d'une façon caractéristique dans les traités d'entomologie et dans les ouvrages généraux qui parlent de l'organisation des *Arthropodes*. Leurs auteurs insistent sur la structure des trachées, sur celle des stigmates et puis glissent rapidement sur la question cependant si importante des mouvements respiratoires, comme s'il s'agissait d'une chose très simple à laquelle il est à peu près inutile de s'arrêter.

On peut cependant citer une honorable exception : grâce à une bonne analyse du mémoire de Rathke, A. Gerstaecker a donné dans ses *Arthropoda* des *Bronn's Klassen und Ordnungen des Thier Reichs* [1] un développement suffisant à la description des mouvements d'inspiration et d'expiration des insectes.

[1] Band V, Lieferung 3. Leipzig und Heidelberg, 1867, p. 131.

Digitized by Google

§ III.

Méthodes de Hausmann et de Maurice Girard.

L'insuffisance de l'observation simple dans l'étude des mouvements respiratoires des insectes, comme dans celle de presque tous les phénomènes physiologiques consistant en mouvements combinés et, par suite, la nécessité de faire usage, parallèlement, d'une deuxième méthode plus sûre, la méthode graphique ou toute autre permettant de suivre les diverses phases sans commettre d'erreurs, ont suggéré autrefois à Hausmann et récemment à Maurice Girard l'emploi de dispositifs plus ou moins heureux que je vais décrire avec quelques détails.

Hausmann[1] remplit partiellement d'eau un tube de verre gradué, vertical, long de 30 centimètres, large de 15 millimètres, fermé à son extrémité supérieure et plongeant dans l'eau par son extrémité inférieure ouverte.

Il introduisit une sauterelle verte (*Locusta viridissima*) dans la portion supérieure contenant de l'air et dont la capacité était d'environ 10 à 12 centimètres cubes; puis il abaissa le tube jusqu'à ce que les niveaux du liquide à l'intérieur et à l'extérieur fussent les mêmes.

Dans ces conditions, Hausmann vit les mouvements respiratoires de l'insecte déterminer des oscillations dans la colonne d'eau renfermée dans le tube; cette colonne montant et descendant d'une façon rhythmique.

Hausmann voulut répéter la même expérience en se servant tantôt de *Libellules*, tantôt du *Geotrupes stercorarius*, mais les déplacements de la colonne liquide furent si faibles qu'il devenait très difficile d'en apprécier la valeur.

Bien que cette méthode ne puisse donner aucune solution quant au mécanisme des dilatations et des contractions respiratoires de l'abdomen des insectes, elle semble cependant, à première vue, susceptible de fournir quelques indications précises sur les changements de capacité du corps, ainsi

[1] *De animalium exsanguium respiratione Commentatio*, p. 8. Hannoverae, 1803.

que sur les volumes d'air inspirés et expirés. Aussi ai-je voulu l'essayer, en modifiant toutefois l'appareil de façon à le rendre beaucoup plus sensible.

J'ai pris d'abord comme sujet d'expérience l'Hydrophile brun (*Hydrophilus piceus*), dont les mouvements respiratoires ont une grande amplitude (*voy.* §§ XI et XCII). L'instrument dont je me suis servi était construit de la manière suivante (fig. 1) : une petite éprouvette de verre *A*, de 18 millimètres de diamètre intérieur, est fixée verticalement à un support, l'orifice en bas. Cet orifice est muni d'un bouchon de caoutchouc *B*, traversé par l'une des branches d'un tube de verre *C*, courbé en U et renfermant de l'eau dans ses deux branches jusqu'à une certaine hauteur.

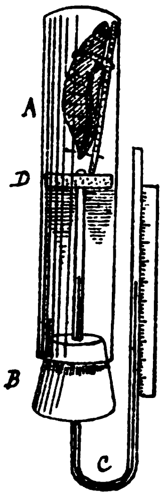


Fig. 1 × ½.

La branche extérieure et libre est appliquée contre une échelle graduée en demi-millimètres, tandis que la branche qui traverse le bouchon pénètre de plusieurs centimètres dans l'intérieur de l'éprouvette. Cette branche intérieure est garnie près de son ouverture supérieure d'un collier de liège *D* destiné à empêcher l'insecte de tomber dans le bas de l'appareil. Enfin de l'eau remplit, autour de la branche interne, l'espace cylindrique compris entre le collier de liège et le bouchon de caoutchouc. La couche liquide en question m'a permis de réduire à un minimum la chambre à air occupée par l'animal et assure de plus à l'instrument une fermeture parfaite.

Le diamètre intérieur du tube en U a varié suivant les expériences; ainsi j'ai successivement employé, avec des Hydrophiles différents, des tubes de 4 millimètres et de 2 millimètres de diamètre.

On voit, par la figure et par la description, que l'éprouvette *A* offre à sa partie supérieure un espace plein d'air communiquant librement avec le tube en U. C'est dans cet espace que j'introduis un Hydrophile vigoureux privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes et fixé le long d'une bandelette de liège par le prothorax et l'extrémité de l'abdomen [1].

[1] Il est indispensable de fixer l'animal comme il est dit dans le texte. Sans cette précaution, il exécute de violents mouvements de l'abdomen tout à fait étrangers à l'acte respiratoire et qui se traduisent du côté de la colonne liquide par des oscillations nuisibles masquant complètement les oscillations respiratoires qu'on s'était proposé d'étudier.

Digitized by Google

En déduisant de la capacité de la chambre à air le volume de l'insecte et de la bandelette de liège qui le porte et en y ajoutant d'autre part la capacité de la partie vide de la branche interne du tube en U, on trouve que le volume d'air dans lequel l'Hydrophile se meut est de 10 à 11 centimètres cubes.

Les choses étant disposées comme il vient d'être indiqué, si l'on observe, à l'aide d'une loupe montée sur pied, la colonne liquide de la branche externe de l'instrument, on voit cette colonne *baisser* d'une façon brusque à chaque mouvement *expiratoire* du coléoptère, pour remonter d'une égale quantité, mais d'une façon plus lente, pendant l'inspiration.

Les déplacements sont toujours fort petits; ainsi, dans le cas d'un tube en U de 4 millimètres de diamètre intérieur, la course de la colonne liquide n'a que $^1/_4$ de millimètre de hauteur; elle atteint $^1/_2$ millimètre pour un tube dont le diamètre intérieur est de 2 millimètres seulement.

Afin de m'écarter le moins possible de l'expérience de Hausmann, j'ai répété plus tard les mêmes essais sur un grand Locustien, le *Decticus verrucivorus*. Le tube en U avait 2 millimètres de diamètre intérieur. Les déplacements de la colonne liquide ne dépassèrent guère $^1/_2$ millimètre [1].

Il me reste à faire ressortir les défauts du procédé de Hausmann, défauts qui rendent sa méthode inapplicable dans la plupart des cas.

1° Cette méthode exige l'emploi exclusif d'insectes de grande taille, puisque l'un de nos plus gros coléoptères indigènes à mouvements respiratoires très amples ne fait osciller que de $^1/_2$ millimètre une colonne d'eau de 2 millimètres de diamètre;

2° L'observation de si petits déplacements est difficile et demanderait, pour se faire avec exactitude, l'emploi d'instruments accessoires spéciaux;

3° Les oscillations de la colonne liquide indiquent seulement que l'insecte se gonfle et se dégonfle et *ne peuvent faire connaître la valeur des changements réels du volume,* puisqu'en expiration, pendant que l'abdomen diminue de diamètre, une certaine quantité d'air est expulsée du système trachéen,

[1] Pour une cause que je ne m'explique pas bien, ce furent, cette fois, les ascensions et non les descentes qui coïncidèrent avec les mouvements expiratoires. Ce détail n'a, du reste, qu'une valeur minimé; il importe surtout de remarquer le peu d'amplitude des oscillations de la colonne d'eau.

Digitized by Google

tandis qu'en inspiration, lorsque le diamètre de l'abdomen augmente, de l'air de la chambre occupée par l'insecte se précipite dans ses trachées. En résumé, il ne faut jamais oublier que c'est une espèce d'éponge qui change ici de volume apparent et non un corps plein, compacte, qui s'étend ou se resserre;

4° Enfin, la méthode n'apprend rien quant au mécanisme respiratoire, quant à la nature des pièces squelettiques qui se déplacent et quant aux mouvements particuliers de chacune d'elles.

Le procédé de Hausmann n'a donc qu'un intérêt historique et les quelques pages que je lui ai consacrées ont eu pour but de faire bien comprendre pourquoi je n'en ai pas fait usage dans mes recherches personnelles.

J'arrive au moyen préconisé par Maurice Girard. Voici en quels termes il l'indique dans son *Traité d'entomologie :* « Il sera possible de rechercher sur de gros insectes, comme des Sphinx, en emboîtant leur abdomen dans une flexible enveloppe de caoutchouc reliée à un style, d'obtenir un tracé graphique de ces mouvements et d'étudier leur rhythme dans ses deux périodes, comme M. Bert l'a fait avec tant d'habileté pour les vertébrés des diverses classes. » [1].

Mon savant confrère et ami ne se fait probablement pas une idée exacte de la valeur des forces que les insectes mettent en jeu dans les mouvements respiratoires. Ces forces sont toujours minimes. Une enveloppe de caoutchouc, quelque mince qu'elle soit, effacerait tous les détails et, à supposer qu'elle permît encore des mouvements respiratoires vrais, elle rendrait ceux-ci peu nets et d'une interprétation pénible [2].

Il oublie aussi qu'en même temps qu'ils exécutent les mouvements respiratoires proprement dits, les insectes captifs impriment à leur abdomen des mouvements d'oscillation ou de torsion d'une amplitude bien plus grande et qui font le désespoir des observateurs. Son exemple même est peu heureux; les Sphinx contournent leur abdomen dans tous les sens et j'ai dû renoncer à les soumettre à la méthode graphique [3].

Une longue expérience me fait considérer le procédé de Maurice Girard

1 *Les Insectes. Traité élémentaire d'entomologie*, t. I, p. 31. Paris, 1873.
2 Voyez § IV.
3 Voyez § LXXXII.

Digitized by Google

comme impraticable; mais je tiens à dire que c'est la lecture du passage cité de son ouvrage qui m'a donné la première idée d'appliquer à l'étude du mécanisme respiratoire des trachéates une méthode permettant d'obtenir des tracés ou des dessins qui représentent les diverses phases des mouvements respiratoires.

CHAPITRE II.

MÉTHODES EMPLOYÉES DANS CES RECHERCHES.

Sans négliger l'observation directe, qui, insuffisante seule, devient fort utile lorsqu'on en fait usage parallèlement à d'autres procédés plus rigoureux, je me suis servi concurremment de deux méthodes : de la *méthode graphique proprement dite*, avec leviers inscripteurs, cylindre tournant enfumé, etc., et de la *méthode des projections*, qui, pour le but spécial que je m'étais proposé, est certainement la meilleure.

§ IV.

Méthode graphique.

Je rappellerai que la méthode graphique a été employée avec le plus grand succès par Paul Bert [1] pour l'étude des mouvements respiratoires des Poissons, des Amphibiens, des Reptiles et des Oiseaux et qu'une série de physiologistes l'ont appliquée à l'analyse des mêmes mouvements chez les Mammifères.

[1] *Leçons sur la physiologie comparée de la respiration*, pp. 225 à 332 et suiv. Paris, 1870.

Digitized by Google

Chez les Insectes, la méthode est d'un emploi assez difficile, et, par suite de causes matérielles que j'indiquerai plus bas, elle est loin de donner tous les résultats qu'on croirait pouvoir en attendre.

Le paragraphe actuel sera donc consacré, non seulement à la description des petits instruments que j'ai imaginés, mais aussi à l'indication des causes d'insuccès dans des cas déterminés. Il importe, en effet, que le lecteur sache que j'ai épuisé tous les moyens et qu'il ne conserve aucun doute sur la valeur relative de la méthode des projections qui sera décrite dans le paragraphe suivant.

Lorsqu'on voit respirer un insecte, un Coléoptère, par exemple, l'idée qui vient immédiatement à l'esprit est de faire reposer sur la région de l'abdomen qui se déplace pendant les mouvements respiratoires, un petit levier très léger en contact par une de ses extrémités avec un cylindre tournant enfumé.

Dans mes recherches sur les mouvements du cœur des Crustacés décapodes [1], j'avais employé, comme leviers, des fils de verre étirés à la lampe; ces leviers sont encore trop lourds pour les Insectes. Je me suis fort bien trouvé de fines bandes de 3 à 4 millimètres de large coupées au canif et à la règle dans du papier bristol ordinaire. Si on ne dépasse pas une certaine longueur, ces bandes sont suffisamment raides. Elles offrent, de plus, cet avantage qu'on leur donne aisément les dimensions et les formes qu'exige n'importe quelle circonstance particulière.

La relation entre le style inscrivant et le corps de l'animal peut affecter deux formes : ou bien le style, véritable levier du troisième genre, tourne librement autour d'un axe horizontal placé à une de ses extrémités et repose librement, par son poids, sur une des pièces squelettiques mobiles de l'insecte; ou bien, le style, indépendant de tout support autre que le corps de l'articulé, est fixé sur l'animal même.

1^er^ cas : *Levier du troisième genre.* — La bande de papier bristol, dont le poids ne doit pas dépasser 1 $^1/_2$ décigramme pour nos plus grands insectes indigènes, et dont la longueur est de 12 centimètres, est placée

[1] *Recherches physiologiques sur le cœur des Crustacés décapodes* (Archives de Biologie, t. I, fascicule IV, p. 595). Bruxelles, 1880.

Digitized by Google

de champ. Celle de ses extrémités qui frotte sur le cylindre enfumé est taillée en pointe; l'autre est percée d'un petit trou pour le passage de l'axe (fig. 2).

L'axe est constitué, soit par une aiguille, soit par une fine épingle à insectes. Deux perles de verre enfilées sur cet axe et calées à l'aide de petits fragments de liège permettent au levier de tourner presque sans frottement, tout en s'opposant à des déplacements latéraux.

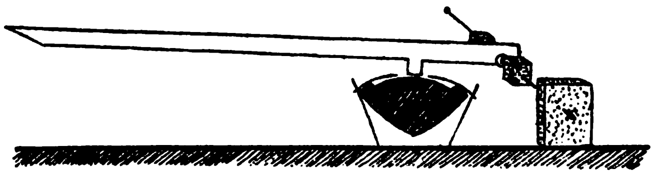


Fig. 2 × $\frac{1}{2}$.

L'axe est piqué dans un support de liège que l'opérateur taille au moment de l'expérience, de sorte qu'il est très aisé de placer l'axe et le levier dans les positions les plus favorables.

Il convient, en général, de ne pas faire reposer le levier directement, par son bord inférieur, sur les téguments de l'insecte, mais bien, par un petit talon saillant de 5 millimètres de longueur qu'on laisse adhérent en un point convenable du levier lorsqu'on découpe celui-ci.

Le but de ce talon est bien simple : le corps des insectes est rarement cylindrique; il arrive, chez les Coléoptères, par exemple, chez lesquels le levier doit être, la plupart du temps, en rapport avec un arceau tergal de l'abdomen, que, lors de l'expiration, cet arceau s'abaisse plus bas que d'autres parties voisines (bords épimériens, bords des élytres dans certains cas, etc.); sans talon, le levier viendrait reposer sur ces parties saillantes, ce qui altérerait profondément le tracé. Grâce à la précaution que je viens de signaler, le levier n'est donc jamais en contact avec des portions du corps pouvant arrêter son mouvement oscillatoire.

Il est presque toujours utile de mettre un peu de baume du Canada épaissi à l'extrémité du talon. Le levier adhère ainsi d'une façon suffisante et ne glisse pas latéralement, quelle que soit l'obliquité que prenne, par moments, la région du corps dont on étudie les mouvements.

J'ajouterai, enfin, que le talon du levier est un point de repère invariable qui ne permet aucun changement dans les longueurs relatives des bras de

Digitized by Google

levier de la puissance et de la résistance; condition indispensable lorsqu'il s'agit de déterminer les modifications que subit, suivant les circonstances, l'amplitude de la courbe respiratoire d'un insecte donné.

Dans la plupart de mes expériences le levier avait, comme je l'ai indiqué plus haut, 12 centimètres de longueur, le talon était placé à 2 centimètres de l'axe.

2[e] CAS : *Style inscrivant porté par le corps de l'animal.* — Le style est constitué par une bande de papier bristol munie, cette fois, d'un talon saillant de 1 centimètre placé *vers le milieu* de la longueur. Les deux moitiés du style sont modifiées par tâtonnement jusqu'à ce que leurs poids soient égaux et qu'elles se fassent équilibre. Le talon, dont on reploie une portion à angle droit, offre ainsi une petite surface plane horizontale que l'on colle au point voulu du squelette de l'insecte à l'aide de baume du Canada très visqueux (fig. 3).

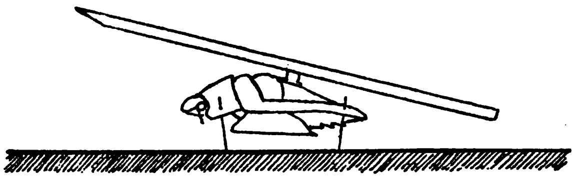


Fig. 3 × $\frac{1}{2}$.

Cette disposition permet d'obtenir des graphiques assez intéressants, indiquant, outre la valeur des déplacements verticaux, toutes les inclinaisons qu'affecte, dans le plan d'oscillation du style, la pièce tégumentaire sur laquelle ce style est fixé.

Je n'insisterai pas sur la structure de l'appareil enregistreur que j'ai employé; il suffira de dire que le cylindre tournant est vertical, qu'il effectue une rotation en 55 secondes et qu'un compteur battant la seconde donne, lorsque cela est nécessaire, la durée exacte des divers phénomènes.

Une première difficulté que l'on rencontre dans ce genre d'expériences réside dans la multiplicité des petits moyens à mettre en œuvre pour fixer les insectes sans troubler leurs mouvements respiratoires. Il faut, pour ainsi dire, imaginer une disposition spéciale pour chaque forme animale. Je ne m'appesantirai pas sur ces détails, qui rempliraient plusieurs pages; j'indiquerai brièvement quelques précautions indispensables.

La meilleure manière de fixer les Libellules, les Acridiens et d'autres

Digitized by Google

insectes dont les organes du vol peuvent être relevés sans inconvénient du côté du dos, consiste à rassembler leurs ailes dans un plan vertical et à les serrer entre deux lames de liége ou entre une lame de liége et une lame de carton attachées elles-mêmes, d'une façon quelconque, à un support fixe.

Quant aux Coléoptères, l'opération est plus complexe. Avec des ciseaux fins, on pratique dans leurs élytres une fenêtre rectangulaire, plus ou moins grande suivant les cas, puis, par cette ouverture, on enlève, en les coupant, la plus grande partie des ailes.

On met ainsi à nu une portion de la face dorsale de l'abdomen. On fixe ensuite l'insecte en implantant de fines épingles dans les rebords latéraux du prothorax et dans les rebords latéraux aussi des élytres. Ces épingles ne peuvent ni léser ni serrer l'abdomen, et l'animal doit être enfilé assez haut pour qu'aucune partie de son corps ne touche le support [1] (fig. 2).

Les Coléoptères possèdent une force relative considérable et peuvent effectuer à l'aide de leurs pattes des efforts extraordinaires [2]. Lorsqu'ils sont fixés de la manière que je viens de décrire, ils exécutent constamment, pour se dégager, des mouvements violents qui déterminent dans les tracés des irrégularités déplorables. J'ai donc pris le parti de couper, à ras des trochanters, les pattes de tous les Coléoptères sur lesquels j'ai expérimenté. Sans cette précaution que j'ai dû employer aussi dans la plupart de mes essais sur d'autres insectes et dans mes recherches à l'aide de la méthode des projections, il m'eût été souvent impossible d'obtenir un graphique ou un dessin satisfaisant.

Une autre difficulté qui compromet souvent les résultats consiste dans ce fait que beaucoup d'insectes, surtout lorsqu'ils sentent le contact du levier qu'ils doivent déplacer par leurs mouvements respiratoires, font exécuter à leur abdomen soit des mouvements de torsion, soit des mouvements alterna-

[1] Il est presque inutile d'ajouter que l'insecte en expérience, le levier, etc., sont fixés sur une tablette susceptible d'être haussée ou baissée à volonté et que l'on peut approcher ou éloigner du cylindre enregistreur suivant les circonstances.

[2] Voyez à ce sujet mes *Première et Deuxième notes sur la force musculaire des insectes* (BULLET. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 2e série, t. XX, no 11, 1865, et t. XXII, no 11, 1866).

Digitized by Google

tifs et presque incessants d'élévation et d'abaissement, dans lesquels il faut démêler ce qui revient, d'une part, aux déplacements généraux du corps et, d'autre part, aux mouvements respiratoires proprement dits.

Ce fait regrettable arrive toujours pour les Coléoptères dont on supprime les élytres en totalité, au lieu de pratiquer dans celles-ci une fenêtre plus ou moins restreinte, comme je l'ai indiqué plus haut [1].

L'ablation d'une portion médiane des élytres permet, au contraire, d'observer l'animal sous ses allures normales. N'éprouvant pas l'excitation spéciale provoquée par la mise à nu de la totalité de l'abdomen, il est bientôt calmé et respire alors d'une façon régulière. Si son abdomen exécute parfois des mouvements généraux un peu considérables, ceux-ci sont si espacés qu'il devient très aisé de choisir une période convenable et d'obtenir un bon tracé.

Il est malheureusement des insectes pour lesquels aucun moyen de contention ne réussit. Je citerai, à cet égard, les Sphingides et spécialement le *Smerinthus tiliæ* qu'il m'a été impossible d'utiliser, ces Lépidoptères tordant leur abdomen dans tous les sens et faisant d'autant plus de mouvements non respiratoires que l'on cherche davantage à les immobiliser.

Enfin, une cause toute physiologique qui restreint considérablement l'emploi de la méthode graphique est la faiblesse des forces développées par les insectes dans leurs mouvements de respiration, surtout pendant la phase inspiratoire.

Je montrerai, en effet, confirmant, en cela, quelques observations faites par mes prédécesseurs, que fort peu d'insectes possèdent de véritables muscles inspirateurs, que par conséquent l'inspiration et, par suite, l'élévation d'un levier dans des expériences graphiques, s'effectuent exclusivement par l'élasticité des téguments et des parois du système trachéen.

Beaucoup d'insectes de taille moyenne peuvent, il est vrai, mettre en mouvement un levier léger tel que ceux dont j'ai fait usage; mais la force qu'ils ont à leur disposition est si minime qu'ils ne parviennent pas à vaincre le

[1] Voyez, pour un graphique fourni par un Coléoptère privé complètement de ses élytres, le § XXVI.

Digitized by Google

frottement dès que la pointe du levier est mise en rapport avec le cylindre tournant enfumé [1].

Il en résulte qu'il faut renoncer à la méthode graphique pour la plupart de nos insectes indigènes et que celle-ci ne peut donner de résultats qu'à la condition de s'adresser à de gros Coléoptères, à de grandes Libellules ou à quelques Orthoptères de forte taille.

Je ferai encore remarquer que la méthode en question ne permet d'apprécier que la nature et l'amplitude des mouvements des parties déterminées du squelette tégumentaire avec lesquelles les leviers se trouvent en contact et que l'on reste réduit, pour l'étude des mouvements d'ensemble, à l'observation simple avec toutes ses causes d'erreurs [2].

En terminant cet exposé, je crois devoir indiquer brièvement comment a opéré O. Langendorff [3], qui peu de temps après moi eut l'idée d'appliquer la méthode graphique à l'étude des mouvements de respiration des insectes. Ce physiologiste fixe l'animal sur une plaque de liège à l'aide de vernis à la colophane; le levier inscripteur n'a qu'un bras et est attaché au corps de l'articulé par une petite tige d'aluminium et une gouttelette de cire fondue.

En comparant les graphiques obtenus par Langendorff aux miens, je constate dans les résultats de l'auteur cité des irrégularités provenant certainement d'un défaut de l'instrument. Le peu d'amplitude des courbes montre, en outre, que le levier employé était très court.

[1] Je me suis toujours servi, pour garnir le cylindre enregistreur, de papier à la céruse glacé. Les tentatives que j'ai faites pour diminuer le frottement en munissant l'extrémité inscrivante du levier d'un fragment de soie de porc ou de poils de blaireau sont restées sans résultat.

[2] On m'objectera peut-être qu'il fallait employer autant de leviers ou de styles inscripteurs qu'il y a de mouvements à analyser. La réponse est fort simple : un grand Coléoptère robuste, tel que l'Hydrophile, déplace déjà péniblement deux leviers; surchargé d'une série de petits instruments de ce genre, il resterait immobile ou ne produirait que des tracés incomplets et irréguliers.

[3] *Das Athmungscentrum der Insecten*, op. cit., p. 82.

Digitized by Google

§ V.

Méthode des projections.

Je viens de montrer, dans le paragraphe précédent, pourquoi la méthode graphique employée à l'analyse des mouvements respiratoires des insectes n'est applicable qu'à un nombre de formes assez restreint.

La méthode des projections offre, au contraire, l'immense avantage de permettre l'étude presque complète des mouvements respiratoires chez des insectes quelconques, depuis les plus volumineux de nos Coléoptères jusqu'à des Diptères inférieurs en taille à la mouche domestique.

L'idée première de la méthode ne m'appartenant pas, je dirai, plus loin, comment et dans quels buts le procédé a été mis en usage antérieurement.

Voici, d'abord, ma façon personnelle d'opérer : l'insecte fixé sur une petite lame de liége, de manière à ne gêner en rien ses mouvements respiratoires, et à l'aide de moyens semblables à ceux que j'ai décrits à propos de la méthode graphique [1], est introduit dans une grande lanterne magique éclairée par une bonne lampe à pétrole.

Dans l'instrument que j'ai à ma disposition, l'animal est placé entre la source lumineuse et le jeu des lentilles, de sorte qu'il n'est soumis qu'à une température peu élevée.

On obtient naturellement, sur un écran vertical, une silhouette renversée et si l'on ne dépasse pas un certain grossissement (12 diamètres, par exemple) on a sous les yeux une image très nette sur laquelle on peut suivre les mouvements respiratoires suffisamment amplifiés pour constater des déplacements réels d'une fraction de millimètre.

Ceci étant, on attache sur l'écran une feuille de papier blanc un peu fort

[1] Lorsque l'insecte effectue d'une façon incessante des mouvements non respiratoires qui masquent absolument le phénomène à étudier, on peut l'amener à ne plus exécuter que des mouvements respiratoires proprement dits en le décapitant. Les mouvements respiratoires étant purement réflexes continuent, quoique un peu affaiblis et un peu plus lents, chez l'animal privé de ses centres nerveux antérieurs. On verra par la suite de ce travail que je n'ai employé ce moyen que dans des cas assez rares.

Digitized by Google

et, à l'aide d'un crayon, on trace soigneusement les contours de la silhouette, en cherchant, ce qui n'exige que de la patience et de l'attention, à faire deux dessins superposés, l'un répondant à la phase d'expiration et l'autre à la phase d'inspiration. (Voyez les figures 57 à 76, planches I à VII.)

En changeant la position de l'insecte de manière à produire des silhouettes se rapportant à la coupe transverse de telle ou telle partie du corps, et même, en collant, avec un peu de baume du Canada, sur certaines pièces à mouvements douteux, de petits styles de papier très légers, dont on dessine les positions, on arrive à la connaissance complète de tous détails qui caractérisent les mouvements respiratoires d'un insecte donné.

Les contours au crayon terminés, on les repasse à l'encre de Chine ; on peut même, comme je l'ai fait généralement (voyez les figures), mettre une teinte uniforme noire sur le dessin d'une des phases, la phase expiratoire, par exemple, et, pour éviter toute confusion ultérieure, laisser en blanc ce qui dépasse des surfaces appartenant à la phase opposée.

Prenant, enfin, directement l'insecte comme modèle et l'examinant à la loupe, on marque sur les dessins des silhouettes tous les points de repère utiles, tels que les limites du thorax, les limites des divers somites abdominaux, les numéros d'ordre de ces somites, etc.

Avec de l'habitude l'observateur parvient, à l'aide de la méthode des projections, non seulement à étudier facilement les mouvements respiratoires de petits insectes, tels que des Mouches, des Coccinelles, de petits Hyménoptères, etc., mais il tranche sans discussion possible, une foule de questions que l'observation simple ne permet guère de résoudre avec certitude.

Ainsi, il arrive souvent que, trompé par des mouvements d'incurvation, on croit voir à l'œil nu ou à la loupe, des allongements et des raccourcissements alternatifs de l'abdomen, alors que les dessins superposés des silhouettes démontrent irréfutablement que la longueur de l'abdomen ne change pas.

Plusieurs des physiologistes qui m'ont précédé [1], victimes d'une illusion

[1] Rathke et Graber, entre autres.

Digitized by Google

très naturelle, ont dit que les mouvements respiratoires se propageaient, chez les insectes, d'anneau en anneau, sous forme d'onde, tandis que le procédé permet d'assurer qu'un mouvement progressif de ce genre est rare et que, dans la plupart des cas, l'inspiration ou l'expiration sont simultanées dans tous les anneaux actifs.

En outre, le grossissement employé étant déterminé, on peut utiliser les dessins pour mesurer, à une petite erreur près, les valeurs relatives ou absolues des changements de diamètre et des déplacements des différentes parties mobiles du corps des insectes mis en expérience; chose absolument impossible par l'observation directe.

J'ai dit que le principe de la méthode était connu; en effet, il y a une trentaine d'années, le physiologiste anglais J. Hutchinson [1], se souvenant probablement d'un moyen usité dès l'antiquité pour dessiner des portraits en traçant sur une surface verticale les contours de l'ombre produite par la tête d'une personne [2], eut l'idée d'appliquer ce procédé très simple à l'analyse des mouvements respiratoires de l'homme.

Il plaçait le sujet nu entre un écran blanc et une source lumineuse très éclairante; puis, suivant les bords de la silhouette, il dessinait les contours des surfaces thoracique et abdominale dans les deux phases d'inspiration et d'expiration. Les figures démonstratives qu'il obtint ainsi ont été publiées dans la *Cyclopœdia of Anatomy*, etc., de Todd, puis reproduites dans plusieurs traités de physiologie.

Hutchinson ne pouvait apprécier que des mouvements d'une amplitude absolue déjà considérable. L'emploi d'un appareil à projection pour grandir notablement l'ombre de petits objets mobiles et pour arriver à dessiner avec netteté les diverses phases de mouvements très peu étendus fut un progrès considérable. On le doit à mon savant collègue H. Valerius, professeur de

[1] HUTCHINSON. Article *Thorax* dans CYCLOPAEDIA OF ANATOMY AND PHYSIOLOGY de Todd. Vol. IV. Londres, 1852.

[2] Suivant une tradition grecque rapportée par Pline, la fille de Dibutade de Sicyone traça sur un mur le contour de l'ombre projetée par la tête de son amant. Une tradition analogue attribue la découverte du dessin à Saurias de Samos, qui l'aurait faite en traçant sur une muraille l'ombre d'un cheval.

Digitized by Google

physique à l'Université de Gand, qui, en 1865, a appliqué cette méthode ingénieuse à l'étude des *vibrations de fils de verre attachés par une de leurs extrémités à un corps vibrant* [1].

Postérieurement à la lecture de ma notice préliminaire à l'Académie royale de Belgique [2], E.-J. Marey, poursuivant le cours de ses belles recherches sur les mouvements de l'homme et des animaux, a lu, à l'Académie des sciences de Paris plusieurs travaux concernant l'analyse du mécanisme de la locomotion au moyen de séries d'images photographiques recueillies sur une même plaque et représentant les phases successives du mouvement.

Dans la première communication [3] de l'ingénieux physiologiste il ne s'agissait que d'épreuves photographiques *juxtaposées en série linéaire*, les unes *à côté* des autres [4]; mais, dans les communications suivantes [5], on voit figurer des photographies nombreuses empiétant plus ou moins les unes *sur* les autres et qui, dans les endroits où elles se combinent ainsi, rappellent, jusqu'à un certain point, les dessins imaginés par les frères Weber pour représenter la marche de l'homme, les dessins analogues concernant le cheval publiés par Colin, les silhouettes superposées de Hutchinson et mes silhouettes d'insectes.

Le lecteur se demandera probablement pourquoi je n'ai pas eu recours aussi à des photographies instantanées dont les résultats doivent être certainement plus parfaits que de simples dessins. Je crois qu'un procédé photographique m'aurait difficilement permis d'arriver à une analyse aussi complète que celle que j'ai obtenue par un moyen plus naïf.

En effet, les mouvements respiratoires des insectes sont, en général, assez

[1] H. Valerius. *Mémoire sur les vibrations de fils de verre attachés par une de leurs extrémités à un corps vibrant et libres à l'autre.* (Mém. de l'Acad. roy. de Belgique. Collection in-8°, t. XVII, 1865.)

[2] Séance de la Classe des sciences du 3 juin.

[3] *Comptes rendus* de l'Acad. des Sc. de Paris, t. XCV, n° 1, 3 juillet 1882, p. 14.

[4] Voir un facsimile d'une série des épreuves obtenues par M. Marey dans *La Nature*, numéro du 22 juillet 1882, p. 116.

[5] Voir, par exemple : *Comptes rendus* de l'Acad. des Sc. de Paris, t. XCVII, n° 16, 15 octobre 1883.

Digitized by Google

lents pour que l'observateur qui marque, par fractions, les limites des mouvements inspiratoires et expiratoires et qui *assiste à la répétition rhythmique de ces mouvements,* ait tout le temps voulu pour analyser minutieusement ce qui se passe. Les feuilles qui portent mes dessins originaux se couvraient rapidement de signes, de flèches et de notes qui m'ont toujours permis de rédiger immédiatement les résultats de chaque expérience. Au moindre doute, je replaçais dans l'appareil à projection l'animal essayé une première fois et celui-ci se chargeait de me fournir, en quelques instants, la confirmation ou la correction demandée.

L'analyse de photographies superposées devant se faire après coup, je n'oserais assurer que leur étude fournisse, dans tous les cas, des résultats exempts d'indécision [1].

§ VI.

Dissection des muscles respiratoires.

La technique est ici tellement simple qu'il suffira de quelques mots d'indication. L'insecte est plongé dans l'alcool pur du commerce et y séjourne vingt-quatre heures, trois ou quatre jours, ou plus, suivant la taille. A l'aide de ciseaux on fend ensuite les téguments de l'abdomen suivant les lignes médianes tergale et sternale, puis d'un coup de scalpel on divise aussi le thorax et la tête suivant un plan longitudinal-vertical.

L'animal est ainsi partagé en deux moitiés symétriques que l'on fixe sous l'eau et que l'on dissèque à la manière ordinaire, sous la loupe de Brücke.

La dissection de la moitié droite, par exemple, permet de rectifier les erreurs commises en disséquant la moitié gauche.

[1] Dans le cours de mes recherches, j'ai dessiné cent trente-sept silhouettes de mouvements respiratoires; je n'en publie que vingt afin d'éviter la multiplicité des planches.

Digitized by Google

§ VII.

Procédés employés dans les expériences sur le système nerveux.

E. Faivre, dans ses recherches sur l'influence du système nerveux sur la respiration des Dytiques, a eu recours, dans certains cas, à de véritables dissections chez l'animal vivant. C'est ainsi que pour atteindre les ganglions abdominaux, il fixait l'insecte sur une plaque de liège, lui enlevait le tergum du méso- et du métathorax, écartant et coupant l'æsophage, et qu'il finissait par mettre à nu la masse allongée des ganglions de l'abdomen [1].

On comprend combien il est nécessaire d'éviter ces mutilations graves. On y arrive en imitant le procédé que V. Lemoine a imaginé jadis pour l'excitation des diverses parties du système nerveux de l'Écrevisse, et qui consiste à déterminer, une fois pour toutes, les rapports de position existant entre les ganglions ou les groupes ganglionnaires et des points de repère invariables situés à la surface du squelette tégumentaire [2].

Il est naturellement indispensable de sacrifier un des individus sur lesquels porteront les recherches. Celui-ci est plongé dans l'alcool pur plusieurs fois renouvelé, ou même dans l'alcool absolu, jusqu'à ce qu'il soit convenablement durci. On le divise ensuite, au rasoir, en deux moitiés longitudinales, mais en prenant la précaution de faire passer la section en dehors du plan exactement médian, à 1 ou 2 millimètres, par exemple, à droite ou à gauche de ce plan.

L'une des moitiés renferme ainsi la chaîne nerveuse ganglionnaire en place et rien n'est alors plus aisé que de déterminer quels sont les points exacts de la face ventrale et de la face dorsale du corps par lesquels il faudra faire passer soit une aiguille, pour rencontrer à coup sûr un ganglion ou un groupe de ganglions donnés, soit la pointe d'un petit scalpel ou les branches d'une paire de ciseaux fins pour couper la chaîne en un endroit voulu.

1 Faivre. *De l'influence du système nerveux sur la respiration des Dytiques* (Ann. des sc. nat. zoolog., 4e sér., t. XIII, p. 326, 1860).

2 Lemoine. *Recherches pour servir à l'histoire des systèmes nerveux, musculaire et glandulaire de l'écrevisse;* thèse. Paris, 1868. (Reproduit dans les Ann. des sc. nat., 5e sér., t. IX, 1868.)

Digitized by Google

CHAPITRE III.

TYPES RESPIRATOIRES.

§ VIII.

Considérations préliminaires.

Sauf dans des cas rares, le mécanisme respiratoire des insectes est localisé exclusivement dans l'abdomen; ce qui a fait dire à V. Graber, par exemple, que ces arthropodes avaient la poitrine à la partie postérieure du corps [1]. On peut ajouter que chez les quelques formes où les segments thoraciques offrent des mouvements rhythmiques, ceux-ci ne sont qu'une conséquence des mouvements abdominaux et ont lieu, en somme, par entraînement, sous l'influence d'actions musculaires ou autres abdominales.

Il est donc utile, dans le but de faire bien saisir la nature des mouvements respiratoires qui seront décrits plus loin, de rappeler brièvement la constitution des anneaux ou somites de l'abdomen. Comme il règne de plus une certaine confusion dans les termes; comme certains entomologistes, méconnaissant ce que nous enseignent l'embryologie et l'étude comparative des Crustacés et des Myriapodes, oublient qu'il n'existe, entre les somites abdominaux et les somites thoraciques, d'autres différences que celles qui résultent des dimensions exagérées de certaines parties et s'obstinent à n'appliquer qu'au thorax seul des dénominations qui conviennent à tous les segments du corps; on me permettra d'indiquer, en même temps, la valeur exacte des noms dont je me servirai dans le cours du travail actuel.

La face dorsale du corps entier est la *face tergale;* la face inférieure est la *face sternale*.

[1] V. Graber. *Die Insekten*, 1. Th., p. 107, München, 1867.

Digitized by Google

L'abdomen est divisé en segments annulaires ou *somites,* caractérisés par un dépôt de chitine considérable et reliés entre eux par des zones annulaires aussi à dépôt chitineux faible. On peut désigner ces zones où la peau est naturellement flexible sous le nom de *zones membraneuses annulaires.*

Dans un grand nombre de cas, le bord postérieur de chaque somite recouvre quelque peu le somite suivant; la zone membraneuse annulaire est alors repliée de façon à former un pli rentrant analogue aux plis du cuir d'un soufflet. Grâce à cette disposition, les somites *peuvent* se déplacer les uns par rapport aux autres dans le sens de l'axe du corps, rentrant et sortant comme les tubes d'une lunette. Il n'est pas un naturaliste qui n'ait observé des déplacements de ce genre dans l'abdomen des Hyménoptères.

Tout somite se décompose, à son tour, en deux arceaux, un supérieur, *arceau tergal* (ou tergite), un inférieur, *arceau sternal* (ou sternite), réunis l'un à l'autre *par une zone membraneuse latérale,* dans laquelle se trouvent en général, mais non toujours, percés les stigmates [1].

La zone membraneuse latérale est tantôt à découvert, comme chez les Névroptères vrais, les Lépidoptères, les Coléoptères (privés de leurs élytres), tantôt cachée sous les bords des arceaux tergaux.

Chez beaucoup de formes, les bords latéraux de l'un des deux arceaux, le tergal ou le sternal, dépassent ceux de l'autre. Ainsi, chez les Acridiens, les Hyménoptères porte-aiguillon, les arceaux tergaux de l'abdomen recouvrent en partie les arceaux sternaux correspondants [2]. Une disposition inverse s'observe en général chez les Coléoptères, les bords des arceaux sternaux s'élevant plus haut que ceux des arceaux supérieurs. Lorsque l'une ou l'autre de ces dispositions existe, la zone membraneuse latérale unissant l'arceau tergal au sternal, forme un pli rentrant.

L'arceau tergal et l'arceau sternal sont donc susceptibles de s'éloigner ou

[1] On sait que chacun des arceaux d'un même somite est constitué, en réalité, par quatre pièces tégumentaires : deux sternales proprement dites et deux épisternales pour l'arceau inférieur; deux tergales proprement dites et deux épimériennes pour l'arceau supérieur.

[2] Les parties latérales des arceaux sternaux offrent, dans ce cas, des prolongements assez considérables auxquels s'insèrent des muscles. Donnant une signification plus générale à un terme introduit par Audonin, j'appelle *apodème* toute saillie quelconque du squelette servant à des insertions musculaires.

Digitized by Google

de se rapprocher verticalement; soit que tous deux effectuent ces mouvements, soit que l'un d'entre eux reste fixe et que l'autre seul se déplace.

Il est à remarquer que la présence de la zone membraneuse latérale a généralement pour effet, lors du rapprochement vertical des arceaux tergaux et sternaux, de déterminer une légère incurvation en dedans des bords des arceaux de l'une des deux catégories au moins, d'où une diminution du diamètre transversal de l'abdomen.

Il résulte des dispositions anatomiques bien connues que je viens de rappeler que les mouvements respiratoires *possibles,* chez les insectes, consistent ou bien en rapprochements et éloignements alternatifs des somites, c'est-à-dire en raccourcissements et allongements de l'axe longitudinal du corps; ou bien en rapprochements et éloignements alternatifs aussi des arceaux tergaux et sternaux, ce qui revient à des diminutions et à des accroissements des diamètres vertical et transversal; ou bien enfin, en des combinaisons de ces deux genres de mouvements [1].

§ IX.

Les trois types respiratoires principaux et leurs subdivisions.

La plupart des physiologistes qui se sont occupés de la respiration des insectes ont étudié trop peu de formes pour concevoir nettement l'existence

[1] Les stigmates présentent des dispositions anatomiques permettant aux insectes de les fermer ou de les maintenir ouverts. Le travail intéressant de O. Krancher (*Bau der Stigmen bei der Insekten*, Zeitschr. f. wiss. zool., Bd. XXXV, 1881) est, je pense, le dernier qui ait été publié sur ce sujet; on y trouve une bibliographie assez complète de la question.

La connaissance du mécanisme respiratoire des insectes ne sera complète que lorsque nous saurons exactement comment les stigmates se comportent *pendant la respiration normale.* Huxley (*Anatomy of invertebrated animals,* p. 437) résume bien, à cet égard, l'opinion généralement admise. « Lorsque, dit-il, la cavité abdominale se dilate, l'air y pénètre par » les stigmates et lorsque les parois de l'abdomen se contractent, les *stigmates étant ouverts,* » l'expiration a lieu; mais si les orifices stigmatiques sont fermés, la contraction abdomi- » nale détermine la pénétration du gaz dans les parties profondes du système trachéen. »

Il n'y a là qu'une hypothèse très plausible, les observations ou les expériences qui ont été faites jusqu'à présent étant insuffisantes.

Comme je n'ai point trouvé de procédé d'investigation convenable, j'ai laissé de côté l'étude des phénomènes, rhythmiques ou non, que peuvent nous offrir les orifices respiratoires; j'en ferai peut-être plus tard l'objet de recherches spéciales.

Digitized by Google

de types respiratoires différents et, à plus forte raison, pour tenter de grouper les insectes suivant ces types.

Rathke[1], qui, après l'examen minutieux auquel il s'était livré, avait entre les mains les matériaux nécessaires, a cependant négligé d'établir un classement satisfaisant dans ses résultats. Plus tard, Gerstaecker [2], utilisant les données fournies par Rathke, est arrivé à admettre les quatre types respiratoires suivants :

1° *Hyménoptères.*

L'abdomen se raccourcit et s'allonge alternativement.

2° *Coléoptères.*

Les arceaux sternaux restent à peu près immobiles; les arceaux tergaux s'abaissent et s'élèvent.

3° *Odonates et Acridiens.*

Les arceaux tergaux bougent peu, les arceaux sternaux montent et descendent.

4° *Lépidoptères.*

Les arceaux tergaux et sternaux se déplacent, s'éloignant et se rapprochant alternativement.

Cette classification tend à consacrer une erreur en ce sens qu'elle suppose les Hyménoptères des insectes trop exceptionnels. Non seulement les Hyménoptères ne sont point les seuls dont l'abdomen change de longueur d'une manière rhythmique, mais de plus, *comme tous les insectes*, ils offrent des mouvements respiratoires consistant en éloignements et rapprochements alternatifs des arceaux tergaux et sternaux.

[1] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über den Athmungs prozess der Insekten.* Op. cit.

[2] *Arthropoda*, dans BRONN'S KLASSEN UND ORDNUNGEN DES THIER-REICHS. 5ter Bd., 3 lief., p. 131.

Digitized by Google

Mes recherches m'ayant montré, en effet, que chez tous les insectes la phase expiratoire est caractérisée par un rapprochement des éléments inférieurs et supérieurs de l'abdomen, sous l'influence de muscles à direction plus ou moins verticale, il m'est impossible d'accepter le groupement proposé par Gerstaecker.

Une étude comparative des détails me fait admettre *trois* types respiratoires seulement, chaque type comportant des subdivisions d'une valeur secondaire.

L'ordre dans lequel ces types sont décrits n'est pas celui qu'indique une méthode rigoureusement scientifique. Au lieu de débuter par le type le plus simple, je mets, au contraire, en tête, un type assez complexe, celui auquel appartiennent les Coléoptères.

J'ai été conduit à en agir ainsi par la nécessité d'exposer d'abord les observations que j'ai faites sur le groupe d'insectes le plus favorable à l'expérimentation. Le lecteur restera libre d'intervertir l'ordre des types respiratoires comme il l'entendra.

Des figures représentant des coupes transversales d'abdomens, dans les deux phases inspiratoire et expiratoire, rendront, je l'espère, le résumé ci-dessous parfaitement clair. La position des pièces tégumentaires en inspiration est indiquée par un trait plein, la position des mêmes pièces en expiration est figurée par un trait pointillé, des flèches montrent le sens du mouvement expiratoire.

Premier type. — Les arceaux sternaux, ordinairement solides et fort convexes, bougent peu. Les arceaux tergaux sont très mobiles; ils s'élèvent et s'abaissent alternativement d'une quantité notable.

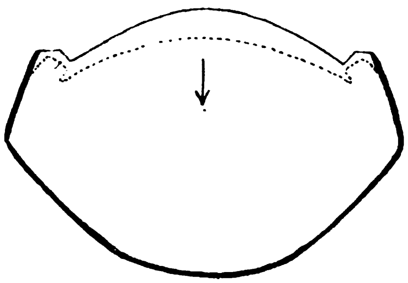


Fig. 4. — Coupe de l'abdomen d'un Coléoptère scarabéien.

A. Tous les Coléoptères.
B. Les Hémiptères hétéroptères.
C. Les Orthoptères blattiens.

Deuxième type. — Les arceaux tergaux très développés chevauchent latéralement sur les arceaux sternaux et cachent généralement la zone membraneuse latérale, qui fait un pli rentrant.

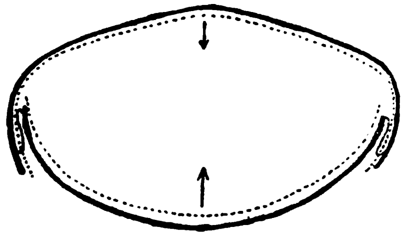


Fig. 5. — Coupe de l'abdomen d'une Hyménoptère du genre *Bombus*.

Les arceaux tergaux et sternaux se rapprochent et s'éloignent alternativement. Les arceaux sternaux sont presque toujours les plus mobiles.

A. Les Odonates.
B. Les Diptères.
C. Les Hyménoptères porte-aiguillon.
D. Les Orthoptères (Forficuliens?) et Acridiens.

Troisième type. — La zone membraneuse latérale unissant les arceaux tergaux et sternaux est à nu sur les flancs et très développée.

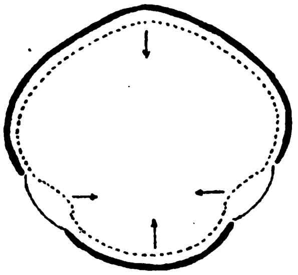


Fig. 6. — Coupe de l'abdomen d'un Lépidoptère sphingien.

Les arceaux tergaux et sternaux se rapprochent et s'éloignent alternativement tandis que la zone molle latérale est déprimée ou reprend sa forme première.

A. Orthoptères locustiens.
B. Lépidoptères.
C. Névroptères propres (moins les Phryganiens).

SUBDIVISIONS DU PREMIER TYPE.

A. Coléoptères.

a. En expiration, l'arceau tergal devient plus plat; sa région médiane s'abaissant généralement plus que ses bords.

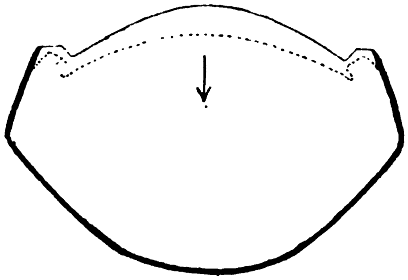
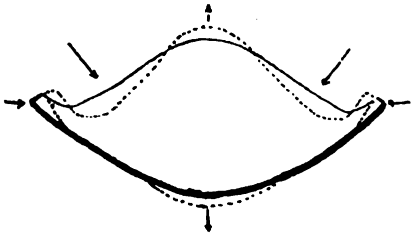


Fig. 4. — Répétition de la figure 4 (forme-type chez les Coléoptères).

Hydrophilus, Hydrochares, Dytiscus, Colymbetes, Cicindela, Oryctes, Melolontha, Trichius, Donacia, Corymbites, Chlorophanus, etc. (fig. 4).

Digitized by Google

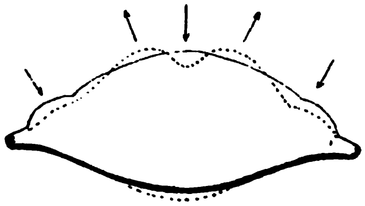
b. En expiration, les régions latérales de l'arceau tergal se creusent; la partie médiane, formant un pli saillant, s'élève et amène une augmentation du diamètre vertical de l'abdomen.



Telephorus (fig. 7).

Fig. 7. — Coupe de l'abdomen d'un Coléoptère du genre *Telephorus*.

c. En expiration, les régions latérales de l'arceau tergal se creusent; la partie médiane se soulève et il y apparaît un sillon longitudinal (fig. 8).

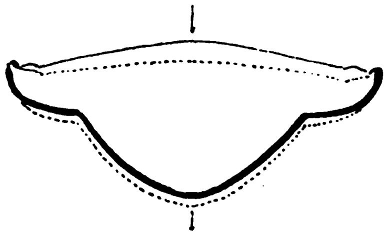


Clytus, *Coccinella*.

Fig. 8. — Coupe de l'abdomen de la *Coccinella septem punctata*.

B. **Hémiptères hétéroptères.**

En expiration, l'arceau tergal devient plus plat en s'abaissant; l'arceau sternal s'élève ordinairement d'une petite quantité (excepté chez les Nèpes) (fig. 9).

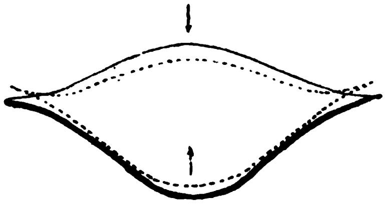


Nepa, *Pyrrhocoris*.

Fig. 9. — Coupe de l'abdomen de la *Nepa cinerea*.

C. **Orthoptères blattiens.**

Les mouvements respiratoires sont à peu près identiques à ceux qui s'observent chez les Hémiptères hétéroptères (fig. 10).



Periplaneta.

Fig. 10. — Coupe de l'abdomen de la Blatte (*Periplaneta orientalis*).

Digitized by Google

SUBDIVISIONS DU DEUXIÈME TYPE.

A. Odonates.

En expiration, les plaques sternales proprement dites, très étroites, s'élèvent notablement, les flancs rentrent et la crête dorsale s'accuse.

La longueur de l'abdomen reste invariable.

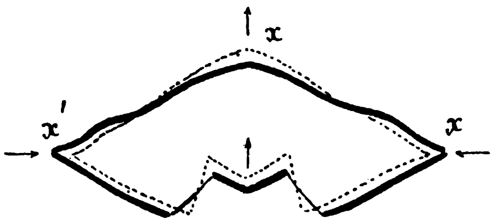


Fig. 11. — Coupe de l'abdomen de la *Libellula quadrimaculata.*

Libellula (fig. 11), *Æschna, Agrion.*

B. Diptères.

En expiration, les plaques sternales proprement dites, de largeur variable, s'élèvent; les flancs rentrent.

La longueur de l'abdomen change chez quelques formes.

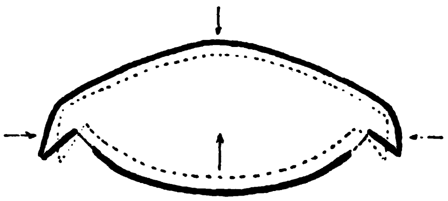


Fig. 12. — Coupe de l'abdomen de l'*Eristalis tenax.*

Calliphora, Lucilia (fig. 13), *Eristalis* (fig. 12), *Tabanus, Asilus, Tipula,* etc.

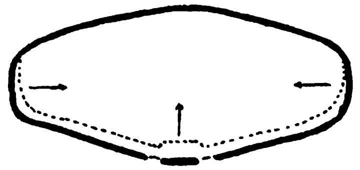


Fig. 13. — Coupe de l'abdomen de la *Lucilia cæsar.*

Appendice aux Diptères.

Hyménoptères chrysidiens, Chrysis ignita.

C. Hyménoptères porte-aiguillon.

Les arceaux sternaux sont prolongés vers le haut par des apodèmes très développés. En expiration, les arceaux sternaux s'élèvent; les arceaux tergaux s'abaissent et l'abdomen se raccourcit d'une façon notable et constante (*voyez* fig. 5).

Vespa, Apis, Bombus, Anthophora, etc.

Appendice aux Hyménoptères porte-aiguillon.

Névroptères phryganiens (*Phryganea*).

Digitized by Google

D. **Orthoptères (forficuliens?) et acridiens.**

Les arceaux sternaux se prolongent vers le haut, sous les parties latérales des arceaux tergaux, par de grands apodèmes ascendants. En expiration, les arceaux sternaux s'élèvent; les arceaux tergaux descendent un peu et les flancs rentrent faiblement (fig. 14). La longueur de l'abdomen ne change guère.

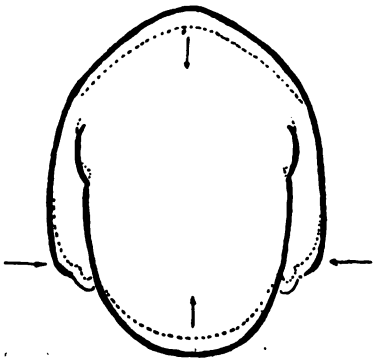


Fig. 14. — Coupe de l'abdomen du *Stetheophyma grossum.*

(*Forficula?*), *Stetheophyma*, *Stenobothrus.*

SUBDIVISIONS DU TROISIÈME TYPE.

Il n'y a pas lieu d'établir ici de subdivisions d'après les formes des mouvements respiratoires, qui sont sensiblement les mêmes pour tous les insectes appartenant à ce groupe. Je me bornerai donc à mettre les animaux que j'ai étudiés dans l'ordre artificiel suivant :

A. *Orthoptères locustiens.*
B. *Lépidoptères.*
C. *Névroptères propres* (moins les *Phryganiens*).

La classification ci-dessus n'est qu'un moyen de grouper les faits que j'ai observés moi-même; il est évident que l'étude des mouvements respiratoires d'une foule d'insectes exotiques que je n'ai pu manier à l'état vivant y amènerait des modifications profondes. Le lecteur voudra bien ne voir dans ce groupement qu'un premier essai dont l'auteur comprend toute l'imperfection.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU PREMIER TYPE.

A. **Coléoptères.**

§ X.

Hydrophilus piceus.

L'Hydrophile brun, l'un de nos grands Coléoptères indigènes, était tout naturellement désigné, par sa taille, pour des études sur les mouvements respiratoires.

Depuis Nitzsch [1] qui découvrit la façon curieuse dont cet insecte vient puiser de l'air à la surface de l'eau, on a fréquemment répété et décrit la même observation, mais bien peu de physiologistes se sont occupés du mécanisme à l'aide duquel l'Hydrophile expulse l'air chargé d'acide carbonique, ou fait pénétrer dans son système trachéen une partie de l'air pur qu'il emporte avec lui.

Un ancien auteur, Frisch [2], a vu les mouvements respiratoires abdominaux chez un Hydrophile dont il avait enlevé les élytres, et Nitzsch [3], déjà cité, a cru constater des mouvements d'allongement et de raccourcissement alternatifs dans l'abdomen du même insecte lorsqu'il renouvelle sa provision d'air; mais l'un et l'autre se servent de termes si vagues que la question reste entière.

J'ai fait sur cette forme un grand nombre d'expériences et d'observations variées dont je grouperai les résultats suivant les méthodes employées.

[1] Nitzsch. *Ueber das Athmen der Hydrophilen* (Archiv. für die Physiologie de Reil et Autenrieth, Bd. 10. Halle, 1811).

[2] Frisch. *Beschreibung von allerley Insekten in Teutschland*, Th. 2, p. 30. Berlin, 1721. (Cité par Nitzsch.)

[3] Nitzsch. *Op. cit.*, p. 454.

Digitized by Google

§ XI.

Étude des mouvements respiratoires de l'Hydrophile par la méthode graphique.

L'insecte est fixé sur le support qui porte l'axe du levier, par quatre épingles fines, deux d'entre elles traversent les rebords latéraux du prothorax, les deux autres sont implantées dans les bords du tiers antérieur des élytres et ne touchent, par conséquent, pas l'abdomen.

Vu les puissants efforts que l'animal peut faire à l'aide de ses pattes, on coupe celles-ci à ras des trochanters (voir plus haut § IV, page 16).

La première catégorie de mouvements à analyser est évidemment celle des déplacements de haut en bas de la face tergale de l'abdomen ; il résulte, en effet, des observations *directes* de Faivre, de Rathke, de Graber et de plusieurs autres, que, chez les Coléoptères considérés d'une façon générale, les mouvements respiratoires peuvent se résumer comme suit : les somites abdominaux bougent peu les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire suivant l'axe du corps, mais, dans chaque somite, l'arceau sternal restant relativement immobile, l'arceau tergal s'élève et s'abaisse alternativement, l'élévation répondant à l'inspiration, l'abaissement à l'expiration.

J'ai étudié graphiquement ce genre de mouvements respiratoires chez l'Hydrophile, en employant successivement les deux procédés du levier transversal et du style inscrivant porté par l'insecte lui-même, décrits au § IV, pages 13 et 15.

Levier transversal. — Une fenêtre est pratiquée dans les élytres de façon à mettre à nu la région médiane du premier et du second arceau tergal ; le talon du levier repose sur la limite entre ces deux arceaux.

Le premier tracé *A* indique des mouvements respiratoires rapides, environ trente par minute.

← Sens de la rotation du cylindre.

L'animal est, en effet, sous l'influence de l'excitation produite par les manipulations qui ont précédé l'expérience.

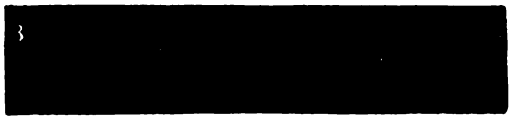
La portion ascensionnelle de la courbe représente l'inspiration ; sa forme montre une diminution assez

Digitized by Google

grande de vitesse à la fin de la dilatation abdominale; la portion descendante de la courbe, répondant à l'expiration, débute d'une façon brusque.

On remarquera que chez l'insecte excité, il n'y a de pause ni en inspiration, ni en expiration.

Quelques minutes plus tard, l'Hydrophile, beaucoup plus calme, respire plus lentement, vingt-trois fois par minute, et fournit le graphique *B* où nous retrouvons encore une fois la chute brusque, presque verticale, du levier durant l'expiration, mais où nous constatons une pause bien nette en inspiration. Il suffit, du reste, de regarder la face dorsale du Coléoptère pour constater directement cette pause inspiratoire qui ne fera que s'accentuer, jusqu'à une certaine limite, lorsque l'animal fatigué respirera avec une lenteur encore plus grande.



← Sens de la rotation du cylindre.

Le graphique *C*, pris une demi-heure après le précédent, montre, en effet, outre un grand ralentissement, l'Hydrophile ne respirant plus que dix fois par minute, un allongement considérable de la pause en inspiration.

← Sens de la rotation du cylindre.

Mes observations sur d'autres individus tendent à prouver que si l'insecte s'épuise encore davantage, la pause inspiratoire ne s'allonge plus guère. La modification intéresse alors l'amplitude de la courbe, qui devient très peu élevée au-dessus de l'horizontale.

Style longitudinal porté par l'animal même (voyez figure 3). — Le premier arceau tergal abdominal de notre Coléoptère, étant articulé avec le bord postérieur du métathorax à peu près immobile, ne peut participer que partiellement aux mouvements d'élévation et d'abaissement de l'ensemble de la face dorsale de l'abdomen; il en résulte qu'il exécute des mouvements de bascule; s'inclinant en arrière en expiration, reprenant une position horizontale ou s'inclinant même un peu en avant en inspiration.

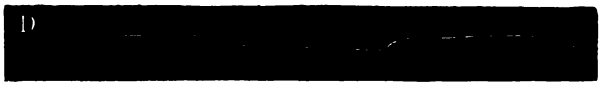
Ces mouvements spéciaux, que la méthode des projections permet d'ana-

Digitized by Google

lyser beaucoup mieux et dans tous leurs détails (fig. 57, pl. I), peuvent être mis en évidence par l'emploi d'un style longitudinal équilibré dont la petite plaque inférieure est collée au baume du Canada sur le premier arceau tergal et empiète un peu sur le deuxième.

La pointe du style inscrivant s'étend en avant de la tête de l'insecte, comme le montre la figure 3. La plaque inférieure suivant les mouvements du premier arceau tergal, la pointe du style se relève lorsque cet arceau s'incline en arrière. *La portion ascendante de la courbe tracée répond donc cette fois à l'expiration.*

Le graphique *D*, ainsi obtenu, n'offre pas grand intérêt; mais il montre une fois de plus la brusquerie avec laquelle débute le mouvement expiratoire. Quant aux pauses qu'il semble indiquer, je n'oserais rien en déduire, le style étant un peu lourd pour l'animal.



← Sens de la rotation du cylindre.

Les résultats des diverses expériences qui précèdent tendent donc à nous faire admettre que, chez l'Hydrophile, l'inspiration se fait plus lentement que l'expiration; qu'il existe, chez cet insecte, une pause inspiratoire marquée; enfin, que l'expiration est un mouvement relativement brusque. L'étude des autres Coléoptères nous permettra de constater si ces faits offrent un caractère général.

Les expériences ci-dessus ont un résultat d'une autre nature; elles nous montrent combien le rhythme respiratoire d'un même individu varie d'un instant à l'autre et nous prouvent qu'il est parfaitement inutile de vouloir appliquer la méthode graphique à des recherches sur le nombre des mouvements respiratoires des insectes en un temps donné. D'autres essais, et spécialement ceux que j'ai faits sur le Dytique, convaincront le lecteur à cet égard.

Je viens d'exposer comment j'ai étudié graphiquement les mouvements de la face tergale d'un des somites de l'abdomen de l'Hydrophile. On comprend que cette façon de procéder est insuffisante. Tous les somites offrent-ils le même phénomène? et, s'il en est ainsi, l'inspiration ou l'expiration ont-elles lieu pour tous en même temps?

La question offre un certain intérêt, car Rathke et Graber admettent que

Digitized by Google

les mouvements respiratoires des insectes se propagent souvent de somite à somite à la façon d'une onde : « A chaque respiration, dit Rathke, à propos » des Coléoptères, la face dorsale des premiers anneaux s'élève ou s'abaisse » d'abord, puis le mouvement se répète ensuite dans les derniers anneaux » de l'abdomen. Il est plus rare que le mouvement débute au milieu et » progresse de là en avant et en arrière [1]. »

Si l'on enlève complètement les élytres et les ailes de l'Hydrophile et si l'on examine directement la face dorsale de l'abdomen, on voit, pendant l'inspiration, le profil général et longitudinal de cette face devenir convexe, le point culminant étant à la limite des arceaux supérieurs 1 et et 2. En ce moment, les somites 1, 2, 3 sont éloignés les uns des autres autant que possible, les zones membraneuses qui les unissent sont à nu, l'extrémité postérieure de l'abdomen est un peu abaissée.

Survient l'expiration; le profil général de la face dorsale de l'abdomen devient concave, l'ensemble des somites 1 et 2 forme un plan oblique descendant en arrière, ces somites et le troisième chevauchent actuellement les uns sur les autres, enfin, la pointe de l'abdomen se relève vers le haut d'une façon manifeste.

L'impression première est celle d'un mouvement vermiculaire, surtout en expiration, et l'on comprend fort bien comment Rathke et Graber ont pu voir, chez les insectes, une onde se propageant de la base de l'abdomen vers son extrémité. Je ne détaillerai pas les expériences que j'ai faites à l'aide de leviers multiples reposant en différents points du corps de l'Hydrophile, dans le but de m'assurer s'il existe, oui ou non, une onde véritable, parce qu'elles ne m'ont donné que des résultats de beaucoup inférieurs à ceux que j'ai obtenus à l'aide de la méthode des projections. Il suffira de dire, pour éviter à ceux qui voudraient répéter des essais analogues, les erreurs d'interprétation commises à mes débuts, que si l'on fait reposer à la fois deux leviers, l'un sur la limite entre les arceaux dorsaux 1 et 2, comptés à partir du thorax, l'autre sur la limite entre les arceaux

[1] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über den Athmungsprozess der Insekten.* Op. cit., p. 102.

Digitized by Google

3 et 4, ces deux leviers marchent en sens contraire et tracent deux courbes inverses; le premier levier s'abaissant lorsque l'autre s'élève, etc. D'où j'avais déduit, un peu naïvement, que la base de l'abdomen est, effectivement, en expiration lorsque la seconde moitié est en inspiration et vice versâ.

A cette époque l'onde abdominale me paraissait démontrée.

Mais tout s'explique si l'on remarque qu'il n'y a pas seulement des mouvements dans la face tergale des anneaux, que *la totalité de la seconde moitié de l'abdomen* (sa face sternale comme sa face tergale) se relève en bloc à chaque expiration et s'abaisse dans chaque mouvement inspiratoire. Le levier antérieur n'obéit qu'aux déplacements réels de la face tergale des somites de la base de l'abdomen, tandis que le levier postérieur est au contraire mis en mouvement par les oscillations de l'extrémité du corps.

Veut-on une preuve directe de ce fait? il suffit de mettre *sous* les anneaux abdominaux 3 et 4 un levier *B* (fig. 15) à bras inégaux dont le bras le plus long soit maintenu en contact avec la *face sternale* de l'abdomen par l'action d'un léger contre-poids *C*[1] fixé au bras le plus court. Le levier ordinaire *A* repose, comme dans l'expérience précédente, sur la limite entre les faces tergales des somites 1 et 2.

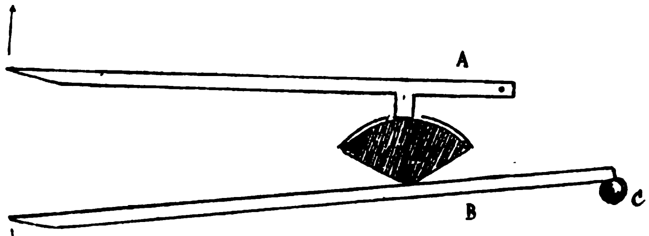


Fig. 15.

Dans ces circonstances, on voit les deux leviers marcher en sens inverse et présenter exactement le même antagonisme dans leurs mouvements que si le levier *B* ou postérieur reposait *sur* les somites 3 et 4 au lieu d'être en rapport avec leur face inférieure.

J'ai fait cette expérience dans les meilleures conditions pour que l'insecte présentât des mouvements respiratoires normaux, c'est-à-dire que l'abdomen était resté recouvert par les élytres et que le contact du levier dorsal *A* n'avait lieu qu'au travers d'une fenêtre percée dans ces étuis. Elle nous montre que, chez l'Hydrophile au moins, l'onde que l'on croit voir, par

1 Une boulette de cire.

Digitized by Google

l'observation directe, à la surface de l'abdomen, n'est qu'une illusion résultant de ce que l'œil ne peut suivre convenablement deux mouvements combinés, celui de l'affaissement, par exemple, de la face tergale des somites et le mouvement oscillatoire de la deuxième portion de l'abdomen. Je reviendrai, du reste, sur ce sujet, à propos des expériences par projection.

Enfin, j'ai cherché, à l'aide de différents systèmes de leviers, à constater si, pendant les mouvements respiratoires de l'Hydrophile, l'abdomen de l'animal s'allonge et se raccourcit successivement d'une manière appréciable. Question intéressante dont la solution permet de classer définitivement le type respiratoire des Coléoptères. L'observation directe et des procédés dont j'ai reconnu les défauts depuis m'ont encore une fois induit en erreur. J'ai cru un instant et ceux qui observent superficiellement s'imagineront aussi que l'abdomen de notre insecte s'allonge en inspiration et se raccourcit notablement en expiration. C'est là une nouvelle illusion contre laquelle je prémunis le lecteur et que la méthode des projections fait disparaître.

§ XII.

Étude des mouvements respiratoires de l'Hydrophile par la méthode des projections.

L'Hydrophile privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes est fixé, sur la lamelle de liège à glisser dans l'instrument, par deux épingles fines traversant les bords latéraux du prothorax. De petits styles de papier sont collés au baume sur les faces tergales des somites abdominaux 1, 2, 3, 4, 5 et sur la face tergale de la pointe de l'abdomen. L'image est nette avec un grossissement d'environ six diamètres; de sorte qu'il est facile de constater de petits mouvements qui, chez l'animal, n'auraient que $^1/_6$ de millimètre d'amplitude.

1re *Expérience.* — Afin de me mettre d'abord à l'abri des erreurs d'interprétation amenées par les mouvements généraux de l'abdomen et pour pouvoir analyser les mouvements respiratoires verticaux seuls, je fixe, par une épingle fine *E*, l'extrémité de l'abdomen (fig. 57, pl. I). On verra, plus bas, que cette disposition n'altère en rien les résultats.

Digitized by Google

Dans la description, je supposerai que l'insecte était en inspiration. Le contour de la silhouette de la face dorsale de l'abdomen offre alors l'aspect d'une ligne convexe vers le haut dont le point culminant répond à la limite des somites 1 et 2.

Pendant l'expiration, *toutes* les pièces en mouvement se déplacent *à la fois.* Il n'y a pas de mouvement progressif d'un somite à l'autre, *pas d'onde.* J'insiste sur ce fait en raison de son importance propre et aussi parce que les descriptions m'obligeant à citer successivement les phénomènes spéciaux à chacun des somites principaux, je désire que le lecteur ne déduise pas, de la forme de la rédaction, une progression qui fait absolument défaut.

Durant l'expiration, le métathorax ne reste pas tout à fait immobile; il s'abaisse un peu, entrainant légèrement le mésothorax dans ce mouvement; la face tergale du somite 1 s'incline fortement en arrière; celle des somites 2, 3, 4, 5 s'abaisse à peu près verticalement, le maximum d'effet ayant lieu à la hauteur du deuxième anneau. Le contour de la silhouette de la face tergale de l'abdomen est alors une courbe concave; un léger déplacement de la base des styles indique que les somites chevauchent actuellement les uns sur les autres.

Pendant ce temps, l'épine inférieure du métathorax est un peu déplacée vers le haut; il en est de même des faces sternales des somites 3, 4, 5, qui offrent, en outre, un léger mouvement d'arrière en avant.

La diminution du diamètre vertical de l'abdomen mesurée à la hauteur du deuxième somite varie, suivant les individus, de $^1/_7$ à $^1/_9$. Les mouvements expiratoires sont donc très profonds. (Voyez le tableau II du § XCII.)

2° *Expérience.* — L'insecte porte les mêmes styles, mais l'extrémité postérieure de l'abdomen est libre [1].

Les mouvements respiratoires affectent exactement les mêmes allures. Cependant, la seconde moitié de l'abdomen oscille maintenant dans le sens vertical, sa pointe se relevant en expiration, tandis que la face tergale se creuse. Ces déplacements rendent l'exécution des dessins très laborieuse; la

[1] Afin de ne point surcharger les planches, je n'ai pas reproduit la silhouette répondant à cette expérience. Il en est malheureusement de même dans un grand nombre d'autres cas.

Digitized by Google

précaution que j'avais prise de faire des expériences préalables sur des individus dont l'extrémité de l'abdomen était fixée, m'a seule permis d'interpréter nettement ce qui se passait sur l'écran.

En suivant de la pointe du crayon l'ombre de l'extrémité de l'abdomen, on constate que cette extrémité décrit un petit arc d'un grand cercle dont le centre serait au milieu de l'orifice postérieur du métathorax. Il en résulte que l'abdomen de l'Hydrophile n'offre ni allongements ni raccourcissements pendant les mouvements respiratoires. L'illusion de l'observateur qui, regardant directement le Coléoptère, croit voir le corps de celui-ci s'allonger en inspiration, est évidemment due à l'arc de cercle que l'extrémité de l'abdomen décrit dans l'espace.

3e *Expérience.* — Les images décrites ci-dessus ne nous ont appris que ce que l'on peut observer dans une section verticale longitudinale de l'Hydrophile; il restait à étudier les détails que présente une coupe transversale.

A cet effet, l'insecte est placé dans l'instrument de façon que sa tête regarde la flamme de la lampe et que l'extrémité de son abdomen soit tournée vers les lentilles.

Le deuxième somite abdominal, celui de tous, comme nous l'ont appris les essais précédents, qui offre les mouvements les plus accentués, a été garni d'avance d'une série de petits styles collés au baume et disposés de la manière suivante : un style sur le milieu de la face tergale, un style sur la moitié gauche de cette face, un style sur la zone molle membraneuse portant les stigmates et, enfin, deux styles sur les régions épimériennes.

En déplaçant l'insecte dans l'instrument et en modifiant la position des lentilles, on obtient aisément une silhouette nette de l'anneau abdominal en question, qui se présente par conséquent sur l'écran comme s'il était vu en coupe [1].

Voici ce que l'on constate dans ce cas : à chaque expiration, toute la face tergale du somite s'abaisse à la fois; les déplacements latéraux des styles qui peuvent nous renseigner à cet égard étant insignifiants, il n'y a évidemment point de changements de courbure un peu notables.

[1] La figure 59, planche II, concernant l'*Oryctes nasicornis* donne une bonne idée des silhouettes de ce genre. Les faits observés chez l'Hydrophile sont un peu différents; il importe de ne pas l'oublier.

Digitized by Google

La zone molle latérale qui porte les stigmates se déprime aussi directement et verticalement; l'obliquité de son style ne change pas.

Les épimères, entraînés par les mouvements de la membrane qui les relie aux pièces tergales, s'inclinent manifestement en dedans, pour se relever plus tard en inspiration. Tous ces mouvements sont simultanés.

Les parties latérales inférieures des somites restent immobiles. Elles ne peuvent bouger, vu leur union intime avec le métathorax.

Résumé. — Les résultats obtenus permettent de résumer nettement la série de mouvements que présente un Hydrophile qui respire.

FAITS GÉNÉRAUX.

1° La face tergale du métathorax participe légèrement aux mouvements respiratoires de l'abdomen (détail que nous retrouverons chez d'autres Coléoptères et que Rathke avait signalé antérieurement chez les Carabes et les Staphylins).

2° Les mouvements respiratoires ont lieu dans tous les somites abdominaux à la fois; il n'y a pas d'onde appréciable.

3° La dilatation de l'abdomen en inspiration est plus lente que la contraction expiratoire, caractère déjà observé en 1805 par Sorg chez le *Lucanus cervus*.

4° Pendant les mouvements respiratoires, l'abdomen oscille verticalement, mais ne change pas de longueur.

Particularités propres à chacune des deux phases.

Expiration.	Inspiration.
Le mouvement débute d'une façon brusque.	Il existe une pause plus ou moins longue en inspiration.
L'arceau tergal du premier somite s'incline en arrière.	L'arceau tergal du premier somite devient horizontal ou s'incline un peu en avant.
Les arceaux dorsaux des autres somites s'abaissent sans changer notablement de courbure dans le sens transversal.	Les arceaux dorsaux des autres somites s'élèvent.
Le maximum d'effet s'observe pour le somite 2.	Le maximum d'effet s'observe à la limite des somites 1 et 2.
La surface dorsale de l'abdomen devient concave dans le sens longitudinal.	La surface dorsale de l'abdomen devient convexe dans le sens longitudinal.
Les arceaux dorsaux chevauchent les uns sur les autres.	Les arceaux dorsaux s'éloignent les uns des autres, surtout 1, 2 et 3, et les zones molles qui les unissent deviennent visibles.
L'extrémité de l'abdomen se relève.	L'extrémité de l'abdomen s'abaisse.
La zone molle latérale qui porte les stigmates forme un pli plus accusé et se déprime [1].	Le pli de la zone molle latérale s'ouvre et cette zone s'élève un peu.
Les rebords latéraux ou épimériens de l'abdomen s'inclinent en dedans.	Les rebords épimériens se redressent.

[1] L'observation directe montre, en outre, que cette zone se plisse.

Digitized by Google

§ XIII.

Muscles respiratoires de l'Hydrophile.

Les mouvements d'expiration et d'inspiration de l'Hydrophile ayant lieu presque exclusivement dans le sens vertical, on peut supposer *a priori* que ce ne sont ni des muscles longitudinaux, ni des muscles obliques qui les déterminent et que les faisceaux musculaires spécialement destinés aux mouvements respiratoires doivent être dirigés à peu près de haut en bas.

La dissection vient pleinement confirmer cette hypothèse. Rathke [1] a décrit, le premier, chez les Coléoptères, les véritables muscles respiratoires qui avaient complètement échappé à Straus-Durckheim. Ces muscles, dit Rathke, sont disposés par paires dans chaque anneau abdominal, l'un à droite, l'autre à gauche, dans le voisinage de la zone molle portant les stigmates. Ils sont dirigés verticalement et s'insèrent par leur extrémité supérieure sur l'arceau tergal, par leur extrémité inférieure sur les parties latérales de l'arceau sternal.

La contraction de ces muscles, vu la structure même des somites abdominaux des Coléoptères, doit avoir pour effet l'abaissement des arceaux tergaux, l'augmentation du pli formé par la zone molle latérale, enfin, par entraînement mécanique, l'inclinaison des rebords épimériens. Ce sont donc évidemment des muscles *expirateurs*.

Rathke n'ayant point représenté ces muscles, aucun auteur, à ma connaissance, ne décrivant les muscles abdominaux de l'Hydrophile et, enfin, une question importante, celle de l'existence possible de muscles inspirateurs se présentant naturellement à l'esprit, je crois faire chose utile en publiant un dessin et une description de la musculature de l'insecte qui fait le sujet de mon travail.

J'ai indiqué, chapitre II, § VI, le procédé que j'ai mis en usage d'une façon à peu près constante pour l'étude des muscles; je me bornerai donc à rappeler ici que l'animal est divisé en deux moitiés, droite et gauche, suivant un plan longitudinal.

L'abdomen de l'Hydrophile étant assez déprimé, on est obligé d'écarter fortement les arceaux tergaux des arceaux sternaux pour voir ce qui existe

[1] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc. Op. cit., p. 102.

Digitized by Google

à la hauteur du repli des flancs. La figure 16 a été dessinée d'après un demi-abdomen gauche ouvert ainsi d'une façon presque complète.

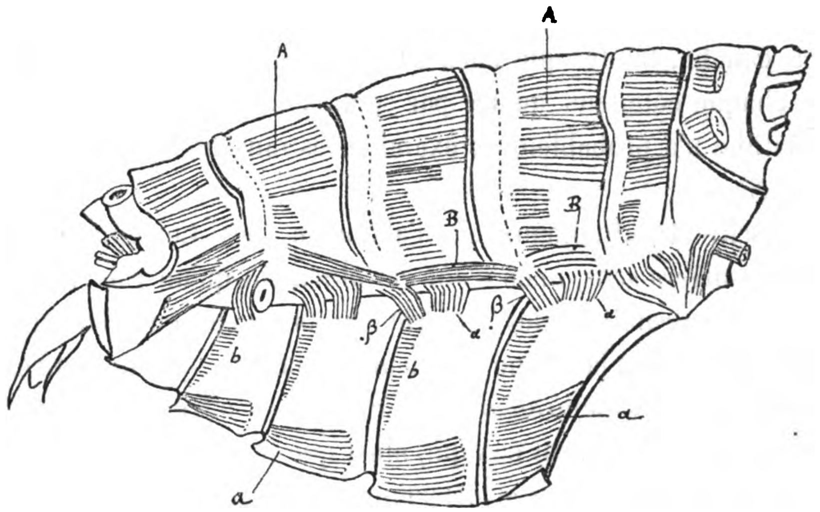


Fig. 16 × 4. — Hydrophile. — Muscles de la moitié gauche de l'abdomen.

On y distingue les muscles longitudinaux dorsaux *A* et *B* et les muscles longitudinaux sternaux *a* et *b* signalés chez les insectes par tous les auteurs. Ce sont les homologues des *grands droits* décrits par Newport chez la chenille du *Sphinx ligustri,* des *prétracteurs* figurés par Straus-Durckheim chez le Hanneton, etc.

Mais ce qui attire surtout l'attention, c'est une série de petits muscles *α*, *β*, assez larges et courts, au nombre de deux pour chacun des demi-somites 1, 2, 3, 4 [1], croisant presque verticalement le pli formé par la zone molle latérale et s'insérant, par leur extrémité supérieure, au bord inférieur des arceaux tergaux, par leur extrémité inférieure à la région la plus élevée des arceaux sternaux.

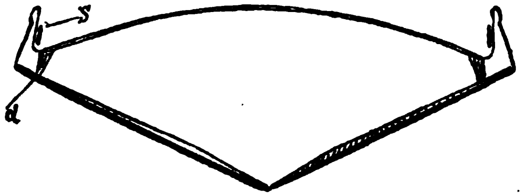


Fig. 17 × 4. — Hydrophile.
Coupe transverse du 3e somite abdominal.
S Stigmate.
α Muscle expirateur.

Une coupe transversale de l'abdomen fait encore mieux comprendre la valeur de cette disposition (fig. 17).

[1] Au nombre de quatre par conséquent par somite.

Digitized by Google

Je ferai remarquer, en outre, un petit détail qui n'est pas sans valeur. Rathke, dans sa description des muscles expirateurs verticaux des Coléoptères, indique une seule paire par somite, c'est-à-dire un muscle à droite et un muscle à gauche, tandis que chez l'Hydrophile il en existe manifestement deux de chaque côté, soit quatre par somite. Cette divergence provient de ce que Rathke n'a probablement examiné les muscles en question que chez les Scarabéiens.

Les muscles longitudinaux de l'abdomen des Coléoptères fléchissent celui-ci dans divers sens, mais n'ont certainement qu'un rôle fort accessoire dans l'acte respiratoire. Mes expériences prouvent en effet que le corps conserve sensiblement la même longueur pendant l'inspiration et l'expiration.

Les petits muscles *expirateurs verticaux* α, β offrent, au contraire, une importance capitale. Ce sont eux qui, ainsi que je l'ai dit plus haut, abaissent la face tergale de l'abdomen et déterminent évidemment l'expulsion de l'air contenu dans le système trachéen de la région la plus considérable du corps.

Quant à des muscles inspirateurs, on les cherche vainement; ils manquent totalement chez l'Hydrophile, comme chez un très grand nombre d'autres trachéates.

L'absence de muscles inspirateurs conduit à une conclusion intéressante : une série d'auteurs, Straus-Durckheim, Treviranus, Newport, Liebe, Graber pour les insectes, E. Blanchard pour les Scorpions, Kutorga pour les Scolopendres, se basant sur ce fait anatomique, ont admis, avec raison, que, chez la plupart des articulés à respiration trachéenne, l'expiration seule est active, a seule lieu sous l'influence de contractions musculaires, tandis que l'inspiration est un phénomène purement passif, l'abdomen reprenant son volume primitif sous l'influence de l'élasticité des téguments et de celle du système trachéen.

En d'autres termes, le mécanisme de la respiration de l'Hydrophile et de nombreux insectes dont j'aurai encore l'occasion de parler [1] est exactement l'inverse de ce qui existe chez les mammifères chez lesquels c'est l'inspiration qui est musculaire et active, l'expiration calme étant simplement passive et

[1] Voir pour les exceptions : Hyménoptères, Phryganiens, Acridiens, §§ LXV, LXVII, LXXI, LXXV.

Digitized by Google

résultant de l'élasticité des poumons et du relâchement des muscles inspirateurs.

Ces considérations augmentent beaucoup l'intérêt que présente le graphique *A* (page 35) dans lequel la passivité de l'inspiration se traduit par une courbe ascendante à vitesse décroissante et l'activité de l'expiration par une ligne descendant presque verticalement d'une façon brusque.

Si le lecteur désire une preuve supplémentaire de l'état passif en inspiration, il la trouvera dans les expériences suivantes sur le système nerveux.

§ XIV.

Expériences sur le système nerveux de l'Hydrophile.

Faivre, dans un travail que j'ai déjà cité et qui porte, comme titre, *De l'influence du système nerveux sur la respiration des Dytiques* [1], a avancé que, chez les Coléoptères qui ont fait le sujet de ses recherches, « le ganglion » *métathoracique* préside aux mouvements respiratoires... les excite, les » coordonne et les entretient... », que l'ablation de ce ganglion abolit les mouvements d'inspiration et d'expiration, etc.

Il y a des raisons sérieuses pour considérer les expériences de Faivre comme très soignées; malheureusement les conclusions que l'auteur déduit de ses résultats sont absolument fausses.

Je reviendrai sur ces idées théoriques, à propos d'autres Coléoptères, des Libellules et des Acridiens; il me suffira de dire ici que Faivre a perdu de vue que le système nerveux des Coléoptères est un *système nerveux condensé* dans lequel certainement plusieurs ganglions abdominaux sont fusionnés avec celui du métathorax; de sorte qu'en détruisant la masse métathoracique, on détruit, en même temps, les centres respiratoires d'un nombre plus ou moins grand d'anneaux de l'abdomen.

Chez l'Hydrophile l'abdomen comprend six somites *apparents* et il existe cinq ganglions abdominaux distincts [2].

[1] Ann. des sc. nat., *Zoologie*, 4e série, t. XIII, p. 335. 1860.

[2] E. Blanchard. *Recherches anatomiques et zoologiques sur le système nerveux des animaux sans vertèbres* (Ann. des sc. nat., 3e série, *Zoologie*, t. V, pl. XI, fig. 1, 1846).

Digitized by Google

Le premier ganglion abdominal *visible* est tellement rapproché du ganglion métathoracique qu'il est presque impossible de supprimer l'un sans l'autre.

En opérant cette double suppression, ou, ce qui est plus facile, en sectionnant simplement la chaîne nerveuse en arrière du premier ganglion abdominal distinct, on aura évidemment privé l'abdomen, en fait de centres respiratoires, non seulement de ce premier ganglion abdominal apparent, mais, de plus, du ou des ganglions abdominaux fusionnés avec le métathoracique.

Théoriquement, en laissant de côté l'opinion erronée de Faivre, et en se basant sur le fait physiologique bien connu que chaque somite d'un articulé possède un centre moteur propre, on devra, après la suppression des ganglions indiqués, observer, chez l'Hydrophile, un arrêt des mouvements respiratoires dans les premiers anneaux de l'abdomen et la persistance de ces mouvements dans les anneaux postérieurs.

Les expériences ci-dessous montrent que l'hypothèse se vérifie en grande partie.

Un Hydrophile dont le système nerveux est intact, mais qui est privé de ses élytres et de ses ailes, fait environ dix-huit mouvements respiratoires par minute. Je sectionne la chaîne en arrière du premier ganglion abdominal distinct [1]. Les mouvements respiratoires cessent dans les somites 1, 2, 3, et l'abdomen prend la forme singulière représentée dans la figure 18 qui nous montre les trois premiers somites en inspiration et les trois derniers en expiration.

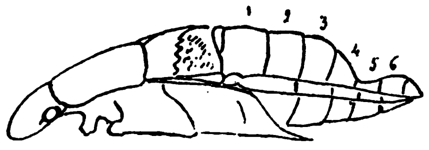


Fig. 18.

Cet aspect étrange s'explique très bien; la destruction des centres nerveux répondant aux somites 1, 2, 3 leur a permis de prendre la forme que tout somite abdominal de Coléoptère prend à l'état passif, par simple élasticité, lorsque les muscles expirateurs se relâchent; mais la section de la chaîne

[1] J'ai décrit, chapitre II, § VII, page 24, les procédés dont je fais usage pour exciter ou détruire presque à coup sûr une partie déterminée du système nerveux, sans léser gravement la surface du corps des insectes.

Digitized by Google

a déterminé une certaine excitation dans les autres centres demeurés intacts; ce qui amène momentanément une contraction dans les muscles expirateurs des somites postérieurs.

Comme on pouvait le prévoir, les mouvements respiratoires persistent dans les anneaux 4, 5, 6; ils sont faibles, assez lents (dix environ par minute), mais incontestables.

Au bout d'un quart d'heure, on constate que les mouvements d'expiration et d'inspiration ne sont pas *absolument* abolis dans les anneaux antérieurs. *A la loupe,* on observe, cinq ou six fois par minute, une dépression très légère dans la zone molle qui porte les stigmates et l'inclinaison en dedans des bords épimériens.

Voyant cela, je sépare complètement l'abdomen du thorax; les petits mouvements lents des anneaux antérieurs cessent tout à fait; mais les mouvements respiratoires des anneaux 4, 5, 6 persistent durant un certain temps.

Une deuxième expérience, effectuée à peu près de la même manière, a donné des résultats analogues. La section de la chaîne nerveuse en arrière du premier ganglion abdominal distinct a été suivie de l'arrêt en inspiration des somites 1, 2, 3 et de l'affaissement en expiration des somites postérieurs 4, 5, 6, ceux-ci continuant à montrer des mouvements respiratoires faibles avec inclinaison en dedans des bords épimériens.

Ces expériences me semblent suffire pour démontrer que le ganglion métathoracique vrai de l'Hydrophile n'est ni le centre modérateur, ni le centre excitateur des mouvements respiratoires abdominaux. (Voyez § XX, les expériences sur le Dytique.)

J'ai fait, sur l'Hydrophile, un autre essai intéressant, afin de constater l'influence des ganglions cérébroïdes sur les mouvements de respiration.

Les recherches de plusieurs de mes prédécesseurs et celles que j'ai répétées moi-même sur les Orthoptères, les Libellules, le Dytique, etc., prouvent que si l'ablation des ganglions cérébroïdes n'abolit jamais les mouvements respiratoires, cette suppression n'est pas absolument sans influence, qu'elle est suivie soit d'un ralentissement dans les mouvements en question, soit d'une diminution d'amplitude seulement. Afin de me mettre à l'abri des

Digitized by Google

illusions, j'ai employé la méthode des projections qui me permettait de juger fort bien des changements d'amplitude.

Un Hydrophile vigoureux, privé de ses pattes, de ses ailes et de ses élytres, est introduit dans l'appareil. Des styles sont collés sur les arceaux tergaux 1, 3 et 5. On dessine les phases inspiratoire et expiratoire (de la même manière que pour la figure 57), et on note, comme moyenne de plusieurs observations faites à l'aide d'une montre à secondes, vingt-cinq mouvements respiratoires par minute.

Il est à remarquer que l'insecte exécute : 1° des mouvements respiratoires d'une amplitude normale; 2°, de temps en temps, des mouvements d'une amplitude à peu près double.

Ceci constaté, on détruit les ganglions cérébroïdes en faisant une fente à la paroi de la tête, entre les yeux, et en déchirant la masse nerveuse à l'aide d'une aiguille. Comme preuve de l'opération, les antennes deviennent immobiles.

L'Hydrophile est ensuite replacé dans l'appareil à projections. Le rhythme respiratoire est un peu ralenti. On compte vingt-deux mouvements par minute. Les dessins des phases respiratoires, comparés à ceux qui ont été obtenus avec l'insecte dont le système nerveux était intact, montrent que l'amplitude a diminué de $^1/_8$ environ pour les mouvements réguliers et de $^1/_5$ pour les mouvements plus violents.

La destruction des ganglions cérébroïdes a donc amené un faible ralentissement et une diminution dans l'amplitude des mouvements respiratoires.

§ XV.

Hydrochares (Hydrous) caraboides.

Cette forme, très voisine de l'Hydrophile, ne pouvait fournir que des résultats presque identiques; aussi ne lui ai-je appliqué que la méthode des projections.

Comme l'Hydrophile, l'Hydrochares relève l'extrémité de l'abdomen en expiration.

Digitized by Google

En employant un premier individu privé de ses élytres et chez lequel les mouvements étaient probablement exagérés, j'ai constaté, sur la silhouette, un léger raccourcissement expiratoire de l'abdomen qui, réduit à la taille de l'insecte, devait être environ de $^1/_7$ de millimètre.

Un nouvel essai sur un autre Hydrochares auquel j'avais laissé les bords latéraux des élytres, de façon à limiter les déplacements de l'abdomen, comme ils le sont à l'état de nature, m'a prouvé que le corps de l'insecte conserve toujours la même longueur pendant les mouvements respiratoires.

§ XVI.

Dytiscus.

Les mouvements respiratoires des Dytiques ont été étudiés à l'aide de l'observation directe par Faivre et par Rathke. Faivre en a donné une description assez détaillée, mais peu exacte, que je reproduirai plus loin. Quant à Rathke, il s'est borné à mentionner les Dytiques, sans autre indication, dans la liste des Coléoptères qu'il a examinés.

J'ai surtout employé le *Dytiscus marginalis*, mais j'ai fait en outre quelques essais à l'aide des *D. dimidiatus* et *D. punctulatus*.

§ XVII.

Étude des mouvements respiratoires des Dytiques par la méthode graphique.

Les mouvements respiratoires des Dytiques consistent, comme ceux de la plupart des Coléoptères, en élévations et abaissements alternatifs des arceaux dorsaux de l'abdomen; seulement ces déplacements n'ont jamais qu'une faible amplitude. Il existe, à cet égard, une différence notable entre les Dytiques et d'autres Coléoptères d'une taille au-dessus de la moyenne, tels que l'Hydrophile, l'*Oryctes nasicornis*, etc. [1].

[1] La méthode par projection montre qu'en expiration la diminution du diamètre vertical de l'abdomen du Dytique n'est que de $^1/_{22}$, tandis qu'elle atteint $^1/_9$ et même $^1/_7$ chez l'Hydrophile.

Digitized by Google

Le peu d'amplitude des mouvements respiratoires chez des insectes aux allures aussi vives et susceptibles, on le sait, d'effectuer des efforts musculaires assez considérables, a lieu de surprendre; cependant, le fait est incontestable. J'ai observé, au point de vue des mouvements respiratoires, plus de vingt individus pris à des époques différentes; je leur ai appliqué des méthodes variées; tous ont été étudiés peu de temps après leur capture; ceux que je ne pouvais employer immédiatement étaient abondamment pourvus de nourriture et, malgré ces précautions, je n'ai jamais vu un Dytique effectuer les expirations énergiques et profondes qui caractérisent l'Hydrophile et les Scarabéiens.

Il résulte du fait que je viens de signaler que le procédé ordinaire du levier transversal reposant sur un des arceaux dorsaux ne donne jamais que d'assez tristes résultats. Pour obtenir de bons tracés démonstratifs il faut supprimer tous les frottements, excepté celui de la pointe inscrivante sur la surface enfumée du cylindre, et utiliser les changements de courbure que présente la ligne médiane dorsale de l'insecte. J'ai fait usage, à cet effet, d'un style longitudinal à branches équilibrées semblable à celui que j'ai employé dans quelques expériences effectuées sur l'Hydrophile (voyez figure 3, page 15).

Le graphique *E*, ci-joint, a été obtenu de cette manière.

← Sens de la rotation du cylindre.

L'insecte était un mâle robuste. Le style, aussi léger que possible, avait été découpé dans du carton fort mince; sa branche antérieure inscrivante avait 85 millimètres de longueur et sa plaque inférieure était collée au baume sur les arceaux tergaux 3 et 4.

Ces arceaux effectuant non seulement des mouvements de haut en bas, mais, en outre, s'inclinant en arrière en inspiration, pour se rapprocher du plan horizontal dans la phase expiratoire (voir § XVIII), les déplacements de la pointe inscrivante du style étaient relativement grands.

Digitized by Google

La portion ascendante de la courbe répond ici à l'inspiration et la partie descendante à l'expiration.

On voit très nettement que l'inspiration est un mouvement lent à vitesse décroissante, sans devenir jamais nulle, c'est-à-dire qu'aucune partie du tracé inspiratoire n'est une droite horizontale et qu'il n'y a par conséquent pas de pause d'une durée appréciable en inspiration.

On constate aussi que l'expiration est marquée par une descente très brusque à ses débuts et ne se terminant pas non plus par une pause réelle.

Un caractère assez remarquable qui s'est répété dans une série de graphiques fournis par des individus différents consiste dans la forme tremblée du tracé expiratoire. L'inspiration se présente sous l'aspect d'un mouvement régulier, tandis que l'expiration semble s'effectuer, surtout à l'origine, par petites secousses successives.

La lenteur de l'inspiration et la brusquerie de l'expiration s'expliquent très bien en admettant, ce que l'étude du système musculaire démontre, du reste, que l'inspiration est passive et a lieu sous l'action de l'élasticité des téguments et du système trachéen, tandis que l'expiration est active et est déterminée par la contraction de muscles expirateurs spéciaux. Quant à l'aspect tremblé du tracé expiratoire, il tient peut-être à un petit défaut de l'instrument, peut-être aussi à ce que les muscles expirateurs se raccourcissent par petites secousses rapprochées.

J'ajouterai enfin, en terminant ce qui concerne la méthode graphique appliquée aux Dytiques, que chez ceux de ces insectes que l'on a placés ainsi dans des conditions en somme très anormales, en les fixant à l'aide d'épingles, en leur enlevant les pattes et une partie notable des élytres, les inspirations et les expirations se succèdent sans temps d'arrêt. On verra plus loin que les choses ne se passent pas ainsi chez le Coléoptère intact ou à peu près et libre.

Digitized by Google

§ XVIII.

Étude des mouvements respiratoires des Dytiques par la méthode des projections.

Plusieurs Dytiques privés de leurs pattes, de leurs ailes et de leurs élytres et munis de petits styles verticaux collés au baume, soit sur le milieu de la face tergale des somites abdominaux, du premier au septième, soit sur les régions latérales de la face tergale du troisième somite seulement, ont été placés dans l'instrument à projection, tantôt transversalement à l'axe du faisceau lumineux, tantôt parallèlement à cet axe.

J'ai pu ainsi, avec un grossissement de 7 diamètres environ, obtenir des dessins très concordants des deux phases respiratoires.

Dans tous ces essais, l'insecte n'était fixé que par deux épingles traversant les bords latéraux du prothorax. L'abdomen était entièrement libre.

En combinant les résultats auxquels je suis arrivé ainsi, avec ceux que m'a donnés la méthode graphique, j'arrive à pouvoir décrire comme suit les mouvements respiratoires des Dytiques :

Faits généraux.

1° Le métathorax est immobile, ne participe pas aux mouvements des somites abdominaux.

2° Même chez les individus vifs, l'amplitude des mouvements respiratoires est faible. La diminution du diamètre vertical en expiration, à la hauteur du troisième somite, n'est que de $^1/_{22}$.

3° La face tergale des somites de l'abdomen est seule en mouvement ; la face sternale ne bouge point.

4° Les faces tergales de *tous* les somites abdominaux actifs (du 1er au 7e) se déplacent *à la fois ;* il n'existe pas de mouvement progressif, pas d'onde.

5° La longueur de l'abdomen ne varie pas. Suivant les individus, l'extrémité de l'abdomen reste immobile ou offre de légers mouvements d'oscillation de bas en haut.

6° Il n'existe de pause réelle, ni à la fin de l'inspiration, ni à la fin de l'expiration.

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
Le mouvement débute d'une façon brusque. La contraction des muscles expirateurs semble s'opérer par petites secousses successives ?	L'inspiration est un mouvement lent, régulier à vitesse décroissante.
L'arceau tergal du somite 1 s'incline légèrement en arrière.	Les arceaux tergaux 1 et 7 prennent des positions moins obliques.

L'arceau tergal du somite 7 s'incline légèrement en avant.	
Les faces tergales des somites 2, 3, 4, 5 et 6 s'abaissent en glissant un peu en arrière, de sorte que tous ces somites chevauchent davantage les uns sur les autres.	Les faces tergales des somites 2, 3, 4, 5 et 6 s'élèvent et se déplacent un peu d'arrière en avant.
L'abaissement maximum a lieu pour les somites 2, 3, 4. Dans le sens longitudinal les faces tergales 3 et 4 sont presque horizontales.	Le maximum d'effet paraît avoir lieu pour les somites 2, 3, 4. Dans le sens longitudinal, les faces tergales 3 et 4 sont inclinées en arrière.
Le profil longitudinal de la face dorsale de l'abdomen devient plus concave. Cet effet est augmenté chez certains individus dont la pointe de l'abdomen se relève un peu pendant l'expiration.	Le profil longitudinal de la face dorsale de l'abdomen devient moins concave d'une façon générale et est même légèrement convexe dans la région des anneaux 1, 2, 3, 4.
	Chez certains individus l'extrémité de l'abdomen descend un peu.
La courbure transversale des arceaux tergaux se modifie, leur partie centrale s'abaissant un tant soit peu plus que leurs extrémités latérales; ils deviennent plus plats.	Les arceaux tergaux deviennent légèrement plus convexes dans le sens transversal.
La zone molle qui porte les stigmates des somites antérieurs s'enfonce et les bords épimériens s'inclinent fortement en dedans.	La zone molle qui porte les stigmates antérieurs se relève et les bords épimériens des arceaux sternaux correspondants se redressent.

Les mouvements respiratoires des Dytiques étant ainsi élucidés à l'aide de procédés qui laissent peu de prise aux erreurs, je me permettrai d'opposer à la description que je viens d'en donner, celle qu'a publiée Faivre qui, jusqu'à présent, a fait autorité à cet égard. Je mets en italique, dans le texte de l'auteur, ce qui est en désaccord avec ce que j'ai observé.

« Sur un Dytique auquel on a enlevé les ailes, on observe, à la région » abdominale, deux mouvements bien distincts. Le premier consiste : » 1° *dans l'abaissement des lames latérales de chaque côté;* 2° dans l'élé- » vation des segments dorsaux de l'abdomen; 3° dans la direction d'arrière » en avant et de bas en haut de ces segments; 4° dans l'*allongement* et » l'inflexion légère de haut en bas et de bas en haut des trois derniers » anneaux. Ce temps est l'analogue de l'inspiration; il a pour résultat » l'agrandissement de la cavité abdominale. Le second mouvement suc- » cède presque immédiatement au premier; il s'accomplit par un méca- » nisme tout à fait inverse [1]. »

Le mémoire de Faivre est un travail consciencieux; je ne cite donc pas

[1] Faivre. *De l'influence du système nerveux sur la respiration des Dytiques,* op. cit., p. 324.

Digitized by Google

le passage précédent pour la futile satisfaction de formuler une critique, mais pour montrer que l'observation directe des mouvements respiratoires fait commettre de petites erreurs et laisse passer inaperçus la plupart des détails.

Faivre ajoute encore, un peu plus loin [1] : « Ainsi, soit que l'insecte » marche, soit qu'il nage, deux ordres de mouvements interviennent dans » la respiration : les mouvements respiratoires proprement dits qui s'exé- » cutent à l'aide des *lames latérales* et des anneaux et les mouvements » secondaires qui ont lieu pendant la marche et la nage à l'aide de l'abais- » sement *et de l'extension* des trois derniers anneaux de l'abdomen. »

On remarquera que Faivre insiste sur les mouvements des régions épimériennes et sur le prétendu allongement de l'abdomen.

Comme chez l'Hydrophile, l'inclinaison en dedans des épimères n'est qu'une conséquence de l'abaissement des arceaux dorsaux; de plus, cette inclinaison a lieu en expiration et non en inspiration, bien que les termes dont se sert l'auteur cité semblent indiquer le contraire.

Quant à l'allongement apparent de l'abdomen, on sait que c'est une illusion, les expériences par projection démontrant que la longueur du corps ne varie pas pendant la respiration calme.

En parlant de l'Hydrophile, j'ai fait observer qu'il était parfaitement inutile de vouloir utiliser la méthode graphique à des recherches sur le rhythme respiratoire des insectes. Les Dytiques nous fournissent une preuve indiscutable à cet égard, le rhythme respiratoire des individus privés de leurs élytres et de leurs ailes n'étant pas du tout le même que celui des individus intacts.

J'ai dit, en effet, à propos des diverses expériences qui précèdent que, dans ces essais, les mouvements respiratoires se succédaient régulièrement et *sans interruptions*. Or, il en est tout autrement chez le Dytique en liberté et muni du revêtement normal de son abdomen.

Pour constater ce qui se passe dans ces conditions, je n'enlève au Coléoptère que la moitié postérieure de l'élytre droit ainsi que la partie sous-jacente

[1] Faivre. *Loc. cit.*, p. 325.

Digitized by Google

de l'aile du même côté. Cette ouverture relativement minime suffit pour observer les mouvements respiratoires lorsqu'on s'est familiarisé avec leur mécanisme par d'autres études préalables.

L'insecte étant lâché dans l'eau, on voit une couche d'air argentée adhérer aux zones foncées et velues de la face dorsale des anneaux découverts. Une bulle d'air elliptique et peu saillante se montre à chacun des orifices stigmatiques visibles; enfin une grosse masse d'air convexe vers son bord libre est comprise entre la face supérieure de l'abdomen et les ailes. (Il ne paraît pas y avoir d'air entre les ailes et les élytres.)

La succession des mouvements respiratoires se présente comme suit : 1° Sous l'eau, longs *arrêts* [1] en inspiration; toutes les 20 secondes environ (parfois après 40 secondes), un ou deux mouvements expiratoires pressés. De temps à autre, ces mouvements d'expiration si distants amènent (même chez les individus absolument intacts) l'expulsion d'une grosse bulle gazeuse. En général l'animal monte immédiatement après à la surface de l'eau pour renouveler sa provision d'air [2];

2° *A la surface,* long arrêt en inspiration, de durée assez variable, terminé par un ou deux mouvements d'expiration faibles, mais rapprochés, après quoi l'insecte plonge.

Ainsi que je l'annonçais plus haut, il n'y a donc aucune analogie entre le rhythme respiratoire régulier de l'insecte privé de ses élytres et de ses ailes et celui de l'individu dont l'abdomen est resté protégé par ses couvertures. Je ne crois pas que l'on puisse, avec certitude, donner le motif de cette grande différence. Les mouvements respiratoires des insectes étant essen-

[1] Il ne faut pas confondre *arrêt* et *pause;* la pause est le repos qui, chez certains animaux, termine chaque inspiration ou chaque expiration; c'est un phénomène qui se répète régulièrement et à intervalles égaux. L'arrêt est une interruption plus ou moins importante dans la série des mouvements. L'animal restant en inspiration ou en expiration pendant un temps beaucoup plus long que celui qui répond à chacune des phases respiratoires lorsque celles-ci se succèdent d'une façon rhythmique.

[2] Je suis encore ici en désaccord avec Faivre qui dit : « Chaque fois qu'il descend, il se » contracte et laisse échapper quelques bulles d'air. » On voit que j'ai cru constater absolument l'inverse, l'insecte n'expulsant l'air vicié qu'après un certain temps de respiration sous l'eau, puis remontant ensuite.

Digitized by Google

tiellement des mouvements réflexes, il est possible que la dénudation complète de l'abdomen amène une excitation suffisante pour déterminer une succession régulière de mouvements que l'animal ne présente pas dans les conditions normales; il est possible aussi que l'excitation émane des centres nerveux cérébroïdes et que l'absence d'arrêts ne soit qu'une des manifestations de l'état d'inquiétude de l'insecte mutilé et fixé.

L'expérience qui précède m'a permis de constater un détail qui a sa valeur : Faivre a accordé une grande importance, dans l'acte respiratoire, aux mouvements des derniers anneaux abdominaux. Parlant du Dytique arrivé à la surface, il s'exprime en ces termes : « Il élève hors de l'eau » l'extrémité abdominale, abaisse les trois derniers anneaux pour prendre » de l'air, puis il les applique de nouveau contre les élytres et descend avec » rapidité.... on peut produire à volonté ces mouvements abdominaux postérieurs. Dès qu'on sort un Dytique de l'eau, les derniers anneaux s'abaissent et s'allongent; mais quand on l'y replonge, les anneaux s'appliquent » contre les élytres. »

Faivre a été trompé par le changement de courbure de la face dorsale de l'abdomen en inspiration. J'ai pu m'assurer, chez l'individu dont je n'avais enlevé que le quart de la surface des élytres, que c'est toujours dans la partie visible de la *région moyenne* de la face dorsale de l'abdomen que les mouvements respiratoires s'effectuent. Les déplacements et surtout les allongements de l'extrémité abdominale sur lesquels Faivre insiste font défaut ou sont si peu marqués qu'ils passent absolument inaperçus.

Digitized by Google

§ XIX.

Muscles respiratoires des Dytiques.

La disposition des muscles de l'abdomen est, à très peu près, la même que chez l'Hydrophile.

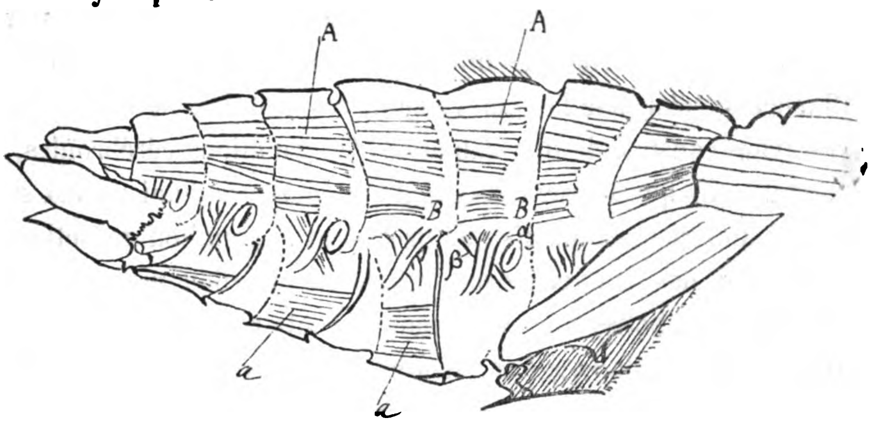


Fig. 19 × 4. — Muscles de la moitié gauche de l'abdomen du *Dytiscus marginalis* ♀.
A, *B* Muscles longitudinaux dorsaux.
a — — sternaux.
α, β — expirateurs verticaux.

Les muscles expirateurs (α, β, fig. 19) sont encore une fois ici au nombre de quatre, par somite (deux à droite, deux à gauche); ils sont plus longs que ceux de l'Hydrophile et les muscles d'une même paire s'entre-croisent comme les branches de la lettre X.

Ainsi que le montre la coupe transversale (fig. 20, α), ils s'insèrent, en haut, au bord latéral de l'arceau tergal, en dedans du pli formé par la zone stigmatique, en bas, sur la région latérale de l'arceau sternal.

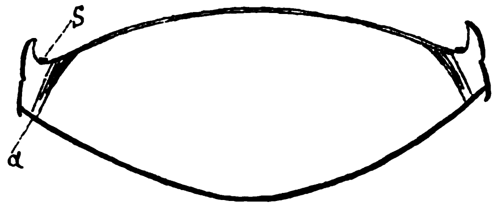


Fig. 20 × 4. - *Dytiscus punctulatus*.
Coupe transverse du 3e somite abdominal.
S Stigmate.
α Muscles expirateurs verticaux.

L'absence totale de muscles inspirateurs conduit à la conclusion que j'ai déjà formulée au § XIII, à savoir que chez le Dytique, comme chez l'Hydrophile, l'expiration est seule active, l'inspiration, passive, s'effectuant sous l'influence de l'élasticité des parois du corps et des parois des trachées.

La forme du graphique *E* (page 52) vient, du reste, confirmer cette déduction basée sur un fait anatomique.

Digitized by Google

§ XX.

Expériences sur le système nerveux des Dytiques.

J'ai rappelé § XIV (page 47) les expériences effectuées par Faivre dans le but de déterminer le rôle des différents centres nerveux des Dytiques et leur influence spéciale sur les mouvements respiratoires de ces insectes.

Faivre ayant constaté 1° que l'ablation des ganglions cérébroïdes, la section des connectifs qui unissent les ganglions sous-œsophagiens aux suivants, la section de tous les connectifs qui précèdent le ganglion mésothoracique, enfin la division des connectifs qui relient le ganglion mésothoracique au métathoracique, n'abolissent pas les mouvements respiratoires;

2° Que l'irritation du ganglion métathoracique active ces mouvements;

3° Que la suppression du ganglion métathoracique ou la section de la chaîne en arrière de ce ganglion amènent la cessation totale des mouvements d'inspiration et d'expiration, conclut de ses résultats que le ganglion métathoracique préside aux mouvements respiratoires et que les ganglions abdominaux ne jouent que le rôle de conducteurs par rapport au centre respiratoire unique du métathorax.

Je ne pourrais que répéter ici les objections que j'ai formulées (§ XIV) à propos de l'Hydrophile. Le système nerveux du Dytique est, du reste, encore plus condensé; en effet, l'abdomen comprend huit somites apparents et il n'y a que six ganglions abdominaux visibles, dont le premier est très rapproché du ganglion métathoracique.

En détruisant la masse nerveuse du métathorax, on supprime, en fait, les ganglions abdominaux qui sont fusionnés avec lui et on lèse, très probablement, le premier ganglion abdominal libre qui vient immédiatement après.

On détruit donc précisément les centres qui animent les muscles des somites abdominaux antérieurs, 1, 2, 3 et peut-être 4, précisément ceux où les mouvements respiratoires consistant en déplacements de haut en bas de la force tergale sont réellement actifs (voyez § XVIII, page 55). Les cinq ganglions restants ne peuvent évidemment plus exciter de mouvements que dans les anneaux abdominaux postérieurs.

Digitized by Google

Faivre fournit, sans le savoir, une preuve expérimentale de ce que j'avance. En irritant les trois ganglions abdominaux de la partie antérieure *visible* de la chaîne abdominale, il n'arrive qu'à faire se recourber légèrement l'abdomen vers le haut, mais il n'obtient pas de mouvements respiratoires proprement dits.

L'expérience suivante que j'ai effectuée sur un Dytique mâle confirme en majeure partie les observations que je viens d'exposer.

L'insecte intact et calme fait neuf à dix mouvements respiratoires par minute. On cherche à détruire le ganglion métathoracique à l'aide d'une forte aiguille enfoncée par l'intervalle entre les trochanters de la deuxième paire et ressortant par la pointe de l'écusson.

Le Dytique exécute des mouvements de l'abdomen très violents. Lorsque l'animal est calmé, on observe encore dix mouvements respiratoires très faibles, par minute, *même dans les anneaux antérieurs;* puis, au bout de fort peu de temps, ces mouvements disparaissent d'une façon totale, la lésion subie par la masse nerveuse métathoracique paraissant avoir déterminé l'abolition progressive rapide des propriétés des autres ganglions soudés à sa partie postérieure.

Comme l'animal présentait cependant encore des mouvements abdominaux généraux (non respiratoires), on sectionne la chaîne, par le dos, en arrière du métathorax. On supprime donc, pour l'abdomen, les centres fusionnés avec la masse métathoracique, plus le premier ganglion suivant distinct.

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, tous les somites abdominaux antérieurs sont paralysés. Le dernier somite et les pièces de l'armure génitale (qui répondent à des somites modifiés) continuent, au contraire, à offrir des mouvements très prononcés.

J'ai cru inutile de multiplier davantage les essais de ce genre sur le Dytique; l'erreur physiologique de Faivre est trop évidente et, si la destruction du ganglion métathoracique donne, en apparence, des résultats conformes aux vues de cet auteur, c'est, on ne saurait trop le répéter, que, chez la plupart des Coléoptères, il est matériellement impossible d'abolir l'action de ce centre seul.

Digitized by Google

On a vu plus haut (§ XIV, page 49) que j'avais cherché à déterminer chez l'Hydrophile si les centres nerveux céphaliques ont une certaine action sur les mouvements respiratoires. Faivre ayant observé chez le Dytique que la destruction des ganglions cérébroïdes ne paraît pas modifier les mouvements de respiration et que l'ablation des ganglions sous-œsophagiens ne produit une perturbation que dans les moments qui suivent l'opération, je ne pouvais me dispenser de faire des essais analogues, mais en m'entourant de précautions destinées à me mettre à l'abri des illusions.

Je m'étais servi, pour l'Hydrophile, de la méthode des projections; cette fois, j'ai utilisé la méthode graphique.

Après avoir obtenu, en employant le style longitudinal dont il est parlé au § XVII (page 52), un tracé très net des mouvements respiratoires d'un Dytique mâle vigoureux, on décapite l'insecte, supprimant ainsi à la fois les ganglions cérébroïdes et les ganglions sous-œsophagiens; puis on prend un graphique nouveau.

Celui-ci montre qu'il n'y a pas de ralentissement; qu'il existe, plutôt, une certaine accélération (neuf mouvements par minute au lieu de sept observés chez l'animal encore entier); mais que l'amplitude a diminué des deux tiers environ.

Le résultat suivant est beaucoup plus net. Chez un Dytique femelle qui vient de fournir, à l'aide du style longitudinal, le graphique F ci-contre, sur lequel on a compté cinq mouvements respiratoires par minute, on détruit rapidement les ganglions cérébroïdes seuls, puis on prend le second tracé G sur lequel on retrouve les caractères distinctifs de l'inspiration et de l'expiration; ce qui prouve que la forme générale des mouvements respiratoires est restée la même, mais qui montre : 1° un accroissement de vitesse, le nombre des mouvements respiratoires

← Sens de la rotation du cylindre.

← Sens de la rotation du cylindre.

étant de sept par minute; 2° une diminution d'amplitude et une faiblesse remarquables.

Ainsi, chez les Dytiques, la destruction des centres volontaires n'amène pas la suppression des mouvements respiratoires, fait que Faivre avait déjà constaté, mais elle rend ces mouvements un peu plus rapides et notablement plus faibles.

§ XXI.

Colymbetes fuscus.

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

L'insecte privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes est fixé par deux épingles traversant les rebords latéraux du prothorax. Le grossissement employé est de 13 diamètres.

Ce petit Dytiscide, placé dans les conditions que je viens d'indiquer, imprime à son abdomen des mouvements oscillatoires très étendus, dans le sens vertical, l'extrémité de l'abdomen s'élevant notablement en expiration. Malgré cette particularité très défavorable à l'observation, on constate les trois points suivants :

1° Le méso et le métathorax ne bougent pas;

2° La longueur de l'abdomen reste invariable;

3° Il existe régulièrement une pause en inspiration.

Afin de paralyser les déplacements de bas en haut de l'abdomen, on engage son extrémité sous la portion horizontale d'une épingle coudée à angle droit.

Dans ces nouvelles conditions, et de petits styles verticaux ayant été collés sur les arceaux tergaux 2 et 4, on assiste aux phénomènes ci-dessous :

Les arceaux tergaux s'abaissent en expiration, le maximum d'effet ayant lieu, comme chez les Dytiques, pour les somites 2, 3, 4.

L'inclinaison des styles montre que les arceaux tergaux de la base de l'abdomen s'inclinent en arrière, tandis que les arceaux postérieurs s'inclinent en avant.

Digitized by Google

Le profil longitudinal de la face tergale de l'abdomen devient donc plus concave et il existe, en même temps, pendant l'expiration, un léger chevauchement des arceaux tergaux.

De même que chez les Dytiques proprement dits, les mouvements respiratoires ont très peu d'amplitude, la diminution du diamètre vertical de l'abdomen variant entre $^1/_{20}$ et $^1/_{18}$ (Dytique $^1/_{22}$).

On s'assure aussi, comme chez l'animal dont l'abdomen était libre, que les segments thoraciques postérieurs restent immobiles, que l'abdomen ne change pas de longueur et qu'il existe une pause en inspiration.

Enfin, dans une dernière expérience, trois styles sont collés sur le deuxième arceau tergal, l'un au milieu, les deux autres sur les portions latérales; l'insecte est placé dans l'appareil à projection de façon à obtenir une silhouette de la coupe transversale du corps à la hauteur du second somite abdominal.

La quantité dont les différents styles descendent, en expiration, permet de constater que lors de la dépression expiratoire, les arceaux tergaux s'abaissent un peu plus au milieu que sur les côtés; qu'ils deviennent, en un mot, plus plats, absolument comme chez les Dytiques proprement dits.

En résumé, les mouvements respiratoires des *Colymbetes* sont à fort peu près ceux des *Dytiscus*, fait que l'on pouvait prévoir, mais qui, dûment constaté, autorise à généraliser et permet de supposer que tous les Coléoptères du groupe des Dytiscides respirent de la même manière.

§ XXII.

Carabus auratus, Abax striola.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Rathke a observé les mouvements respiratoires du *Carabus granulatus*; il ne les décrit pas spécialement et se borne à signaler cette particularité que l'arceau tergal du métathorax s'élève et s'abaisse, mais moins que les arceaux supérieurs des somites abdominaux [1].

[1] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc., op. cit., p. 104.

Digitized by Google

Les Carabiques que j'avais à ma disposition étant des insectes trop faibles pour vaincre utilement les petits frottements d'un appareil enregistreur, je me suis borné à étudier leurs mouvements respiratoires à l'aide de la méthode des projections.

Carabus auratus. — L'insecte privé de ses élytres et de ses pattes est placé transversalement dans l'appareil. La silhouette reproduit le profil de l'animal grossi environ sept fois. De petits styles verticaux sont fixés sur le milieu des faces tergales des somites 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

J'ai noté les phénomènes suivants :

Faits généraux.

1° La face tergale du métathorax participe légèrement, comme l'avait observé Rathke, aux mouvements d'élévation et d'abaissement des faces tergales des somites abdominaux.

2° Les mouvements respiratoires ont lieu *à la fois* dans tous les somites de l'abdomen; il n'y a pas d'onde.

3° Même chez les individus très vifs, ces mouvements, quoique rapides, ont une très faible amplitude ($^1/_{26}$ au niveau du 4e somite).

4° La longueur de l'abdomen reste sensiblement constante.

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
L'expiration a lieu d'une façon brusque.	L'inspiration a lieu d'une façon presque aussi rapide.
L'arceau tergal du métathorax s'incline en arrière.	L'arceau tergal du métathorax reprend sa position première.
Les arceaux tergaux des somites abdominaux, jusqu'au septième, s'abaissent en se déplaçant très légèrement en arrière.	Les arceaux tergaux des somites 1 à 7 s'élèvent en glissant légèrement en avant.
La face tergale de l'abdomen se creuse faiblement.	Le profil de la face tergale, depuis le premier somite jusqu'au sixième, devient à peu près rectiligne.
Les arceaux tergaux chevauchent un peu l'un sur l'autre.	
L'extrémité de l'abdomen s'abaisse d'une petite quantité.	L'extrémité de l'abdomen se relève faiblement.

Le lecteur a vu plus haut, §§ XIV et XX, que la suppression des ganglions cérébroïdes et sous-œsophagiens chez l'Hydrophile et le Dytique n'abolit point les mouvements respiratoires, mais que cette destruction diminue l'amplitude des mouvements.

Digitized by Google

J'ai répété l'expérience sur le *Carabus auratus* avec des précautions spéciales : l'insecte est muni de styles fixés sur les faces tergales des somites abdominaux, du premier au septième. Après avoir dessiné sur l'écran de l'appareil à projection, les contours des deux phases respiratoires, ainsi que les diverses positions successives des styles, on décapite le Carabe, on le replace dans l'instrument et l'on effectue de nouveaux dessins.

Or, sauf une très légère diminution dans l'amplitude, les deux contours obtenus sont à peu près identiques. La décapitation n'a donc déterminé qu'une modification fort peu importante dans la manière dont s'effectuent les mouvements respiratoires.

Abax striola. — Lorsque le Carabique examiné est une femelle dont l'abdomen est distendu par des œufs, la région abdominale offre, on le sait, un aspect tout particulier; les arceaux tergaux très élevés sont reliés aux arceaux sternaux par une zone molle et pâle portant les stigmates et affectant une position exceptionnelle verticale.

Dans ces conditions, les mouvements respiratoires ne ressemblent plus à ce qu'ils sont chez les mâles ou chez les femelles dont les ovaires sont peu développés. Non seulement le métathorax reste parfaitement immobile, mais les contractions expiratoires devenues difficiles, au lieu de s'opérer simultanément dans les différents somites, ne s'effectuent plus que localement dans un petit nombre de somites à la fois et souvent d'une manière progressive.

Cette observation assez importante, au point de vue pratique, et que j'ai pu faire sur des femelles pleines de *Carabus auratus* et d'*Abax striola,* montre que, sous peine de commettre de véritables erreurs, il faut rejeter, pour les expériences sur la forme des mouvements respiratoires, tous les individus qui se trouvent dans l'état défavorable signalé ci-dessus.

Ainsi, dans le cas de l'*Abax striola* femelle prête à pondre, j'aurais pu déduire faussement des silhouettes l'existence d'une onde et l'immobilité du métathorax, alors qu'en réalité, chez les Carabiques, l'onde fait défaut et que le métathorax participe légèrement aux déplacements des arceaux tergaux de l'abdomen.

Digitized by Google

§ XXIII.

Tenebrio molitor [1].

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections)

Rathke cite le *Tenebrio molitor* parmi les Coléoptères dont il a examiné les mouvements respiratoires; il signale aussi ce détail que les arceaux tergaux de l'insecte en question sont assez transparents pour permettre à l'observateur de distinguer les déplaçements de quelques organes internes, tels que certains troncs trachéens. Rathke a, du reste, parfaitement compris que les petits mouvements des trachées ne sont point liés à l'acte respiratoire et dépendent, par exemple, des changements de diamètre du vaisseau dorsal [2]. A part cette remarque, l'auteur cité ne donne aucune indication spéciale concernant les Ténébrionides.

Les mouvements respiratoires du *Tenebrio* sont assez normaux et permettent de ranger cet insecte dans le voisinage des *Carabus*.

Si l'on prend la précaution de paralyser, par un petit support, les grands mouvements oscillatoires [3] que le Coléoptère imprime à l'ensemble de l'abdomen, on constate ce qui suit : la face tergale du métathorax participe, par entraînement, aux mouvements des premiers somites abdominaux.

Ces derniers mouvements se font en trois temps, c'est-à-dire qu'il existe, en expiration, une onde assez bien caractérisée :

1° Abaissement des faces tergales des somites 1, 2, 3, avec maximum en 2, 3;

2° Abaissement des faces tergales 4 et 5;

[1] Le lecteur trouve ici le *Tenebrio molitor* après les Carabes et avant les Cicindèles, au mépris de toute classification entomologique.

J'ai déjà dit, dans ma communication préliminaire, qu'il n'existe aucune relation *étroite* entre la forme des mouvements respiratoires d'un insecte et la place occupée par celui-ci dans les classifications. La suite du travail actuel le prouvera suffisamment.

Le *Tenebrio* figure en ce point de mon Mémoire parce que ses mouvements respiratoires ont beaucoup d'analogie avec ceux des Carabiques.

[2] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc., op. cit., p. 104.

[3] Non respiratoires.

Digitized by Google

3° Incurvation de l'extrémité de l'abdomen vers le bas.

La diminution du diamètre vertical de l'abdomen, dans la phase expiratoire et au niveau des somites 2, 3, est d'environ $^1/_{16}$.

La longueur de l'abdomen ne varie pas d'une façon sensible.

Il faut noter, enfin, des arrêts en inspiration, courts mais évidents.

§ XXIV.

Cicindela hybrida.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Les Cicindèles, qui sont des insectes extrêmement vifs et agiles, offrent des mouvements respiratoires d'une amplitude assez considérable, beaucoup plus grande, par exemple, que celle de ces mêmes mouvements chez les Carabes. Chez la *Cicindela hybrida* la diminution du diamètre vertical de l'abdomen, en expiration, varie entre $^1/_{10}$ et $^1/_7$, tandis qu'elle n'est que de $^1/_{26}$ chez le *Carabus auratus*.

Le mécanisme respiratoire est, du reste, celui que l'on observe chez le plus grand nombre des Coléoptères.

L'abdomen exécute deux espèces de mouvements : 1° des mouvements d'oscillation de haut en bas dont nous n'avons pas à nous préoccuper et qu'on annule à peu près complètement en faisant reposer l'un des derniers segments sur une épingle coudée à angle droit ; 2° des mouvements respiratoires vrais.

J'ai observé ceux-ci au grossissement de 11, tantôt chez la Cicindèle dont la face tergale de l'abdomen était absolument nue, tantôt chez la Cicindèle dont quelques-uns des arceaux tergaux étaient garnis de petits styles collés au baume du Canada.

Les arceaux tergaux s'abaissent, en expiration, et, dans ce mouvement, leur portion médiane descend un peu plus que leurs parties latérales ; ils deviennent plus plats.

Le maximum d'effet a lieu pour les somites 2 et 3.

Digitized by Google

Les arceaux tergaux 1, 2, 3 glissent un peu en arrière ; les arceaux 5 et 6 s'inclinent en avant; le profil longitudinal de la face tergale devient ainsi concave et l'extrémité de l'abdomen se relève faiblement.

Les régions épimériennes paraissent immobiles. Tous les mouvements sont simultanés; il n'y a pas d'onde. Les segments thoraciques postérieurs ne bougent pas. Enfin, en expiration, l'abdomen se raccourcit d'une petite quantité; environ $^1/_{40}$ de la longueur abdominale totale.

§ XXV.

Scarabéiens.

(Historique.)

Les Scarabéiens et les Lucaniens sont les Coléoptères dont la respiration a fait, à des titres divers, l'objet du plus grand nombre d'observations. Cette préférence s'explique aisément par les dimensions qu'atteignent plusieurs de ces insectes et par la facilité avec laquelle on se procure quelques formes très communes.

Avant d'aborder l'exposé de mes études personnelles, je rappellerai brièvement les résultats que mes prédécesseurs ont obtenus ou ont cru obtenir.

Sorg [1] a examiné les mouvements respiratoires du *Lucanus cervus;* il a constaté que ces mouvements étaient rhythmiques et que l'expiration s'effectuait d'une façon rapide tandis que l'inspiration avait lieu avec plus de lenteur.

Treviranus [2], guidé par une théorie évidemment fausse de Comparetti [3], a cherché vainement à voir des contractions spontanées dans les trachées de l'*Oryctes nasicornis*.

1 Sorg. *Disquisitiones physiologicae circa respirationem insectorum*, etc., p. 27. Rudolfstadt, 1805.

2 Treviranus. *Biologie oder Philosophie der Lebenden Natur*, 4ter Bd., p. 161. Göttingen, 1814.

3 Comparetti. *Dinamica animale degli Insetti*, part. II, p. 505, 506 et 508. Padova, 1800. (Treviranus cite un autre travail de Comparetti : *Obs. anat. de aure interna*, p. 290, qui a échappé jusqu'à présent à mes recherches.)

Digitized by Google

Les *Geotrupes* ont occupé Schenck [1], Hausmann [2], Rathke [3] et Packard [4]. Hausmann a voulu répéter sur ces Coléoptères l'expérience qui consiste à mettre en évidence les contractions et les dilatations de l'abdomen par les oscillations d'une colonne liquide [5]; Rathke a étudié les mouvements respiratoires du *Geotrupes stercorarius* et Packard a fait quelques observations sur les allures du même insecte lorsqu'il se prépare à voler.

Marcel de Serres [6] a examiné la structure des somites abdominaux des *Cetonia* et Rathke a étendu à ce genre les études auxquelles il s'était livré sur les *Geotrupes*.

Le Hanneton (*Melolontha vulgaris*) a été observé plusieurs fois, au point de vue du mécanisme respiratoire, mais presque toujours d'une façon superficielle et incomplète. Straus-Durckheim [7] parle en termes fort vagues des mouvements abdominaux; Burmeister [8] prétend avoir constaté que l'insecte est en expiration complète durant le vol; Dugès [9] signale les mouvements de rentrée et de sortie de la tête et du thorax; Graber [10] prend le Hanneton comme exemple pour faire comprendre que, chez les Coléoptères, les arceaux sternaux de l'abdomen restent à peu près immobiles, alors que les arceaux tergaux s'élèvent et s'abaissent. Enfin Langendorff, dans le travail qu'il a publié postérieurement à ma notice préliminaire [11], expose comment il a appliqué la méthode graphique à l'étude des mouvements respiratoires du

1 Schenck. *Epistola ad auctorem Gammarologiae* (dans Sachs. *Gammarologia*, p. 935. Francoforti et Lipsiae, 1665). Schenck se sert du terme vague de *Scarabaeus*.

2 Hausmann. *De animalium exsanguium respiratione commentatio*, p. 8. Hannoverae, 1803.

3 *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über den Athmungs-Prozess der Insekten*, pp. 101 à 103.

4 Packard. *Second Report of the United States Entomological commission*, etc., p. 181 (en note). Washington, 1880.

5 Voyez § III du présent mémoire.

6 Marcel de Serres. *Observations sur les usages du vaisseau dorsal* (Mém. du Muséum d'hist. nat. de Paris, t. IV et t. V. Paris, 1818-1819), p. 85 du tiré à part publié en 1818.

7 Straus-Durckheim. *Considérations générales sur l'anatomie comparée des animaux articulés*, p. 322. Paris, 1828.

8 Burmeister. *Handbuch der Entomologie*, 1ter Bd., p. 420. Berlin, 1832.

9 Dugès. *Traité de physiologie comparée*, etc., t. II, p. 556. Montpellier, 1838.

10 Graber. *Die Insekten*, 1te Theil, p. 108. München, 1877.

11 *Das Athmungscentrum der Insecten*, Op. cit., pp. 82, 83 et 84.

Digitized by Google

Hanneton et reproduit plusieurs tracés destinés à montrer l'influence irritante de la fumée de tabac et la persistance des mouvements de respiration après la décapitation. Je passe nécessairement les auteurs qui se sont bornés à rappeler un fait connu de tout le monde : les mouvements respiratoires amples et rhythmés par lesquels le Hanneton remplit d'air son système trachéen avant de s'envoler.

La série d'observations que je viens de citer est assez longue et cependant, si l'on excepte les recherches consciencieuses et méthodiques de Rathke, il serait impossible à l'aide des autres de tracer, avec exactitude, le tableau des mouvements respiratoires d'un seul Scarabéien. Rathke lui-même généralise trop. J'estime donc qu'une étude nouvelle et aussi complète que possible du mécanisme respiratoire de quelques-uns des Coléoptères du groupe en question peut offrir un intérêt réel.

Je me suis servi de l'*Oryctes nasicornis* et du Hanneton pour effectuer le plus grand nombre de mes expériences; j'ai soumis, en outre, à un examen assez détaillé les quatre formes suivantes : *Phyllopertha horticola*, *Geotrupes sylvaticus*, *Onthophagus nuchicornis* et *Trichius abdominalis*.

§ XXVI.

Oryctes nasicornis.

(Étude des mouvements respiratoires de l'*Oryctes* par la méthode graphique.)

L'*Oryctes nasicornis*, très robuste, déplace aisément un levier en contact avec les parties mobiles de ses téguments. Ce serait, à cet égard, un Coléoptère à choisir de préférence à tout autre, pour les expériences graphiques, s'il ne faisait constamment effectuer à son abdomen des mouvements violents d'élévation et d'abaissement, absolument distincts des mouvements respiratoires et qui apportent toujours un trouble plus ou moins considérable en masquant partiellement les déplacements inspiratoires et expiratoires vrais.

Digitized by Google

Le graphique H que je reproduis à titre d'exemple a été fourni par un individu privé complètement de ses élytres et dont l'abdomen était, par

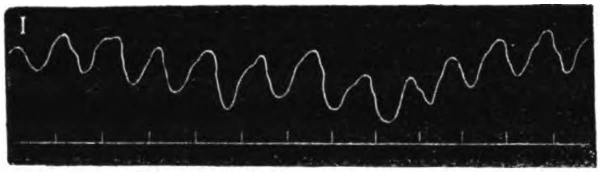
← Sens de la rotation du cylindre.

conséquent, absolument libre. Le levier transversal reposait sur le milieu de la face tergale du 4e somite.

Les grandes ondulations du tracé répondent aux mouvements généraux de l'abdomen qui se présentent de trois à cinq fois par minute; les petites répondent aux mouvements respiratoires qui se répètent environ trente-cinq fois dans le même laps de temps.

On arrive à diminuer beaucoup les mouvements abdominaux en conservant les élytres et en se bornant à y pratiquer une fenêtre située au-dessus de la portion du corps avec laquelle on veut mettre le levier en rapport. Il est cependant impossible d'annuler les mouvements de l'abdomen d'une façon complète.

Le graphique I a été tracé par un individu placé dans les conditions



← Sens de la rotation du cylindre.

favorables que je viens d'indiquer, le talon du levier transversal reposant, encore une fois, sur la face tergale du 4e somite.

Les mouvements généraux de l'abdomen, notablement moins accusés

Digitized by Google

que dans le cas précédent, ont lieu quatre fois par minute. Quant aux mouvements respiratoires proprement dits, ils sont très rapides; on en compte quarante-neuf par minute [1]. Cette rapidité n'est pas un fait isolé; presque tous les nombreux *Oryctes* soumis à mes expériences offraient la même particularité; les quelques individus dont la respiration s'effectuait lentement étaient manifestement malades.

Comme chez l'Hydrophile excité et qui, dans ce cas exceptionnel seulement, présente un rhythme respiratoire presque aussi pressé, il n'y a chez l'*Oryctes* ni pause inspiratoire ni pause expiratoire (voyez § XI).

Le tracé fourni par l'*Oryctes* montre en outre, comme ceux produits par les autres Coléoptères, que l'inspiration offre une vitesse décroissante et que l'expiration détermine une chute brusque du levier.

Dès à présent, et en nous basant sur ce que nous ont appris les insectes étudiés dans les paragraphes précédents, nous sommes en droit de supposer : 1° qu'il n'existe pas de muscles inspirateurs et 2° que les muscles expirateurs de l'*Oryctes* sont puissants. On verra plus loin que ces suppositions sont parfaitement exactes.

[1] Ce rhythme rapide se maintient dans une série de graphiques successifs obtenus à l'aide du même individu.

Digitized by Google

§ XXVII.

Étude des mouvements respiratoires de l'*Oryctes* par la méthode des projections.

L'abdomen de l'insecte comprend huit somites apparents; les faces tergales des six premiers sont seules mobiles; les deux derniers somites forment, on le sait, le grand bouclier convexe et lisse qui dépasse le bord postérieur des élytres.

1re *Expérience.* — Un mâle vif, privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes, est placé dans l'instrument transversalement au faisceau lumineux, de façon à obtenir la silhouette du profil du Coléoptère. Des styles verticaux ont été collés sur le milieu des faces tergales des somites abdominaux 2, 4 et 6.

La même combinaison fâcheuse, déjà signalée, des mouvements généraux de l'abdomen et des mouvements respiratoires vrais se présente. Cependant, avec de la patience et en y mettant le temps nécessaire, je suis parvenu à ne dessiner que les phases respiratoires proprement dites (fig. 58, pl. I).

Les expirations sont assez profondes, la diminution du diamètre vertical de l'abdomen atteignant $^1/_{10}$ à la hauteur du 3e somite.

2e *Expérience.* — L'insecte est placé longitudinalement dans l'axe du rayon lumineux, de manière à fournir une silhouette qui représente la coupe de l'abdomen. Pour des raisons inutiles à détailler et qui tiennent à la forme de l'*Oryctes,* je suis obligé de mettre au point pour le 4e somite abdominal. Des styles ont été fixés au milieu de la face tergale du somite, sur les bords latéraux de cette face et sur les bords épimériens (fig. 59, pl. II).

L'expérience réussit parfaitement et permet d'analyser tous les détails que présentent les mouvements respiratoires dans un somite abdominal déterminé.

Digitized by Google

Je résume ci-dessous l'ensemble des résultats auxquels je suis arrivé par l'emploi successif de la méthode graphique et de la méthode des projections :

Faits généraux.

1° Les faces tergales du mésothorax et du métathorax restent immobiles.

2° Les mouvements respiratoires ont lieu à la fois pour tous les somites dont les arceaux tergaux peuvent se mouvoir ; il n'y a pas d'onde.

3° De même que chez le *Lucanus cervus* observé par Sorg, la dilatation en inspiration est plus lente que la contraction expiratoire.

4° L'abdomen offre des changements de longueur très faibles ($^1/_{80}$ de la longueur abdominale totale).

5° La face sternale des somites ne participe point aux mouvements de respiration.

6° Les oscillations amples de l'abdomen sont beaucoup plus espacées que les mouvements d'inspiration et d'expiration et constituent un phénomène étranger à l'acte respiratoire.

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
Les faces tergales des somites 1 et 2 basculent en arrière.	Les faces tergales des somites 1 et 2 deviennent à peu près horizontales.
La face tergale du somite 1 se dégage de dessous le métathorax.	La face tergale du somite 1 pénètre un peu sous le métathorax.
La face tergale du somite 3 s'abaisse à peu près verticalement et descend le plus bas. Celles des somites 4, 5, 6 s'inclinent un peu en avant pendant leur descente.	Les faces tergales des autres somites mobiles s'élèvent.
Les arceaux tergaux chevauchent légèrement les uns sur les autres et le profil longitudinal de la face dorsale de l'abdomen devient concave.	Le profil longitudinal de la face dorsale de l'abdomen devient à peu près rectiligne.
La courbure des arceaux tergaux se modifie, leur partie centrale s'abaissant un peu plus que leurs extrémités latérales; ils deviennent un peu plus plats.	En s'élevant, les arceaux tergaux deviennent plus convexes dans le sens transversal.
Les stigmates portés par la zone molle latérale [1] s'inclinent légèrement en dedans.	Les stigmates mobiles redeviennent à peu près horizontaux.
Les épimères cèdent un peu dans le même sens.	Les épimères retournent à leur position première.
L'abdomen se raccourcit très légèrement ($^1/_{80}$ de la longueur abdominale).	L'abdomen reprend sa longueur primitive.

[1] Il y a chez l'*Oryctes* trois stigmates postérieurs percés dans des portions fixes de téguments.

Digitized by Google

§ XXVIII.

Muscles respiratoires de l'Oryctes.

En comparant les figures ci-jointes (21, 22 et 23) du système musculaire abdominal de l'*Oryctes* à celles qui représentent le même système

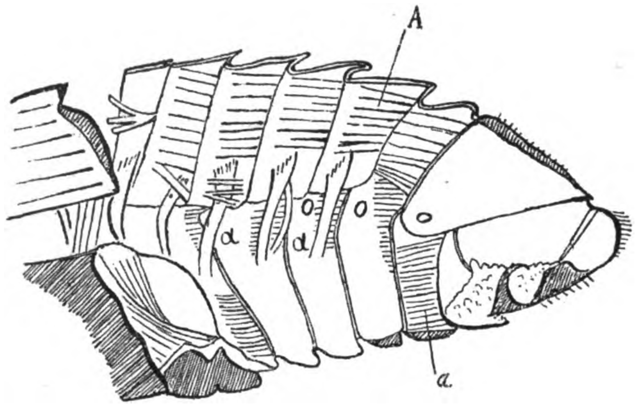


Fig. 21 × 4. — Muscles de la moitié droite de l'abdomen de l'*Oryctes nasicornis* ♀.
A et *a*. Muscles longitudinaux.
α Muscles expirateurs verticaux.

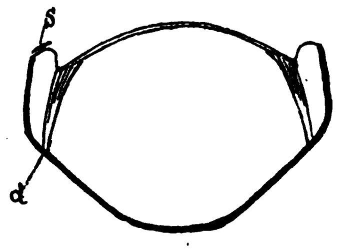


Fig. 22 × 3. — *Oryctes*.
Coupe transversale du 4ᵉ somite abdominal.
S Position spéciale du stigmate dans ce somite.
α Muscle expirateur.

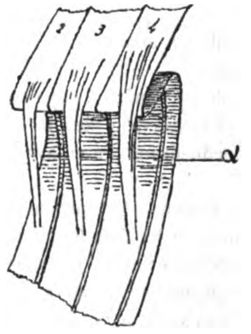


Fig. 23 × 6. — *Oryctes*.
Muscles expirateurs verticaux des somites abdominaux 2, 3 et 4. Les arceaux tergaux ont été renversés en dehors.

chez l'Hydrophile, le Dytique et le Hanneton, on voit que les muscles expirateurs verticaux *α α* sont ici proportionnellement plus robustes et surtout plus longs.

Rathke [1] a cru remarquer que chez les Coléoptères dont les mouvements respiratoires sont énergiques, les muscles expirateurs sont plus forts que chez les autres formes à mouvements respiratoires moins profonds.

Je ne sais si cette observation est sérieuse, car Rathke n'avait à sa disposition aucun moyen de mesurer l'amplitude des mouvements respiratoires des animaux qu'il étudiait.

Si l'on consulte le tableau II du § XCII, tableau que la méthode des projections m'a permis de dresser, on constate que l'*Oryctes nasicornis* ne figure pas parmi les Coléoptères dont la diminution relative du diamètre vertical de l'abdomen en expiration est considérable; j'ai dû le ranger dans le groupe chez lequel cette diminution n'a qu'une valeur moyenne, tandis que l'Hydrophile et le Hanneton, à muscles expirateurs moins développés et plus courts, appartiennent, au contraire, à la catégorie des insectes à mouvements expiratoires très amples.

Les muscles expirateurs de l'*Oryctes* ne sont point décomposés en deux faisceaux, comme ceux de l'Hydrophile ou du Dytique; ils sont simples; disposition qui paraît très répandue et que Rathke considérait, à tort, comme générale chez les Coléoptères.

Les muscles inspirateurs manquent; l'inspiration est donc passive.

§ XXIX.

Expériences sur le système nerveux de l'Oryctes nasicornis.

J'ai analysé partiellement (§§ XIV et XX) les recherches de Faivre concernant l'influence des diverses régions du système nerveux du Dytique sur les mouvements respiratoires de ce Coléoptère et j'ai cherché à montrer, à l'aide d'expériences personnelles effectuées sur l'Hydrophile et sur le Dytique, que les conclusions de l'auteur étaient fausses; les effets obtenus provenant de la forme condensée du système nerveux.

La chaîne nerveuse de l'*Oryctes* offrant, comme celle de la plupart des

[1] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, Op. cit., p. 102.

Digitized by Google

Scarabéiens, une condensation poussée à l'extrême, il m'a semblé qu'il serait très intéressant de répéter sur cet insecte une partie des expériences de Faivre, afin de pouvoir mettre, plus tard, les résultats en parallèle avec ceux que fournissent les Acridiens et les Odonates, animaux dont presque tous les centres nerveux sont restés bien séparés.

Je rappellerai que les masses ganglionnaires distinctes les unes des autres à l'*œil nu,* les seules, par conséquent, sur lesquelles on puisse agir expérimentalement, sont, chez l'*Oryctes :* une masse cérébroïde, une masse sous-œsophagienne, une masse prothoracique, enfin, une masse mésothoracique résultant de la soudure complète des ganglions du mésothorax, du métathorax et de *tous* les ganglions abdominaux.

Ce dernier groupe complexe est situé dans l'intérieur du thorax, juste au-dessus de l'espace qui sépare les hanches de la première et de la deuxième paire.

L'abdomen ne contient aucun centre nerveux de la vie animale; il n'est traversé que par des nerfs [1].

Il résulte théoriquement de la disposition du système nerveux de l'*Oryctes* qu'aucune lésion des connectifs ou des ganglions antérieurs à la masse mésothoracique n'abolira les mouvements respiratoires abdominaux; mais que

[1] Pour le système nerveux des Scarabéiens, on consultera utilement les ouvrages suivants :

STRAUS-DURCKHEIM. *Considérations générales sur l'anatomie comparée des animaux articulés,* pl. IX (*Melolontha*). Paris, 1828.

ÉM. BLANCHARD. . *Règne animal de Cuvier,* édition Masson. *Insectes, atlas,* pl. III (*Melolontha*). Paris, 1849.

ED. BRANDT. . . *Vergleichend-Anatomische Skizze des Nervensystems der Insekten* (HORAE SOCIETATIS ENTOMOLOGICAE ROSSICAE, Bd. XV, 1879). (*Geotrupes, Aphodius, Ateuchus, Melolontha, Cetonia.*)

ID. . . . *Ueber die Metamorphosen des Nervensystems der Insekten* (IBID., Bd. XV, 1879). (*Melolontha.*)

ID. . . . *Vergleichend Anatomische Untersuchungen über das Nervensystem der Käfer* (IBID., Bd. XV, 1879). (*Aphodius, Rhizotrogus,* etc.)

ID. . . . *Ueber das Nervensystem der Blatthörner* (*Lamellicornia*) (IBID., Bd. XIV, 1879). (*Cetonia, Geotrupes, Ateuchus.*)

MICHELS . . . . *Beschreibung des Nervensystems von Oryctes nasicornis im Lärven, Puppen und Käferzustande* (ZEITSCHR. F. WISS. ZOOL., Bd. XXXIV, 1880).

Digitized by Google

toute excitation ou toute lésion de la masse nerveuse complexe du mésothorax pourra avoir un effet *simultané* immédiat sur la motilité des membres mésothoraciques, des membres métathoraciques et des anneaux de l'abdomen.

Les expériences qui suivent confirment cette hypothèse. Je les ai rangées de telle façon que le lecteur peut constater successivement les résultats de l'excitation ou de la destruction des différents centres nerveux, lorsque l'on procède d'avant en arrière, de la tête vers l'abdomen.

1re *Expérience.* — Après avoir observé, chez un *Oryctes,* les mouvements respiratoires et les mouvements généraux de l'abdomen, on lui enlève la tête.

Les centres cérébroïdes et sous-œsophagiens sont ainsi supprimés; cependant l'insecte continue à effectuer les deux espèces de mouvements : oscillations prononcées de l'abdomen et abaissements rhythmiques des arceaux dorsaux. Les déplacements en question sont à peu près exactement les mêmes que chez l'animal intact et l'on ne constate d'affaiblissement manifeste qu'après 15 minutes environ.

Cette expérience n'est que la centième répétition, peut-être, d'une opération effectuée dans des buts divers par Boyle, Lyonet, Walckenaer, Treviranus, Straus-Durckheim, Burmeister, Dugès, Newport, Dujardin, Blanchard, Yersin, Rathke, Faivre, Baudelot, Yung et tous ceux qui ont étudié les propriétés des centres nerveux des articulés. Toujours ces nombreux observateurs ont vu persister, chez les Arthropodes décapités ou privés de leurs ganglions cérébroïdes, des mouvements variés qui, si l'on analyse les descriptions, ne sont autre chose que des mouvements réflexes.

L'expérience sur l'*Oryctes* devait être faite pour compléter la série. Elle prouve, comme, du reste, des faits déjà cités dans ce mémoire et d'autres à exposer plus loin, que les mouvements respiratoires des insectes appartenant à la même catégorie, sont des *mouvements réflexes*.

Les mouvements de ce genre, tout en ayant lieu habituellement sans l'intervention des centres nerveux volontaires (représentés ici par les ganglions cérébroïdes), peuvent, de même que chez les vertébrés, être modifiés par des excitations ayant ces centres pour origine.

Digitized by Google

Ce fait incontestable, et dont je citerai encore des exemples dans la suite du mémoire, conduit à une explication assez plausible des résultats obtenus par la destruction des ganglions cérébroïdes seuls, ou par la décapitation chez l'Hydrophile, le Dytique et le Carabe (§§ XIV, XX et XXII) : la diminution d'amplitude constatée après l'opération tiendrait à ce que chez l'insecte fixé, et évidemment inquiet, l'amplitude des mouvements respiratoires est un peu plus forte qu'à l'état parfaitement normal. Si l'on détruit les centres nerveux d'où émane cette excitation momentanée, les mouvements de respiration redeviennent à peu près ce qu'ils eussent été chez l'animal en liberté et au repos.

Il suit de là qu'en excitant les ganglions cérébroïdes on doit obtenir soit une augmentation d'amplitude, soit une accélération. L'expérience suivante semble répondre à une partie de ce programme.

2e *Expérience.* — On pique la masse cérébroïde à l'aide d'une aiguille. L'*Oryctes* exécute le mouvement de manège qui indique que l'on a bien atteint les centres voulus. Le nombre des mouvements respiratoires, par minute, s'élève un peu; il monte de trente-huit par minute à cinquante-huit.

Le résultat ci-dessus peut, cependant, être dû à une cause plus générale que celle qu'il paraît prouver au premier abord. Comme l'accélération notée chez le Dytique après la destruction des ganglions cérébroïdes et comme l'accélération observée chez l'*Oryctes,* dans l'expérience qui suit (après la suppression des ganglions prothoraciques), l'augmentation du nombre des mouvements respiratoires par minute consécutive à la piqûre de la masse sus-œsophagienne pourrait provenir de ce fait que, dans une certaine limite, toute lésion des régions antérieures de la chaîne nerveuse retentit sous forme d'excitation temporaire sur les régions postérieures de cette chaîne de façon à déterminer un rhythme respiratoire plus pressé.

3e *Expérience.* — Un *Oryctes* respire soixante fois par minute ; on détruit la masse ganglionnaire prothoracique ; on constate, comme preuve de l'opération, la paralysie des pattes de la première paire. La respiration s'accélère notablement, le nombre des mouvements respiratoires par minute étant successivement soixante-treize, soixante-quinze, soixante-dix-huit.

Digitized by Google

4e *Expérience.* — On sectionne les connectifs reliant les ganglions prothoraciques à la masse complexe du mésothorax. Les pattes conservent leur motilité, mais la coordination de leurs mouvements a disparu. L'*Oryctes* se renverse constamment sur le dos. Les mouvements respiratoires, devenus très faibles, sont douteux.

5e *Expérience.* — Le résultat précédent n'étant pas satisfaisant, on opère, de la même façon, sur un nouvel individu. Phénomènes identiques du côté des pattes. Cette fois on constate nettement la persistance des mouvements respiratoires. Ils sont faibles et, lors de l'observation directe, sont masqués par les déplacements généraux de l'abdomen.

On immobilise la région abdominale et, dès ce moment, les mouvements respiratoires vrais deviennent incontestables.

Toutes les expériences qui précèdent ont fourni sensiblement les mêmes résultats que les essais analogues auxquels Faivre a soumis le Dytique; la conclusion de cet auteur : « persistance des mouvements respiratoires après la section des connectifs en avant du ganglion mésothoracique », est entièrement applicable à l'*Oryctes.*

6e *Expérience.* — On pique, à l'aide d'une aiguille, la masse mésothoracique qui comprend, ne l'oublions pas, des ganglions thoraciques proprement dits et *tous* les ganglions abdominaux.

A l'état très calme, l'*Oryctes* respirait environ vingt-cinq fois par minute; excité par les manipulations préparatoires à l'expérience, il respire trenteneuf fois dans le même temps.

Après la piqûre, le rhythme s'accélère encore, le nombre de mouvements respiratoires monte brusquement à quarante-six par minute, mais retombe bientôt à vingt-cinq, chiffre initial.

7e *Expérience.* — On excite de nouveau par une piqûre d'aiguille la même masse mésothoracique et par suite, comme on va le voir, les ganglions abdominaux qui en font partie.

L'insecte, à peu près calme, respirait quarante-trois fois par minute.

Digitized by Google

Au moment de la piqûre les mouvements respiratoires cessent; seulement l'abdomen est à l'état d'*expiration forcée,* preuve évidente de l'excitation des centres nerveux régissant les muscles expirateurs verticaux.

Au bout de quelques minutes apparaissent de faibles pulsations respiratoires (quarante-quatre par minute), sans que l'état général en expiration ait cessé. Quinze minutes plus tard, les mouvements respiratoires normaux, réguliers et profonds se rétablissent. On en compte successivement vingt-quatre, trente-cinq, vingt-huit, par minute.

8e *Expérience.* — Un *Oryctes* fait soixante mouvements respiratoires par minute. On divise en deux, transversalement, la masse mésothoracique, opération qui semblerait, au premier abord, devoir amener la séparation, à l'état intact, de quelques-uns des centres postérieurs abdominaux; mais il n'en est rien, les ganglions abdominaux sont tous lésés en même temps. Les trois paires de pattes sont immédiatement paralysées et les mouvements respiratoires cessent. L'arrêt de l'abdomen a lieu cette fois en *inspiration.*

Cet arrêt en inspiration et non dans une position mixte, après la destruction des centres excitateurs de mouvement des muscles abdominaux, est une preuve nouvelle s'ajoutant à toutes les autres de la passivité du mouvement inspiratoire chez les Coléoptères.

La série des expériences 6, 7, 8 démontre que lorsqu'on excite ou qu'on détruit partiellement, chez un articulé, une masse nerveuse complexe résultant de la soudure de centres ganglionnaires successifs, les excitations ou les lésions retentissent fatalement dans *tous* les centres nerveux constituants.

Un fait curieux signalé par Paul Bert en 1878 [1] rentre dans le même ordre de phénomènes. Le savant physiologiste a observé que si l'on pique, à l'aide d'une aiguille fine, la masse ganglionnaire thoracique d'une araignée, on abolit immédiatement *tous* les mouvements spontanés et réflexes et non ceux de telle ou telle paire de pattes dont les centres spéciaux répondraient à l'endroit précis de la piqûre.

[1] Société de Biologie, 1878.

Digitized by Google

Mes expériences prouvent donc qu'il est impossible de déterminer expérimentalement, chez les Coléoptères à système nerveux condensé, des propriétés distinctes, spéciales, dans les ganglions thoraciques postérieurs et abdominaux antérieurs soudés entre eux.

9e *Expérience.* — J'ai dit, plus haut, que l'abdomen de l'*Oryctes* ne renferme pas de ganglions, qu'il ne contient que des nerfs conducteurs. Ceux-ci passent du thorax dans la cavité abdominale sous la forme d'un faisceau dont les éléments ne s'écartent qu'au bout d'un certain trajet.

On sectionne ce faisceau; les pattes pro- et mésothoraciques conservent leur motilité; les pattes métathoraciques sont paralysées [1]; l'abdomen offre encore des mouvements généraux autour de son articulation sur le métathorax; mais les mouvements respiratoires vrais sont abolis. *Tous* les somites sont immobilisés en *inspiration.*

10e *Expérience.* — Section du même faisceau nerveux indiqué dans l'expérience précédente. Nouvel arrêt des mouvements respiratoires en *inspiration.*

§ XXX.

ONTHOPHAGUS NUCHICORNIS.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Comme les autres Scarabéiens, l'*Onthophage* offre deux espèces de mouvements abdominaux : des mouvements oscillatoires dans le sens vertical et des mouvements respiratoires proprement dits. Les difficultés de l'analyse sont assez grandes parce que le rhythme, si je puis m'exprimer ainsi, des mouvements de balancement de l'abdomen concorde à peu près avec celui des mouvements respiratoires vrais. Jamais je ne serais parvenu à observer les faits d'une manière claire sans la méthode des projections.

1 Fait complètement d'accord avec les descriptions et les figures de Michels qui représentent les cordons nerveux des pattes de la troisième paire comme associés au faisceau commun des nerfs destinés à l'abdomen. En coupant ce faisceau, on doit donc, nécessairement, abolir la motilité dans les pattes postérieures.

Digitized by Google

Cette méthode permet de voir que les arceaux dorsaux se déplacent de la même manière que chez l'*Oryctes ;* ils descendent à peu près verticalement en expiration, le maximum d'effet ayant lieu pour le quatrième. Les expirations sont assez profondes; la diminution du diamètre vertical de l'abdomen atteint $^1/_{11}$ au niveau du 4^e somite.

Les rebords épimériens très rigides ne s'inclinent pas en dedans; le métathorax reste immobile et la longueur de l'abdomen ne varie point d'une façon appréciable.

L'observation directe à la loupe ferait croire à l'existence d'une onde; des contractions expiratoires successives ayant fréquemment lieu, tantôt d'arrière en avant, tantôt d'avant en arrière. Mais avec un peu d'attention et surtout à l'aide des silhouettes, on peut s'assurer qu'entre deux mouvements de ce genre se placent, la plupart du temps, plusieurs expirations régulières ayant lieu *simultanément* dans tous les arceaux dorsaux mobiles.

Je suis persuadé que les contractions ondulatoires sont en relation avec les efforts que l'insecte fait pour se dégager et qu'elles n'existent très probablement pas chez les individus intacts et libres.

§ XXXI.

Geotrupes sylvaticus.

Placé dans l'appareil à projection, l'insecte imprime à l'ensemble de son abdomen des mouvements oscillatoires si violents et si étendus qu'il est impossible de dessiner une silhouette satisfaisante.

J'ai pu constater, par l'observation directe, sur des individus chez lesquels une fenêtre avait été pratiquée dans les élytres, que les mouvements respiratoires sont, d'une façon générale, ceux des autres Scarabéiens et que les arrêts qui se présentent de temps à autre ont toujours lieu en inspiration.

Chez l'animal décapité, la forme des mouvements respiratoires reste la même. Le rhythme, d'abord accéléré pendant les instants qui suivent l'opération, ne tarde pas, au bout de quelques minutes, à redevenir à peu près ce qu'il était chez l'individu intact.

Digitized by Google

§ XXXII.

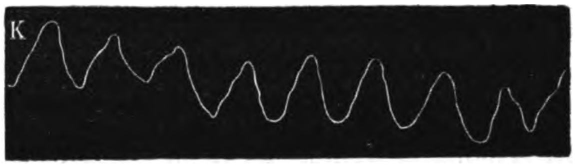
HANNETON (MELOLONTHA VULGARIS).

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode graphique.)

Le Hanneton n'est pas à recommander comme sujet d'expériences en raison de l'irrégularité de ses mouvements respiratoires. Tel individu fait mouvoir le levier avec une rapidité gênante et en lui imprimant des mouvements d'une grande amplitude, alors que d'autres, tout aussi vivaces en apparence et placés dans des conditions expérimentales identiques, ne produisent que des ondulations peu régulières ou tremblées. Je ne suis parvenu à obtenir quelques graphiques convenables qu'en répétant mes essais un grand nombre de fois.

Comme l'*Oryctes*, l'Onthophage et le Géotrupe, le Hanneton fait exécuter à son abdomen des mouvements de haut en bas et de bas en haut qu'il faut distinguer des mouvements respiratoires proprement dits.

Une femelle très vigoureuse, munie d'une fenêtre aux élytres et supportant un levier transversal reposant sur la face tergale de l'abdomen, à la limite des somites 3 et 4, a donné le graphique K ci-dessous, dans lequel



⟵ Sens de la rotation du cylindre.

on voit l'influence des mouvements généraux de l'abdomen. On observait de cinq à douze mouvements respiratoires entre deux mouvements abdominaux et, pendant chacun de ces derniers, deux à trois mouvements respiratoires vrais.

J'ai facilement annulé les oscillations de l'abdomen en fixant l'extrémité de celui-ci à l'aide d'une épingle. Il arrive, dans ce cas, que le tracé respi-

Digitized by Google

ratoire n'est nullement altéré dans sa forme; cependant, dans plusieurs expériences, j'ai pu constater que la précaution était plutôt nuisible qu'utile.

En comparant le graphique des mouvements respiratoires du Hanneton à celui des mouvements respiratoires de l'*Oryctes,* le lecteur sera frappé de la presque identité existant entre les façons de respirer de ces deux insectes : vitesse très grande (trente-neuf mouvements par minute), pas de pauses ni en inspiration ni en expiration; inspiration à vitesse décroissante, expiration représentée par une chute brusque du levier. La courbe respiratoire du Hanneton ne diffère de celle de l'*Oryctes* que par un détail : l'inspiration et l'expiration paraissent être à peu près aussi rapides l'une que l'autre et semblent s'effectuer dans des temps sensiblement égaux.

Pour m'assurer s'il n'existait réellement pas de pause, soit en inspiration, soit en expiration, j'ai laissé un individu se fatiguer, pendant 15 à 20 minutes, à déplacer un levier, puis j'ai pris un graphique. Ce dernier accuse un grand ralentissement (vingt mouvements par minute); mais on n'y observe aucune pause véritable.

Ce n'est que chez les Hannetons épuisés qu'on obtient une sorte de plateau arrondi au sommet de la partie inspiratoire de la courbe; indiquant donc un repos relatif en inspiration.

Enfin, certains individus, après avoir respiré activement pendant quelque temps et d'une façon régulière, présentent de longues phases de repos durant lesquelles les somites abdominaux cessent absolument de bouger.

Dans ces périodes d'immobilité, l'abdomen est *toujours en inspiration,* fait qui permet de supposer que l'inspiration est passive comme chez les autres Coléoptères. L'étude des muscles nous en fournira, du reste, une preuve suffisante.

§ XXXIII.

(Étude des mouvements respiratoires du Hanneton par la méthode des projections.)

Quelques-uns des Hannetons essayés ont été capturés au vol dans mon jardin et ont été introduits presque immédiatement dans l'appareil; on ne peut donc soupçonner leurs mouvements respiratoires d'être alanguis par la

Digitized by Google

captivité. Les autres individus nourris pendant quelques jours s'étant comportés exactement de la même manière, l'ensemble des résultats obtenus me paraît mériter toute confiance.

Dans une première série d'expériences, les insectes étaient placés dans l'instrument de façon à donner une silhouette de leur profil longitudinal. De petits styles de papier étaient collés sur les arceaux dorsaux abdominaux 2, 4, 6, 7.

Le Hanneton exécutant, comme je l'ai dit plus haut, des mouvements d'élévation et d'abaissement de la pointe de l'abdomen, mouvements qui ne concordent point avec les mouvements respiratoires vrais, j'ai dessiné des silhouettes dans deux cas différents, dans le cas de l'abdomen libre et dans le cas de l'abdomen immobilisé par une épingle.

Une deuxième série d'expériences a eu pour but l'étude des mouvements présentés par les parties latérales des somites. Il s'agissait surtout de déterminer la valeur du déplacement des régions épimériennes. En effet, lorsqu'on observe directement, à la loupe, un Hanneton privé de ses élytres et de ses ailes, on voit, à chaque expiration, la zone molle qui porte les stigmates et qui unit, sur les bords, les arceaux dorsaux aux arceaux sternaux se déprimer fortement en formant un pli profond.

Il résulte de ce mouvement : 1° que les stigmates abdominaux 1 et 2, horizontaux en inspiration, deviennent presque verticaux et que le stigmate 3 devient très oblique ; 2° que les régions épimériennes, entraînées, s'inclinent en dedans.

Je n'étais parvenu ni par la méthode graphique qui ne m'a fourni à cet égard que des résultats indécis, ni par l'observation directe, à discerner si l'inclinaison des épimères en dedans, lors de l'expiration, est assez notable pour faire supposer un rétrécissement transversal de l'abdomen. C'est alors que j'ai eu recours à la méthode actuelle.

L'insecte privé de ses ailes et de ses élytres est placé longitudinalement dans l'axe du cône lumineux, de façon à donner, comme silhouette, la coupe répondant à peu près au 3e somite abdominal (voyez fig. 60, pl. II).

Dans un premier cas, des styles sont collés sur le milieu du 3e arceau tergal et sur les stigmates 3 (moitié gauche de la figure 60, *i*).

Digitized by Google

Dans un second cas (même individu) les styles sont portés par le milieu du troisième arceau tergal et par les régions épimériennes du même somite (moitié droite de la figure 60, *i'*).

Or il est aisé de voir, en comparant les silhouettes obtenues, que tandis que l'inclinaison des stigmates et de la zone molle qui les porte est considérable, les déplacements des régions épimériennes sont absolument insignifiants.

Voici le résumé des résultats fournis par la méthode graphique et par la méthode des projections :

Faits généraux.

1° L'inspiration et l'expiration s'effectuent à peu près avec la même vitesse et la même énergie; il n'y a point de pauses.

2° L'ensemble du méso- et du métathorax participe un peu aux mouvements respiratoires abdominaux.

3° Les mouvements de rentrée et de sortie de la tête et les déplacements du prothorax ne sont pas rhythmiques et paraissent indépendants des mouvements respiratoires ordinaires.

4° Même lorsque la pointe de l'abdomen est fixée, les faces sternales du mésothorax, du métathorax et de l'abdomen ne restent pas absolument immobiles; elles effectuent de petits mouvements d'élévation et d'abaissement.

5° Les mouvements respiratoires sont très profonds; la diminution du diamètre vertical de l'abdomen, en expiration, variant, suivant les individus, de $^1/_9$ à $^1/_7$.

6° Chez les Hannetons dont la pointe de l'abdomen est libre, celle-ci exécute des mouvements de haut en bas assez considérables, mais séparés par des intervalles de temps beaucoup plus longs que ceux qui séparent les mouvements respiratoires vrais. La pointe de l'abdomen décrivant un arc de cercle, dans un plan vertical, il n'y a ni allongement ni raccourcissement réel du corps.

7° Les déplacements ont lieu *à la fois* dans *tous* les somites offrant des mouvements respiratoires vrais; il n'y a, par conséquent, pas d'onde.

Remarque. — Il arrive fréquemment, lors du séjour du Hanneton dans l'appareil à projection, que l'insecte cherche à s'envoler. Il étend alors les moignons de ses élytres et fait entendre son bourdonnement caractéristique. Or on peut constater, sans exception, par les silhouettes, que l'abdomen du Coléoptère est alors à l'état d'*inspiration* forcée. L'inspiration dure aussi longtemps que le bourdonnement et cesse lorsque le Hanneton rabat les bases de ses élytres.

Burmeister que je citais au § XXV s'est donc complètement trompé et, comme il était facile de le prévoir théoriquement, le Hanneton est bien en inspiration pendant le vol.

Digitized by Google

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
Les faces tergales du méso- et du métathorax s'inclinent en avant [1]; en même temps les faces sternales des mêmes régions s'élèvent un peu.	Les faces tergales du méso- et du métathorax s'inclinent en arrière; les faces sternales des mêmes régions s'abaissent.
Il en résulte que tout l'ensemble du méso- et du métathorax bascule sur l'articulation pro-mésothoracique.	
Les arceaux dorsaux des six premiers somites abdominaux se déplacent comme suit : tous descendent; le maximum d'effet a lieu pour les somites 3 et 4; simultanément, 1 et 2 s'inclinent en arrière, 6 et même 7 s'inclinent en avant.	Les arceaux dorsaux des six premiers somites s'élèvent.
Les stigmates des trois paires abdominales antérieures s'inclinent fortement en dedans.	Les stigmates des trois premières paires abdominales reprennent une position horizontale.
Les rebords épimériens de l'abdomen rentrent d'une petite quantité.	Les rebords épimériens se portent faiblement en dehors.
Le profil longitudinal de la face tergale de l'abdomen devient concave.	Le profil longitudinal de la face tergale de l'abdomen devient légèrement convexe.
La face sternale de l'abdomen s'élève un peu, même chez les individus dont la pointe de l'abdomen est fixée.	La face sternale de l'abdomen s'abaisse.

D'après l'énumération qui précède, le Hanneton exécute non seulement des mouvements respiratoires abdominaux, mais présente, de plus, en même temps, des déplacements assez accusés des segments méso- et métathoraciques.

On serait tenté de relier ce fait physiologique à une disposition anatomique signalée par Straus-Durckheim [2] : au bord postérieur et inférieur du prothorax, dans la région tégumentaire molle qui unit le segment prothoracique au segment mésothoracique, il existe, chez le Hanneton, une paire de grands stigmates d'où partent des troncs trachéens importants.

Les mouvements du méso- et du métathorax pourraient donc être considérés comme produisant des appels et des expulsions d'air locaux dans la partie thoracique du corps des Coléoptères.

Je ne crois pas cependant qu'il faille attacher cette signification particulière aux mouvements en question; en effet : 1° les systèmes trachéens

[1] Il n'y a pas ici d'erreur : c'est bien *en avant* que j'ai voulu dire.

[2] *Considérations générales*, etc., op. cit., p. 79.

abdominaux et thoraciques communiquent largement entre eux; 2° les stigmates du thorax se retrouvent, par exemple, chez l'Hydrophile dont les mouvements thoraciques sont faibles et chez l'*Oryctes* dont le thorax est immobile.

Il est bien plus probable que les stigmates thoraciques fonctionnent avec les stigmates abdominaux sous l'action puissante des mouvements respiratoires de l'abdomen [1].

§ XXXIV.

Muscles respiratoires du Hanneton.

L'exactitude scrupuleuse avec laquelle Straus-Durckheim s'est attaché à décrire la structure anatomique du Hanneton rend à peu près inexplicables certaines lacunes importantes qui déparent cette belle monographie. Pour ne citer que ce qui touche à mes recherches, Straus-Durckheim n'a point observé les muscles respiratoires du Coléoptère qu'il avait choisi comme type.

Fort étonné de ne point voir ces muscles représentés dans l'atlas des *Considérations générales sur l'anatomie comparée des animaux articulés,* j'ai relu avec soin toutes les parties de l'ouvrage dans lesquelles on pouvait supposer que l'auteur avait fait mention des muscles respiratoires, mais inutilement.

[1] Après mes expériences sur l'*Oryctes*, je n'ai pas cru devoir faire de recherches quant à l'influence des diverses parties du système nerveux sur les mouvements respiratoires du Hanneton. Les résultats eussent été évidemment les mêmes.

Langendorff, dont j'ai déjà cité plusieurs fois le travail (*Das Athmungscentrum der Insecten*), faisant usage de la méthode graphique, a constaté qu'un Hanneton décapité continue à respirer régulièrement et fournit un tracé très satisfaisant. Je remarque, en comparant les diverses figures publiées par l'auteur, que la suppression des centres nerveux antérieurs n'a point modifié l'amplitude, mais a déterminé un ralentissement manifeste.

Langendorff a observé aussi que chez l'animal décapité l'élévation de la température produit une accélération comme chez l'animal intact. Enfin, il s'est assuré que l'on peut enlever le prothorax sans supprimer les mouvements respiratoires, mais qu'il n'est pas possible de détruire impunément une plus grande partie de la région antérieure du corps. Tout cela, on le voit, vient confirmer parfaitement l'ensemble de mes recherches personnelles.

Digitized by Google

Cet oubli ou cette erreur de dissection a eu pour résultat inévitable une théorie absolument fausse des actions musculaires dans l'acte de la respiration. Straus-Durckheim [1] attribue, en effet, la diminution de capacité de l'abdomen, en expiration, au rapprochement des arceaux dorsaux les uns des autres, sous l'influence de la contraction des *muscles longitudinaux* (prétracteurs supérieurs, Straus) [2].

Le lecteur peut voir par les figures 24 et 25 qui, sans avoir l'élégance de celles de Straus-Durckheim, ont, au moins, le mérite de l'exactitude, que les véritables muscles expirateurs (α) du Hanneton présentent la même disposition générale que ceux de l'*Oryctes nasicornis*.

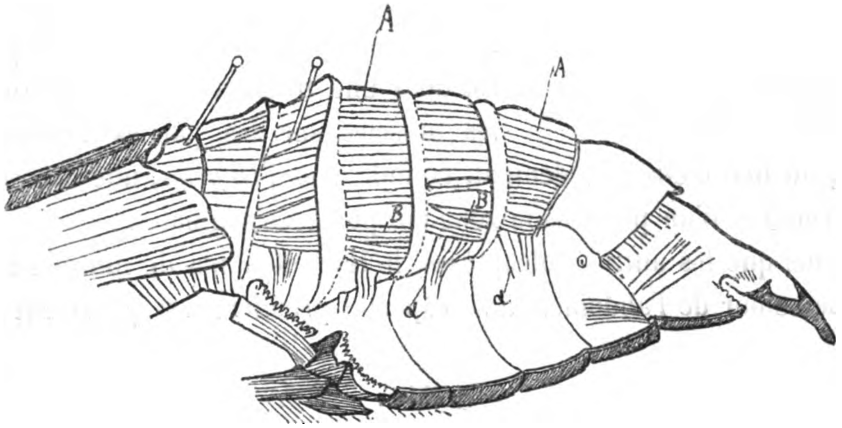


Fig. 24 × 4. — Muscles de la moitié droite de l'abdomen du Hanneton ♀.
A B Muscles longitudinaux (prétracteurs, Straus).
α Muscles respiratoires vrais (expirateurs).

Situés dans les parties latérales des segments abdominaux, ils croisent, comme chez les autres Coléoptères, le repli constitué par la membrane molle unissant les arceaux dorsaux aux arceaux sternaux. S'insérant en

1 *Considérations générales*, etc., op. cit., p. 324.

2 Par suite de l'erreur de Straus-Durckheim, toutes les figures de la musculature du Hanneton reproduites dans les ouvrages généraux sont fautives. Je citerai, par exemple, la figure 18, planche IX, de l'*Introduction à l'entomologie* de Lacordaire, la figure 5, planche III, de l'*Anatomia degli insetti* de Lorenzo Camerano, etc.

J'ajouterai que le modèle anatomique en carton préparé par le Dr Auzoux et qui se trouve dans tous les musées présente la même lacune.

Digitized by Google

haut sur le bord latéral d'un arceau tergal, chacun de ces muscles se termine, en bas, sur la région supérieure de l'arceau sternal correspondant.

En les comparant à leurs homologues chez l'*Oryctes*, on voit qu'ils sont proportionnellement plus courts, plus étalés, et que leur direction, surtout appréciable sur une coupe (fig. 25, α), est notablement plus oblique.

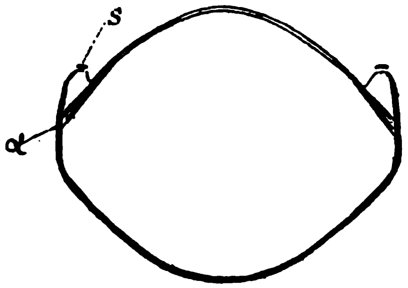


Fig. 25 × 4. — Coupe transversale du 5e somite abdominal.

α Muscle respiratoire (expirateur).
S Position spéciale du stigmate dans ce somite.

L'obliquité des muscles expirateurs du Hanneton et la situation de leur insertion inférieure m'autorisent à supposer que le petit mouvement en dedans que présentent les régions épimériennes durant l'expiration est dû à une traction directe effectuée par les muscles sur les parties latérales des somites, au lieu d'être simplement, comme chez l'*Oryctes*, une conséquence de la formation d'un pli dans la zone qui porte les stigmates.

Pas plus que les autres Coléoptères, le Hanneton n'a de muscles inspirateurs. Le retour de l'abdomen à sa capacité première est purement passif.

§ XXXV.

Phyllopertha horticola.

Les *Phyllopertha* présentent naturellement les allures respiratoires générales des autres Scarabéiens.

J'ai parfaitement constaté, comme chez le Hanneton, que l'abdomen est en inspiration pendant le vol.

§ XXXVI.

Trichius abdominalis.

Rathke ayant fait la plupart de ses observations sur le *Geotrupes stercorarius* et la *Cetonia aurata*, il m'a semblé utile de compléter mes recherches personnelles par l'examen des mouvements respiratoires d'un Coléoptère du groupe des Cétoines.

Digitized by Google

A défaut de *Cetonia* proprement dite, je me suis adressé au *Trichius abdominalis,* dont l'organisation est très voisine.

Les mouvements respiratoires des trichies ne différant guère de ceux dont je viens de donner une description détaillée, je me bornerai aux quelques indications suivantes : en expiration, tous les arceaux tergaux mobiles, du premier au sixième, descendent et l'effet maximum a lieu à la limite des somites 2 et 3. Ce mouvement est simultané ; il n'y a pas d'onde. Contrairement à ce qui se passe chez les autres Scarabéiens, les expirations ont peu d'amplitude; la diminution du diamètre vertical de l'abdomen au niveau du troisième somite n'est que de $^1/_{20}$ (observation faite sur un individu vigoureux au moment de la capture). La zone molle portant les stigmates forme un pli accusé. Les régions épimériennes paraissent immobiles ; il est vrai que les longs poils qui garnissent cette partie du corps masquent peut-être le mouvement.

L'extrémité de l'abdomen se relève, en expiration, d'une petite quantité; mais la longueur totale ne change point. Enfin, le métathorax reste positivement immobile, comme chez l'*Oryctes* et l'Onthophage.

§ XXXVII.

Staphyliniens.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Rathke [1] signale les Staphyliniens comme des Coléoptères tout à fait exceptionnels au point de vue du mécanisme respiratoire.

Bien que la composition des somites abdominaux et la disposition des muscles qui les meuvent lui aient paru semblables à ce qui existe chez les autres insectes de l'ordre, l'auteur cité n'a pas pu constater de mouvements respiratoires nets de la part des arceaux tergaux de l'abdomen ; seule la face dorsale du métathorax s'élevait et s'abaissait d'une façon active.

[1] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen,* etc. Op. cit., pp. 103 et 104.

Digitized by Google

L'observation est à très peu près exacte; mais, comme on le verra ci-dessous, l'ignorance de certains détails et le petit nombre de termes de comparaison ont fait formuler à Rathke des conclusions trop absolues.

Mes expériences personnelles ont été répétées, à l'aide de la méthode des projections, sur trois formes : *Staphylinus cæsareus, St. pubescens* et *St. olens.*

Staphylinus cæsareus (grossissement employé 12). — L'insecte, privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes, est fixé par deux épingles traversant les bords latéraux du prothorax; il est de plus placé assez haut pour que l'extrémité de son long abdomen ne puisse venir rencontrer le support (fig. 61, pl. III).

Dans ces conditions, je constate, à chaque expiration, une dépression assez forte des faces tergales du mésothorax (Ms. th.) et du métathorax (Mt. th.) et une dépression plus faible mais réelle des faces tergales des *trois* premiers somites abdominaux (1, 2, 3). En même temps, toute la seconde moitié de l'abdomen est légèrement projetée vers le haut, sans changer cependant de longueur.

Les mouvements inspiratoires sont nécessairement inverses des précédents.

Staphylinus pubescens (grossissement employé 14). — Les résultats que cette forme m'a fournis diffèrent légèrement de ceux que m'avait donnés la précédente; les mouvements respiratoires apparents sont plus localisés et ne s'observent que dans le long métathorax de l'insecte et le premier somite abdominal.

Comme chez le *Staphylinus cæsareus,* l'abdomen est projeté vers le haut en expiration sans que sa longueur soit modifiée.

Staphylinus olens (grossissement employé 11). — Malgré sa taille notablement plus considérable, le grand Staphylin noir ne m'a offert aucune particularité nouvelle. Ses mouvements respiratoires apparents sont restreints au méso-, au métathorax et au premier somite de l'abdomen, la face tergale de ces segments se déprimant en expiration. La diminution du diamètre vertical est, du reste, faible, environ $^1/_{23}$.

Digitized by Google

Les mouvements de torsion de l'abdomen ne permettent pas d'affirmer, comme pour les deux autres Staphylins essayés, que la longueur de cette région du corps ne change pas.

Ces expériences nous prouvent d'abord que les mouvements respiratoires des Staphyliniens ne se montrent pas seulement dans le métathorax, comme Rathke croyait l'avoir vu, mais que le mésothorax se déprime aussi généralement en expiration et, fait bien plus important, elles nous prouvent, en outre, qu'il existe des mouvements respiratoires abdominaux visibles dans les trois premiers somites ou dans le premier seul.

Si l'on compare les Staphyliniens aux autres Coléoptères et même à l'ensemble des autres insectes, on arrive à cette conclusion que ces animaux sont beaucoup moins exceptionnels qu'on le supposerait à première vue et qu'ils présentent simplement, avec exagération, des phénomènes qui existent, moins accusés, chez un grand nombre de formes diverses.

Ainsi, il suffit de parcourir le Mémoire actuel ou, plus simplement, de consulter le tableau II du § XCII pour s'assurer que, chez la plupart des insectes, les mouvements respiratoires abdominaux offrent leur plus grande amplitude dans les somites qui avoisinent la base de l'abdomen; soit le deuxième somite, soit le troisième, soit, moins souvent, le troisième et le quatrième.

D'un autre côté, il n'est pas rare de voir, chez les Coléoptères, un ou deux segments thoraciques postérieurs participer aux mouvements de respiration. La méthode des projections m'a permis, en effet, d'observer des mouvements de ce genre, faibles, il est vrai, mais généralement bien nets, dans le thorax des *Hydrophilus piceus, Carabus auratus* [1], *Melolontha vulgaris, Chlorophanus viridis, Corymbites latus, Chrysomela staphylœa* et *Tenebrio molitor*. (Tableau I, § XCI.)

Chez aucun des Coléoptères que je viens de citer, les déplacements respiratoires des faces tergales, soit du méso- et du métathorax réunis, soit du

[1] Ainsi que je l'ai dit ailleurs, à propos de l'Hydrophile et du Carabe doré, §§ XII et XXII, Rathke lui-même a constaté des mouvements d'élévation et d'abaissement dans la face tergale du métathorax du *Carabus granulatus*.

Digitized by Google

métathorax seul, n'ont lieu sous l'influence de la contraction de muscles thoraciques spéciaux. Les segments du thorax se trouvent entraînés par les segments abdominaux et leurs mouvements ne sont qu'une conséquence des mouvements respiratoires de l'abdomen. L'étude du système musculaire prouve que les choses doivent se passer de la même manière pour les Staphyliniens.

J'ajouterai enfin, comme remarque, que les Staphyliniens sont, de tous les Coléoptères, ceux chez lesquels on s'attendrait le plus à voir les mouvements respiratoires se propager le long de l'abdomen à l'état d'onde; mais ces insectes ne nous offrent rien de pareil.

§ XXXVIII.

Muscles respiratoires du Staphylinus olens.

Je n'ai pas été plus heureux que Rathke dans la recherche de muscles thoraciques spéciaux. Ni le mésothorax, ni le métathorax ne présentent de muscles qu'on ne puisse retrouver chez les autres Coléoptères.

La figure 26 ci-jointe représente la disposition des muscles abdominaux. On peut y constater que les muscles expirateurs α affectent la forme ordinaire. Les inspirateurs manquent complètement, comme chez la plupart des insectes.

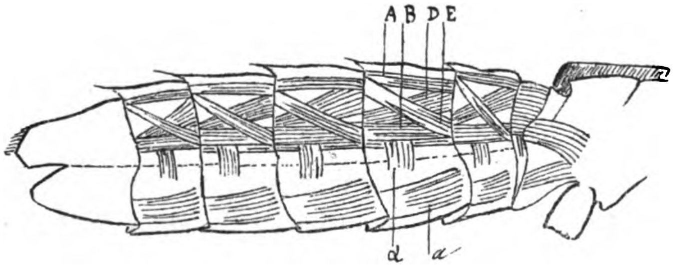


Fig. 26 × 4. — Muscles de la moitié gauche de l'abdomen du *Staphylinus olens*.

A B Muscles longitudinaux dorsaux.
D E Faisceaux obliques.
a Muscles longitudinaux sternaux.
x Muscles respiratoires (expirateurs verticaux).

Les muscles dorsaux sont, en grande partie, disposés en deux couches dont les fibres se croisent obliquement; ils diffèrent ainsi de ceux du plus grand nombre des Coléoptères et offrent, au contraire, beaucoup d'analogie avec les muscles croisés de l'abdomen mobile des Forficules parmi les Orthoptères. (Voy. fig. 45, D, E.)

Digitized by Google

§ XXXIX.

Curculioniens (Chlorophanus viridis).

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

Les mouvements respiratoires des Curculioniens ont été examinés par Rathke chez un *Attelabus;* mais l'auteur se borne à citer ce nom générique dans une liste des formes qui ont passé sous ses yeux; il n'a probablement rien observé de spécial. Le mécanisme respiratoire des Curculioniens que j'ai étudié chez le *Chlorophanus viridis* est, en effet, celui de presque tous les Coléoptères.

Je résume mes résultats comme suit : insecte privé de ses pattes, de ses ailes et de ses élytres, fixé par une seule épingle traversant le prothorax; troisième somite abdominal reposant librement sur une épingle coudée à angle droit; grossissement 12 diamètres.

Mouvements respiratoires très normaux et d'une assez grande amplitude. La diminution du diamètre vertical de l'abdomen, en expiration, atteint $^1/_{10}$.

Le métathorax participe aux mouvements des arceaux dorsaux de l'abdomen.

En expiration, les arceaux dorsaux s'abaissent de la façon ordinaire. Le maximum d'effet a lieu au niveau des somites 3, 4, 5.

En expiration, les faces sternales des anneaux 5, 6, 7 s'élèvent un peu et toute l'extrémité postérieure de l'abdomen se soulève d'une petite quantité. La longueur de l'abdomen ne varie pas.

On observe de longs arrêts en inspiration suivis de deux ou trois mouvements respiratoires assez brusques.

§ LX.

Élatérides (Corymbites latus).

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

Aucun naturaliste ne parait avoir étudié les mouvements respiratoires des Élatérides. Ces insectes respirent, du reste, suivant le mode le plus ordinaire chez les Coléoptères.

Digitized by Google

Voici le résumé de mes observations : l'insecte est supporté par une épingle traversant le prothorax; le 4e somite abdominal repose librement sur une épingle coudée à angle droit (grossissement employé, 13).

L'animal ne fait point d'efforts pour sauter; il exécute deux espèces de mouvements : 1° des mouvements d'oscillation et d'incurvation de l'abdomen étrangers à l'acte de la respiration; 2° des mouvements respiratoires proprement dits offrant les caractères suivants :

Le méso- et le métathorax participent aux déplacements des arceaux tergaux de l'abdomen. En expiration, les deux segments thoraciques postérieurs s'abaissent.

Le maximum d'effet a lieu pour les arceaux tergaux des somites abdominaux 2, 3, 4. La diminution du diamètre vertical de l'abdomen à la hauteur du 3e segment est d'environ $^1/_{10}$.

En expiration l'extrémité de l'abdomen se relève; de sorte que le profil longitudinal de la face dorsale devient un peu concave.

Il n'y a point de modification dans la longueur.

On observe de longs arrêts inspiratoires séparés par un ou deux mouvements respiratoires assez rapides.

§ XLI.

Donacia simplex, Crioceris merdigera, Chrysomela staphyloea.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Il me reste à dire quelques mots des mouvements respiratoires des Donacies, des Criocères et des Chrysomèles pour terminer ce qui concerne la série des Coléoptères dont les arceaux tergaux des somites abdominaux s'abaissent simplement pendant la phase expiratoire (voir § IX, page 30, *a*). On trouvera dans le paragraphe suivant l'exposé de ce qui se passe chez quelques formes où le phénomène se complique d'une augmentation apparente du diamètre vertical.

Donacia simplex. — Les mouvements respiratoires de ce petit Coléoptère ont une forme très normale, mais sont faibles et lents.

Digitized by Google

La face supérieure de l'abdomen est limitée à droite et à gauche par une gouttière profonde bordée par un rebord épimérien élevé. Il existe là sept arceaux plus ou moins mobiles; mais, du côté sternal, les trois premiers somites sont intimement soudés sous la forme d'une grande plaque; les quatre arceaux sternaux postérieurs peuvent seuls se déplacer.

Pendant l'expiration, les faces tergales se dépriment; ce mouvement est surtout accusé à la hauteur des somites 1 et 2; en même temps, les arceaux dorsaux rentrent un peu les uns sous les autres, tandis que les arceaux sternaux postérieurs 4, 5, 6, 7 s'écartent légèrement; il en résulte que la pointe de l'abdomen se relève d'une petite quantité.

La diminution du diamètre vertical de l'abdomen en expiration, au niveau du 2e somite, n'est guère que de $^1/_{25}$.

La longueur absolue de l'abdomen n'est pas modifiée et les segments thoraciques postérieurs paraissent immobiles.

Crioceris merdigera. — La composition de l'abdomen étant à peu près identique à celle qui s'observe chez les Donacies, les mouvements respiratoires des Criocères sont sensiblement calqués sur ceux du Coléoptère précédent.

La dépression des faces tergales 1 et 2, la rentrée des arceaux du côté de la face dorsale, le léger écartement des arceaux sternaux 4, 5, 6, 7, incurvent de la même façon l'abdomen vers le haut à chaque expiration. Seulement, les mouvements respiratoires des Criocères s'opèrent avec une assez grande rapidité et offrent beaucoup plus d'amplitude que ceux des Donacies. La diminution du diamètre vertical de l'abdomen, au niveau du 3e somite, atteint $^1/_{11}$.

L'expiration est excessivement brusque et dure très peu; l'inspiration est marquée par une pause courte, mais incontestable. La longueur de l'abdomen ne change pas et le métathorax reste immobile.

Chrysomela staphylæa. — Rathke indique le genre chrysomèle parmi les insectes dont il a étudié les mouvements respiratoires; mais il ne donne aucune indication spéciale. Ces mouvements ont, du reste, lieu suivant le type le plus général.

Digitized by Google

En expiration, les faces tergales des somites abdominaux s'abaissent; le maximum d'effet ayant lieu à la hauteur des segments 1 et 2. En même temps, l'extrémité de l'abdomen descend d'une quantité très minime, sans qu'il y ait de modification dans la longueur.

Les mouvements d'élévation et d'abaissement des arceaux tergaux sont accompagnés de mouvements de même sens du métathorax, qui paraît simplement entraîné.

Les déplacements respiratoires ont une très faible amplitude; la diminution du diamètre vertical de l'abdomen, au niveau du 2e somite, n'est que de $^1/_{30}$ environ.

§ XLII.

Coléoptères chez lesquels les régions latérales des arceaux tergaux se creusent en expiration, tandis que la partie médiane se soulève ou présente un sillon longitudinal. Telephorus, Clytus, Coccinella.

Le lecteur a vu par le § IX (*Les trois types respiratoires et leurs subdivisions*) qu'il existe un certain nombre de Coléoptères dont les arceaux tergaux de l'abdomen se modifient, en expiration, d'une façon très différente de ce qui se passe généralement dans le groupe zoologique auquel appartiennent ces insectes.

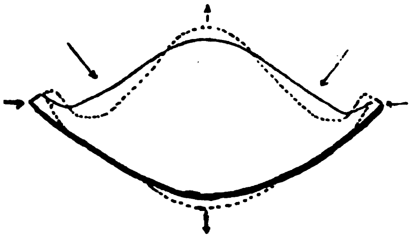
Chez ces formes exceptionnelles, les arceaux tergaux, au lieu de devenir plus plats, en d'autres termes au lieu de se déprimer un peu plus dans la partie médiane que vers les bords, se creusent, au contraire, fortement sur les côtés pour se relever au milieu.

Tantôt ce phénomène détermine simplement une augmentation du diamètre vertical de l'abdomen, tantot il amène et parfois en même temps que cette augmentation, la formation d'un sillon longitudinal occupant la ligne médiane de la face tergale de l'abdomen.

Telephorus fuscus. — Lors de l'expiration, les parties déclives latérales des arceaux tergaux, du 1er au 7e, se dépriment; les régions épimériennes se portent en dedans et la convexité de la ligne médiane des arceaux tergaux et sternaux augmente.

Digitized by Google

De là deux faits faciles à observer à l'aide de silhouettes : 1° le rétrécissement transversal de l'abdomen et 2° en même temps, l'augmentation du diamètre vertical de celui-ci pendant la phase expiratoire. Cette augmentation mesurée à la hauteur du 4ᵉ segment est d'environ $^1/_{30}$.



Répétition de la figure 7. — *Telephorus fuscus.* Coupe transversale de l'abdomen.

La pointe de l'abdomen s'élève un peu, en expiration ; mais la longueur reste à très peu près invariable. Les mouvements respiratoires sont simultanés dans tous les somites abdominaux et le métathorax reste immobile.

Clytus arietis. — Quelque singulier que cela paraisse, il existe beaucoup d'analogie entre la structure des arceaux tergaux du Coléoptère qui nous occupe et celle de ces mêmes arceaux chez les Coccinelles ; aussi les mouvements respiratoires appartiennent-ils à la même variété.

Comme chez les Coccinelles, la zone molle latérale qui porte les stigmates est plus ou moins convexe et les arceaux tergaux offrent, sur la ligne médiane, une articulation plus marquée et plus mobile que chez beaucoup d'autres Coléoptères.

Les mouvements respiratoires ont très peu d'amplitude et n'ont lieu que dans les cinq premiers arceaux dorsaux ; ceux-ci changent de forme de la manière suivante : leurs parties latérales se dépriment et un sillon accusé se produit sur la ligne médiane des arceaux 1, 2, 3 et 4 ; le sillon est à peine indiqué sur l'arceau 5.

Les silhouettes permettent de constater, en expiration, une certaine diminution du diamètre vertical ($^1/_{18}$ environ) ; elles montrent, en outre, que l'extrémité de l'abdomen se relève un peu dans la phase expiratoire, qu'il n'y a pas d'onde, que les segments thoraciques sont immobiles et enfin que la longueur du corps reste invariable.

On peut noter, comme mouvements étrangers à la respiration, de fortes oscillations verticales que l'insecte imprime de temps en temps à la région abdominale et qui sont invariablement accompagnées du petit cri caractéristique du *Clytus*.

Digitized by Google

Les muscles expirateurs du *Clytus arietis* (fig. 27, α), larges et très puissants, comparativement à la taille de l'animal, offrent la disposition ordinaire propre aux Coléoptères; aussi la forme spéciale que prennent les arceaux dorsaux, en expiration, ne provient-elle, très probablement, que de l'existence, au milieu de chacun de ceux-ci, d'une articulation plus mobile que celle qu'on y rencontre généralement [1].

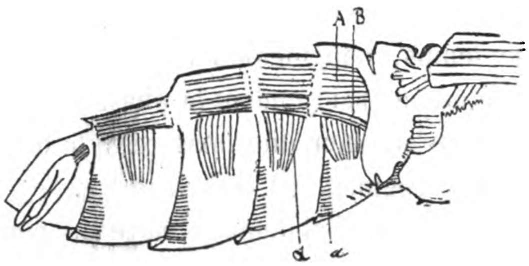


Fig. 27 × 7. — Moitié gauche de l'abdomen du *Clytus arietis* ♀.
A, *B* et *a* Muscles longitudinaux.
α Muscles expirateurs verticaux.

Coccinella septempunctata. — La petite taille des Coccinelles, leur forme particulière, enfin, surtout, l'impossibilité dans laquelle s'est trouvé Rathke de constater, par l'observation directe, des mouvements respiratoires abdominaux chez ces Coléoptères [2], sont les motifs qui m'ont fait étudier avec grand soin le mécanisme de la respiration de la Coccinelle commune.

Voici les résultats assez intéressants que j'ai obtenus par la méthode des projections:

L'insecte, privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes, est placé dans l'appareil de façon à donner une silhouette du profil longitudinal; l'abdomen repose par son extrémité sur une épingle pliée à angle droit (grossissement 14) (fig. 62, pl. III).

Les mouvements respiratoires que Rathke n'avait pu observer sont cependant très évidents et très énergiques. On constate des augmentations et des diminutions alternatives du diamètre abdominal accompagnées de petites modifications dans la longueur et de balancements de l'ensemble du thorax.

L'observation directe à la loupe révèle quelques détails dont la connaissance permet d'interpréter nettement les images obtenues par projection.

[1] Rathke cite le genre *Cerambyx* dans sa liste générale; mais comme pour beaucoup d'autres, il se borne à cette mention laconique.

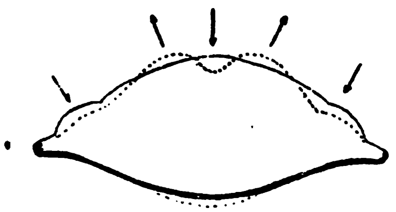
[2] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc., p. 104.

Digitized by Google

Les divers phénomènes peuvent se résumer comme suit :

1° L'ensemble du thorax oscille légèrement pendant les mouvements respiratoires abdominaux; mais il n'existe pas de déplacements spéciaux des segments méso- et métathoraciques;

2° La zone molle qui porte les stigmates est toujours saillante; elle offre des obliquités différentes suivant les phases respiratoires, mais elle ne forme jamais de pli rentrant, comme chez les Scarabéiens, par exemple;



Répétition de la figure 8.
Coupe transversale de l'abdomen de la *Coccinella septempunctata*.

3° Ainsi que l'indique la figure 8, l'expiration est caractérisée non par la descente générale des arceaux tergaux, mais par la dépression de leurs bords latéraux et par la formation d'une gouttière médiane;

4° Cette gouttière médiane s'observe aux arceaux tergaux des somites compris entre le 2^e et le 6^e inclusivement;

5° Lorsque la gouttière médiane se produit, elle est limitée latéralement par deux crêtes qui, sur les silhouettes, font paraître la face dorsale de l'abdomen plus élevée. Les augmentations du diamètre vertical de l'abdomen, dans les images de l'appareil à projection, répondent donc à l'expiration; elles sont à peu près de $^1/_9$;

6° En expiration, l'abdomen s'allonge d'une petite quantité ($^1/_{25}$ de la longueur abdominale totale);

7° Durant l'expiration, la totalité de la face tergale du thorax s'incline légèrement en arrière;

8° L'expiration est brusque et simultanée dans tous les somites abdominaux offrant des mouvements de respiration. L'inspiration affecte, au contraire, plus ou moins l'aspect d'une onde; différence qui s'expliquerait en admettant que l'élasticité des divers segments, seule en jeu dans la phase inspiratoire, varie un peu suivant les diamètres des somites.

L'étude du système musculaire des Coccinelles est naturellement accompagnée de grandes difficultés pratiques. Cependant, en isolant un somite abdominal et en le disséquant à l'aide d'aiguilles sous le microscope à

dissection de Zeiss, je suis parvenu à constater, ce qu'on pouvait prévoir, du reste, que les muscles expirateurs offrent la même disposition générale que chez les autres Coléoptères (fig. 28).

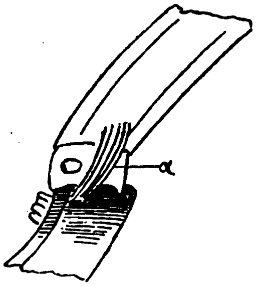


Fig. 28. — *Coccinella septem-punctata.*
α Muscle expirateur vertical du 4[e] somite.

Je suis persuadé que la forme singulière que prennent les arceaux tergaux pendant l'expiration est due simplement à l'obliquité des muscles respiratoires qui s'insèrent sur les faces tergales un peu plus haut que chez les Coléoptères des autres groupes et à l'existence, le long de la ligne dorsale médiane, d'une articulation longitudinale très mobile semblable à celle de l'abdomen du *Clytus arietis.*

CHAPITRE V.

SUITE DE L'ÉTUDE DU PREMIER TYPE.

B. **Hémiptères hétéroptères.**

On a fait, jusqu'à présent, peu d'observations sur les mouvements respiratoires des Hémiptères; aussi la bibliographie se réduit-elle aux quelques indications ci-dessous.

D'après Hausmann [1], on aurait remarqué que les mouvements respiratoires des Cigales [2] ont quelque analogie avec ceux des Vertébrés; Treviranus [3] s'exprime, à propos des mêmes insectes, dans des termes qui font supposer

[1] HAUSMANN. *De animalium exsanguium respiratione,* etc. Op. cit., p. 8.

[2] Les Cigales sont, on le sait, le type des Hémiptères homoptères; j'ai dû citer ici les quelques observations qui les concernent, bien que je n'aie pu étendre mes recherches à ce genre intéressant.

[3] TREVIRANUS. *Biologie,* etc. Op. cit., Vierter Band, p. 157.

Digitized by Google

qu'il s'est contenté de copier l'auteur précédent; enfin, Léon Dufour [1] dit avoir observé à la loupe « le mouvement presque insensible de l'inhalation de l'air » chez la *Nepa cinerea.*

J'ai examiné la structure de l'abdomen d'un certain nombre de genres d'Hémiptères hétéroptères (*Pentatoma, Pyrrhocoris, Corixa, Notonecta, Ranatra, Nepa,* etc.) et j'ai partout rencontré une disposition à peu près identique dont les figures 9 et 29 donnent une idée nette.

Les arceaux tergaux et sternaux, en s'unissant par leurs extrémités, forment à l'abdomen un bord latéral presque tranchant, horizontal ou plus ou moins relevé en crête. La convexité des arceaux tergaux est variable, mais généralement faible; les arceaux sternaux sont ordinairement fort convexes au milieu et s'aplatissent vers les extrémités latérales.

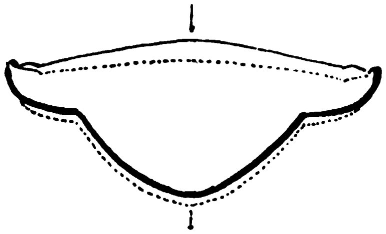
Cette similitude de structure me permet de supposer que les mouvements respiratoires des Hétéroptères ont toujours lieu suivant le mode que j'ai observé chez les deux formes soumises à mes expériences, la *Nepa cinerea* et le *Pyrrhocoris apterus.*

§ XLIII.

Nepa cinerea.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

L'abdomen de la Nèpe comprend six somites apparents dont les arceaux dorsaux sont représentés par des lames presque planes, tandis que les arceaux sternaux beaucoup plus convexes forment, par leur ensemble, une sorte de carène (fig. 9).



Répétition de la figure 9.
Coupe transversale de l'abdomen de la *Nepa cinerea.*

Léon Dufour [2] compare, dans un de ses premiers travaux, la face sternale de l'abdomen de la Nèpe à un plastron de tortue. Cette comparaison est évidemment peu heureuse.

Pour les observations par projection, l'insecte est fixé par deux épingles

[1] Léon Dufour. *Rech. anat. et physiolog. sur les Hémiptères,* p. 384.

[2] Idem. *Rech. anat. sur la Ranatre linéaire et la Nèpe cendrée.* (Ann. générales des sciences physiques, par Bory de St-Vincent, Drapiez et Van Mons, t. VII, p. 195. Bruxelles, 1820.)

Digitized by Google

traversant les parties latérales du prothorax; on lui a enlevé les ailes et les pattes; le 6ᵉ somite abdominal est soutenu par une épingle coudée; enfin des styles de papier sont collés sous la région latérale droite des arceaux sternaux 3 et 5, ainsi que sur la région médiane et les régions latérales du 3ᵉ arceau tergal (fig. 63, pl. IV) [1].

Les mouvements respiratoires, fort curieux, ont lieu de la façon suivante :

1° En expiration, les arceaux dorsaux s'abaissent exactement comme chez la plupart des Coléoptères; en descendant ces arceaux deviennent plus plats; leur région médiane s'affaissant plus que leurs régions latérales. Le maximum d'effet a lieu au niveau des somites 1 et 2;

2° Le sillon latéral situé sur la limite entre les arceaux tergaux et les régions épimériennes s'approfondit;

3° Fait assez singulier, on n'observe point, comme chez le plus grand nombre des insectes, un antagonisme entre les déplacements des arceaux tergaux et ceux des arceaux sternaux; ces pièces marchent dans le même sens; les arceaux sternaux descendent lors de l'abaissement des arceaux supérieurs. Cependant la descente des pièces sternales étant plus faible que celle des pièces dorsales, l'expiration se trouve marquée par une diminution du diamètre vertical de l'abdomen d'environ $^1/_{34}$ (mesurée au niveau du 2ᵉ somite);

4° Les mouvements ne sont pas simultanés dans tous les somites, mais successifs; il existe une onde incontestable marchant d'avant en arrière. Ainsi, pour les arceaux tergaux, l'expiration a lieu d'abord dans les somites 1, 2, 3, puis, peu après, dans les somites 4, 5 et 6;

5° La longueur de l'abdomen reste invariable et les segments thoraciques sont immobiles.

En terminant, j'ajouterai que les mouvements respiratoires des Nèpes sont faciles à voir à la loupe, même à la face inférieure du corps. L'observation de Léon Dufour que je citais plus haut et d'après laquelle ces mouvements sont presque insensibles, a donc été mal faite.

[1] Dans la fig. 63, pl. IV, on n'a représenté que les styles fixés aux arceaux sternaux.

Digitized by Google

§ XLIV.

Pyrrhocoris apterus.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Bien que la longueur de l'abdomen soit beaucoup moindre, sa structure est sensiblement celle que l'on observe chez la Nèpe. Cependant, les rebords formés par les pièces épisternales et epimériennes sont tellement élevés que leur ombre masque absolument, sur les silhouettes, ce qui se passe du côté de la face dorsale de l'abdomen (fig. 29).

Deux styles verticaux collés sur les arceaux tergaux, à la limite entre le 3e et le 4e et sur le 7e ou dernier, permettent, par leurs changements de position, de concevoir assez nettement ce qui a lieu.

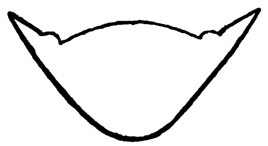


Fig. 29 × 8.
Coupe transversale du 3e somite abdominal du *Pyrrhocoris apterus.*

Les mouvements expiratoires qui ont une amplitude absolue et relative très faible ressemblent beaucoup à ceux des Coléoptères et consistent, surtout, comme chez la Nèpe, en abaissements des arceaux tergaux. Le maximum a lieu vers le 4e somite et, de même que chez plusieurs Coléoptères, la pointe de l'abdomen se relève légèrement; de sorte que le profil longitudinal de la face dorsale devient concave.

Il n'y a ni onde, ni mouvements thoraciques, ni changements de longueur.

C. **Orthoptères blattiens.**

§ XLV.

Periplaneta orientalis.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

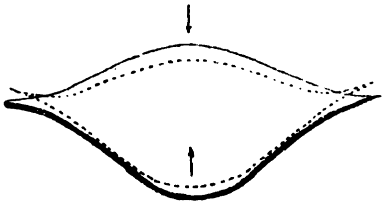
Rathke a consacré quelques lignes aux mouvements respiratoires de la Blatte[1]. Il dit que les arceaux tergaux et sternaux se rapprochent et s'éloignent alternativement l'un de l'autre et que leurs déplacements s'effectuent avec une certaine lenteur. J'aurai à ajouter de nombreux détails à cette description.

[1] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc. Op. cit., p. 108, § 9.

Digitized by Google

La structure de l'abdomen de la Blatte s'éloigne complètement de celles des abdomens des Forficuliens, des Acridiens ou des Locustiens pour se rapprocher, au contraire, d'une façon frappante de la disposition offerte par les Hémiptères hétéroptères.

Comme chez ces derniers insectes, les arceaux tergaux et sternaux s'unissent à leurs extrémités en formant à l'abdomen un bord latéral tranchant, et, comme chez la Nèpe, par exemple, les arceaux tergaux sont assez plats, tandis que les arceaux sternaux convexes en leur milieu et aplatis vers les bords constituent, sous l'abdomen, une carène plus ou moins prononcée (comparez fig. 9, page 105).



Répétition de la figure 10.
Coupe transversale de l'abdomen de la Blatte.

Les arceaux tergaux offrent, sur leurs parties déclives, des empreintes indiquant les points d'insertion des muscles expirateurs verticaux.

Cette grande ressemblance entre la composition des somites des Blattes et des Hémiptères hétéroptères permettait de supposer que les mouvements respiratoires n'appartiendraient à aucune des formes que l'on peut observer chez les autres Orthoptères, mais se rapprocheraient de ceux de la Nèpe et se rangeraient, par conséquent, dans notre premier type. L'hypothèse est exacte et, ainsi qu'on va le voir, le mécanisme respiratoire de la *Periplaneta orientalis* est, à peu près, celui des Coléoptères et des Hémiptères.

Mes expériences ont été effectuées sur des mâles ; ceux-ci sont plus favorables à l'observation que les femelles.

L'animal, privé de ses élytres, de ses ailes et de ses pattes, n'est fixé que par deux épingles fines traversant les parties latérales du prothorax. Dans la position horizontale, l'abdomen repose, par le 5e arceau sternal, sur une épingle coudée à angle droit (fig. 64, pl. IV).

Les changements de courbure des arceaux sternaux et tergaux ont été constatés en collant des styles sur plusieurs points du 3e somite et en plaçant l'insecte de façon à obtenir la silhouette transverse de ce segment dont les mouvements sont très accusés.

Voici le résumé des résultats obtenus :

Digitized by Google

Faits généraux.

1° Le méso- et le métathorax participent aux mouvements respiratoires; mais les déplacements ont lieu en sens inverse de ceux des arceaux abdominaux, au lieu d'être de même sens, comme chez les Coléoptères staphyliniens.

2° Les régions médianes des arceaux tergaux et sternaux se rapprochent et s'éloignent alternativement; les bords restant en contact.

3° Ces mouvements sont surtout accusés vers la base de l'abdomen.

4° L'abdomen oscille légèrement dans un plan vertical et offre de très faibles changements de longueur.

5° Les mouvements respiratoires paraissent simultanés; il n'y a point d'onde.

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
La face supérieure du méso- et du métathorax s'élève; les bases des pattes de deuxième et de troisième paire, et, par conséquent, les faces sternales des deux segments thoraciques postérieurs se rapprochent l'une de l'autre.	La face supérieure du méso- et du métathorax se déprime légèrement.
Les arceaux tergaux de l'abdomen s'abaissent dans leur région moyenne, deviennent plus plats, surtout à la hauteur des somites 2 et 3. Ce mouvement l'emporte de beaucoup sur celui des arceaux sternaux qui est faible (dans la proportion de 5 : 2).	La région moyenne des arceaux tergaux devient plus convexe.
Le profil longitudinal de la face dorsale de l'abdomen devient un peu concave.	Le profil longitudinal de la face dorsale de l'abdomen redevient légèrement convexe.
Les arceaux sternaux s'élèvent d'une petite quantité. Ce déplacement n'est nettement visible, sur les silhouettes, que pour les somites 2 et 3; il est masqué ailleurs par les mouvements généraux de l'abdomen.	Les arceaux sternaux descendent faiblement.
La diminution du diamètre vertical, en expiration, est de $^1/_8$ (au niveau des somites 2-3); elle est, par conséquent, considérable et comparable à celle que l'on observe chez l'Hydrophile et le Hanneton, parmi les Coléoptères.	
Les bords tranchants latéraux de l'abdomen se relèvent, ce qui amène une très légère diminution du diamètre transversal ($^1/_{33}$ au plus).	Les bords latéraux de l'abdomen s'abaissent.
L'extrémité de l'abdomen est faiblement projetée vers le bas.	L'extrémité de l'abdomen est projetée vers le haut.
L'abdomen s'allonge de $^1/_{50}$.	L'abdomen reprend sa longueur primitive.
Les mouvements respiratoires ont lieu par petites séries de trois ou quatre séparées par des arrêts.	Il y a des arrêts plus ou moins longs en inspiration.
Il n'y a pas de pause expiratoire appréciable.	L'inspiration est marquée par une pause [1].

[1] J'ai déjà dit, page 57, en note, qu'il ne faut pas confondre les arrêts et les pauses.

Digitized by Google

§ XLVI.

Muscles respiratoires de la Periplaneta orientalis.

Rathke ne parle point des muscles respiratoires de la Blatte et les descriptions anatomiques assez détaillées du même insecte publiées par G. Rolleston [1] et par Huxley [2] sont muettes sur ce sujet.

Le système musculaire abdominal de la *Periplaneta* est des plus simples et ressemble entièrement à celui des Coléoptères (fig. 30).

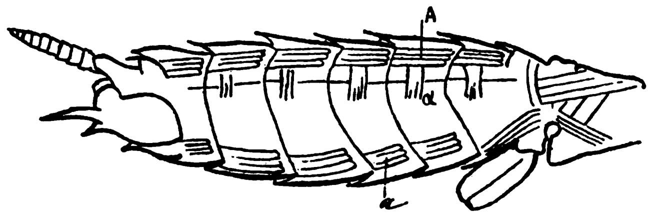


Fig. 30 × 3.
Muscles de la moitié gauche de l'abdomen de la *Periplaneta orientalis*.
α Muscles expirateurs verticaux.

Les muscles longitudinaux dorsaux *A* et sternaux *a* constituent des couches peu développées dont les faisceaux sont parallèles à l'axe du corps. Les muscles respiratoires vrais α sont représentés, absolument comme chez les Coléoptères, par une série de muscles verticaux assez courts croisant à angle droit la ligne des articulations entre les arceaux dorsaux et sternaux. Chacun d'eux naît du milieu de la partie déclive d'un arceau tergal et se termine verticalement en dessous sur la région latérale de l'arceau sternal correspondant.

Les insertions supérieures sont indiquées, à la surface tergale de l'abdomen, par des impressions latérales que j'ai signalées (p. 108).

La contraction de ces muscles a évidemment pour effet l'abaissement des plaques tergales et l'ascension des pièces sternales ; ce sont donc, comme chez tous les insectes où l'on retrouve pareille disposition, de véritables *muscles expirateurs*. Le volume un peu plus considérable de ceux qui occu-

1 Rolleston. *Forms of animal life*, p. 199. Oxford, 1870.

2 Huxley. *A manual of the anatomy of invertebrated animals*, pp. 398 et suiv. London, 1877.

Digitized by Google

pent les somites 2, 3 et 4 fait comprendre pourquoi l'expiration offre sa plus grande amplitude vers la base de l'abdomen [1].

Il n'existe pas de traces de muscles inspirateurs; la Blatte fait donc partie du grand nombre de formes dont l'inspiration est passive.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DU DEUXIÈME TYPE.

A. **Odonates.**

Les mouvements respiratoires très caractéristiques des Odonates, excessivement apparents chez les grandes *Aeschna*, *Cordulia*, *Libellula*, etc., ont dû attirer l'attention de tous les observateurs qui ont eu l'occasion de tenir, pendant quelques instants, entre les doigts l'un de ces animaux à l'état vivant. Aussi trouve-t-on déjà quelques indications à ce sujet dans l'ouvrage de Rösel (1749) [2].

Parmi les auteurs plus récents, les uns, comme Spallanzani [3], Treviranus [4], Maurice Girard [5], Graber [6], se sont bornés à signaler les déplacements de bas en haut et de haut en bas des lames sternales et parfois les

[1] Mes dissections m'ont permis de constater la présence de six muscles expirateurs de chaque côté du corps; mais vu la difficulté avec laquelle on enlève le tissu adipeux de la Blatte, je n'oserais affirmer qu'il n'existe pas une septième paire. Ce détail a, du reste, fort peu d'importance.

[2] Rösel. (Je n'ai pu consulter que l'édition hollandaise.) *Natuurlijke historie der Insekten*, tweede deel, bdz. 191, § 9. Haarlem en Amsterdam, 1764-1768.

[3] Spallanzani. Dans Sennebier, *Rapport de l'air avec les êtres organisés*, etc. Op. cit., p. 66.

[4] Treviranus. *Biologie*, etc. Op. cit., Vierter Band, p. 157.

[5] Girard. *Traité élémentaire d'entomologie*. Op. cit., p. 31.

[6] Graber. *Die Insekten*, 1r Theil. Op. cit., p. 108.

Digitized by Google

contractions et les dilatations transversales qui les accompagnent; mais d'autres ont poussé l'étude des phénomènes plus loin : Hausmann [1] a essayé, sans succès, de rendre les mouvements respiratoires des Libellules plus visibles, en utilisant, comme dans son expérience sur la Sauterelle, les oscillations d'une colonne d'eau; Burmeister [2] s'est assuré que les segments thoraciques ne participent pas aux mouvements de respiration; Barlow [3] a fait une remarquable série d'expériences sur le rythme respiratoire, sur les causes extérieures qui modifient celui-ci et sur l'influence du système nerveux chez les *Libellula depressa* et *vulgata;* Rathke [4] a complété les observations sur les mouvements respiratoires des Odonates par une description des muscles qui les déterminent; Baudelot [5] a publié les résultats de recherches intéressantes effectuées sur les Libellules et leurs larves, en vue de démontrer que les différents ganglions abdominaux jouent, chacun individuellement, le rôle de centres respiratoires pour les somites auxquels ils appartiennent et de prouver la fausseté de l'hypothèse de Faivre qui place le centre des mouvements de respiration des insectes dans le ganglion métathoracique. Plus récemment, Luchsinger [6] a démontré expérimentalement que le centre des mouvements de l'appareil respiratoire anal des larves réside dans la partie terminale de la chaîne ventrale. Enfin, Langendorff [7], qui paraît ne pas avoir eu connaissance des travaux de Barlow et de Baudelot, a répété sur la *Libellula depressa* et sur une forme d'*Aeschna,* la plupart des expériences effectuées par les auteurs précités [8].

1 Hausmann. *De animalium exsanguium respiratione.* Op. cit., p. 8.

2 Burmeister. *Handbuch der Entomologie,* Erster Band, p. 419.

3 Barlow. *Observations on the respiratory movements of Insects.* Op. cit.

4 Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen,* etc. Op. cit., pp. 108 et 109, § 10.

5 Baudelot. *De l'influence du système nerveux sur la respiration des insectes,* etc. Op. cit.

6 Luchsinger. *Ueber das respirationscentrum der Libellenlarven* (Arch. f. d. Ges. Physiologie de Pflüger, 1880, p. 158).

7 Langendorff. *Das Athmungscentrum der Insecten.* Op. cit., p. 85.

8 D'après Langendorff, Marshall Hall aurait fait, avant 1842 (par conséquent avant Barlow et Baudelot), des expériences très curieuses sur la persistance des mouvements respiratoires dans des tronçons isolés de l'abdomen des libellules; malheureusement, ni Langendorff ni moi n'avons réussi à retrouver le Mémoire original dans lequel Marshall Hall a consigné ses observations.

Digitized by Google

Les connaissances acquises sur le mécanisme respiratoire des Odonates étaient donc assez étendues lorsque j'ai entrepris mes études personnelles; mais il restait à vérifier les résultats de l'observation directe par des méthodes plus rigoureuses et à élucider un certain nombre de points douteux.

§ XLVII.

Libellula quadrimaculata.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode graphique.)

Afin de permettre au lecteur de bien comprendre ce qui va suivre, je crois utile de rappeler d'abord, en quelques mots, quelle est la structure de l'abdomen des Libellules.

Les anneaux abdominaux actifs comprennent chacun, comme le montrent les figures 31 et 11 (p. 114), un arceau tergal très grand constituant presque toute la surface visible et un arceau sternal réduit à une petite lamelle étroite située au fond d'une gouttière qui règne le long de la face inférieure de l'abdomen. L'arceau tergal est divisé par trois articulations mobiles *x* et *x' x'*, figure 11, en quatre pièces, deux dorsales proprement dites et deux latérales.

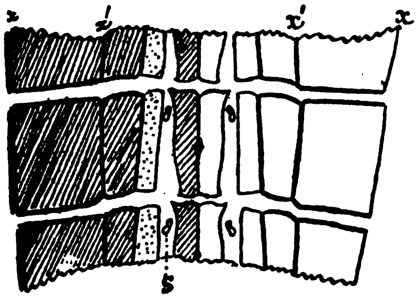


Fig. 31 × 4. — *Libellula quadrimaculata.* Abdomen fendu longitudinalement suivant la ligne médiane dorsale; les parois sont déroulées et étalées à plat.
S Les stigmates à droite et à gauche des plaques sternales.

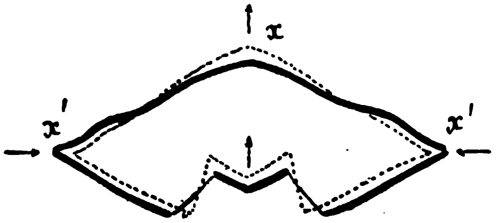
Quant à la lamelle sternale, elle est reliée, de chaque côté, aux bords inférieurs des pièces latérales par une zone plus molle formant à droite et à gauche un pli rentrant au fond duquel se trouvent les vrais stigmates abdominaux (S fig. 31)[1].

[1] Léon Dufour, *Rech. anat. et physiol. sur les Orthoptères, les Hyménoptères et les Névroptères* (Mém. Acad. sc. de Paris, savants étrangers, t. VII, p. 559, 1841), croyait avec Sprengel (*Commentarius de partibus quibus Insecta spiritus ducunt*, p. 3, Lipsiae, 1815) que l'abdomen

Digitized by Google

La plupart des observateurs qui m'ont précédé ont constaté que la lamelle sternale s'élève en expiration et Rathke a ajouté que, *dans la respiration active*, il y avait, en même temps, rétrécissement transversal de l'abdomen. Je montrerai plus loin que ce rétrécissement a toujours lieu.

L'inspection de la figure 11 représentant l'abdomen en coupe montre, en outre, que le phénomène est plus complexe encore : quand la lamelle sternale s'élève en expiration, les parties latérales rentrent et l'articulation *x* séparant les deux pièces tergales qui forment toit, s'élève d'une petite quantité.



Répétition de la figure 11.
Coupe transversale de l'abdomen de la *Libellula quadrimaculata*.

Ce n'est là qu'un détail; mais il importe de ne pas le perdre de vue lorsqu'on étudie graphiquement les mouvements respiratoires des Libellules; autrement, se laissant induire en erreur par ce qui se passe chez la majorité des Coléoptères, par exemple, on prendra pour inspiration la phase dans laquelle la crête dorsale s'élève, alors que cette phase répond, au contraire, à l'expiration.

Ceci posé, j'aborde les expériences faites à l'aide de la méthode graphique.

La Libellule est fixée par les ailes, comme il est dit page 15; mode de contention qui a pour avantage de n'altérer en rien la forme des mouvements respiratoires.

Pendant la plupart des expériences, un petit support est glissé sous l'extrémité de l'abdomen afin d'éviter l'action des oscillations de celui-ci et

des Odonates est absolument dépourvu de stigmates et que les orifices respiratoires de ces insectes occupent exclusivement le thorax.

Voyez, du reste, au sujet de l'existence et de l'emplacement des vrais stigmates abdominaux des Libellules :

HAUSMANN. *De animalium exsanguium respiratione commentatio*, 1803. Op. cit., p. 35.

BURMEISTER. *Handbuch der Entomologie*, t. I, p. 175. Berlin, 1832.

PALMEN. *Zur Morphologie des Tracheensystems*, p. 36. Leipzig, 1877.

OSKAR KRANCHER. *Der Bau der Stigmen bei den Insekten* (ZEITSCHR. F. WISS. ZOOL., Bd. XXXV, p. 551, 1880).

de n'enregistrer que les mouvements réels des pièces tégumentaires avec lesquelles on met le levier en contact.

Mouvements des lames sternales. — L'animal est tourné les ailes en bas, les pattes en haut; l'abdomen est horizontal. Un levier semblable à ceux qui ont été utilisés pour les Coléoptères croise transversalement le 4[e] somite abdominal.

Le contact est établi de la manière suivante : le levier porte un petit talon descendant qui pénètre dans le sillon de l'abdomen et qui adhère, à l'aide d'un peu de baume du Canada, à la 4[e] lame sternale dont il suit, par conséquent, tous les mouvements.

La lame sternale s'enfonçant à chaque expiration, la descente du levier répond au mouvement expiratoire.

Le graphique L, fourni dans ces conditions, montre un mouvement rapide.

← Sens de la rotation du cylindre.

On y lit assez nettement que l'inspiration dont la vitesse décroît de plus en plus se termine par une pause inspiratoire indiquée par un trait presque horizontal, tandis que l'expiration est beaucoup plus courte et plus brusque.

Mouvements des flancs. — La Libellule est couchée sur le côté; le levier repose transversalement sur l'arête latérale du 3[e] somite. La descente du levier répond, encore une fois, à l'expiration.

La courbe M obtenue offre à très peu près les mêmes caractères que ceux

← Sens de la rotation du cylindre.

qui caractérisent le tracé L des mouvements des lames sternales.

Digitized by Google

Mouvements de la crête dorsale. — La Libellule est placée dans le sens d'un insecte posé, les ailes au-dessus, les pattes tournées vers le sol. Le levier transversal repose sur la crête dorsale médiane du 3e somite.

Le lecteur voudra bien remarquer, en se reportant à la figure 11 (page 114), que, dans le cas actuel, c'est la portion ascendante de la courbe tracée qui représente l'expiration.

Le graphique N est moins démonstratif que les deux précédents.

⟵ Sens de la rotation du cylindre.

La rapidité de l'expiration, la lenteur relative de l'inspiration, la pause inspiratoire y sont cependant exprimées.

Oscillations rhythmiques de l'abdomen. — Il est possible d'obtenir des graphiques où les caractères des deux phases soient beaucoup plus accusés. Il suffit, dans ce but, d'enlever le petit support qui soutient l'extrémité de l'abdomen. Les expériences par la méthode des projections (§ XLVIII) montrent, en effet, qu'à chaque expiration l'abdomen se relève légèrement. Ce mouvement est parfaitement rhythmique et concorde exactement avec le mouvement expiratoire. En supprimant le support et en faisant reposer le levier sur la crête dorsale du 5e somite, on obtient le tracé O ci-dessous,

⟵ Sens de la rotation du cylindre.

dans lequel les mouvements de la crête et les mouvements généraux de l'abdomen qui ont lieu en même temps et dans le même sens s'ajoutent. Il est facile d'y retrouver, d'une façon très accentuée, la différence de vitesse entre l'expiration rapide et l'inspiration plus lente, ainsi que la pause en inspiration.

Les expériences qui précèdent conduisent évidemment à cette conclusion

Digitized by Google

que chez les Odonates, comme chez les Coléoptères et chez beaucoup d'autres insectes, l'inspiration est très probablement passive, tandis que l'expiration seule active a lieu sous l'influence d'une action musculaire. L'étude des muscles (§ LI) montrera à quel point notre déduction est exacte.

§ XLVIII.

Étude des mouvements respiratoires de la *Libellula quadrimaculata* par la méthode des projections.

Après ce que je viens d'exposer, l'emploi de la méthode des projections n'avait d'autre but que celui de constater quelques détails de valeur secondaire.

L'animal fixé par les ailes est placé dans l'instrument de façon à donner successivement la silhouette du profil longitudinal et celle de toute la face inférieure de l'abdomen (fig. 65 et 66, pl. IV).

Dans la première position (fig. 66) on constate surtout le déplacement de l'ensemble de l'abdomen vers le haut, en expiration. Dans la seconde, (fig. 65) on voit parfaitement les somites se rétrécir transversalement durant la phase expiratoire et se dilater en inspiration.

Malgré le développement de l'abdomen, les mouvements sont simultanés dans tous les somites; ceux-ci ne rentrent pas les uns dans les autres; la longueur de la région abdominale ne change guère. J'ai cru voir un très léger allongement expiratoire, mais ne dépassant pas $^1/_{150}$ de la longueur totale, valeur que l'on peut évidemment négliger.

En réunissant les différents résultats fournis par les deux méthodes, on décrira de la façon suivante les mouvements respiratoires de la *Libellula quadrimaculata*.

Faits généraux.

1° Pendant les mouvements respiratoires les faces sternales s'élèvent et s'abaissent (fait signalé par les anciens observateurs); les régions latérales des somites rentrent et sortent (fait indiqué par Rathke et Graber); de plus, l'arête dorsale monte et descend.

2° Les mouvements d'inspiration ou d'expiration sont simultanés dans tous les somites; il n'y a pas d'onde.

3° La longueur de l'abdomen ne change pas.

Digitized by Google

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
Rapide et courte.	Plus lente et à vitesse décroissante.
	Il existe une pause inspiratoire.
Les lames sternales s'élèvent.	Les lames sternales s'abaissent.
Les flancs rentrent.	Les flancs sortent.
L'arête médiane dorsale s'élève.	L'arête médiane dorsale s'abaisse.
L'abdomen se relève d'une petite quantité.	L'abdomen descend.

§ XLIX.

Expériences sur le système nerveux des Libellules.

Ainsi que je le disais à la page 112, Barlow, Baudelot, Luchsinger et Langendorff ont effectué un grand nombre d'expériences sur le système nerveux des Libellules ou de leurs larves.

Barlow opérant sur les *Libellula depressa* et *vulgata* a constaté : 1° que les mouvements respiratoires abdominaux continuent pendant longtemps, mais ralentis et affaiblis, soit chez la Libellule décapitée, soit chez l'individu dont la tête a été écrasée brusquement;

2° Que diverses causes, telles que les excitations mécaniques, l'élévation de température, un courant électrique traversant l'abdomen longitudinalement, amènent une accélération notable du rhythme respiratoire, comme elles le font chez la Libellule intacte;

3° Que l'on peut diviser l'abdomen d'une Libellule en deux ou trois tronçons qui, bien qu'isolés, continuent à présenter des mouvements respiratoires, mouvements qu'une élévation de température accélère d'une manière marquée [1].

[1] D'après la belle figure du système nerveux du *Gomphus forcipatus*, publiée par E. Blanchard dans le *Règne animal illustré* (édition Masson), Insectes, Atlas, pl. 100, Paris, 1849, les centres nerveux des Libelluliens seraient disposés comme suit : outre les ganglions cérébroïdes et sous-œsophagiens, il existe une masse ganglionnaire prothoracique d'où émanent les nerfs de la première paire de pattes, une deuxième masse thoracique très volumineuse résultant de la fusion des ganglions méso- et métathoraciques et distribuant des nerfs nombreux aux muscles des ailes et aux deux paires de pattes postérieures; enfin sept ganglions abdominaux d'un faible volume et fort distants les uns des autres.

Digitized by Google

Ces recherches intéressantes, que je n'ai pu que résumer très brièvement, démontrent deux points importants. Elles prouvent, en effet, que les mouvements respiratoires des Insectes sont, avant tout, comme ceux des Vertébrés, des mouvements réflexes et que les paires ganglionnaires abdominales sont autant de centres nerveux respiratoires animant les segments auxquels ils appartiennent.

Baudelot, qui semble avoir ignoré l'existence du travail de son prédécesseur, a naturellement refait, en partie, les mêmes expériences; il s'est adressé à la Libellule et à sa larve [1] et a eu pour but particulier de démontrer la fausseté de l'hypothèse de Faivre dont j'ai analysé le mémoire à propos des Coléoptères.

Baudelot a vu, comme Barlow, les mouvements respiratoires persister pendant longtemps chez l'insecte décapité, dans l'abdomen séparé du thorax et dans des tronçons ne comprenant qu'un petit nombre de somites.

Luchsinger, ayant isolé chez une larve un tronçon ne comprenant que les quatre derniers somites, y a constaté, après un arrêt de quelques minutes, la réapparition des mouvements respiratoires actifs et Langendorff, qui a reproduit plusieurs des expériences de Barlow, est arrivé aux mêmes résultats que le physiologiste anglais.

Les recherches de ces divers auteurs se confirmant mutuellement et conduisant à des conclusions identiques ont, en quelque sorte, épuisé le sujet et ne permettaient point d'espérer des découvertes nouvelles.

J'ai effectué cependant, à l'aide de la *Libellula quadrimaculata,* un certain nombre d'expériences qui m'ont fourni l'occasion de constater l'exactitude des faits principaux et même des détails observés par Barlow, Baudelot et Langendorff [2].

Laissant de côté l'exposé de mes essais personnels qui serait superflu, j'insisterai sur un point intéressant.

Ces quatre séries d'expériences, faites par des expérimentateurs diffé-

1 Baudelot n'indique nulle part la forme spécifique qui a servi à ses expériences. Ce détail importe, du reste, fort peu.

2 Voir le paragraphe L suivant pour une expérience sur le système nerveux de l'*Aeschna grandis.*

Digitized by Google

rents, montrent que les mouvements respiratoires abdominaux des Libellules persistent lorsque l'abdomen est soustrait à l'influence des centres nerveux cérébroïdes ou centres des excitations volontaires et même lorsqu'il n'est plus soumis à l'influence des ganglions thoraciques; mais elles prouvent aussi, surtout les séries de Barlow, de Langendorff et la mienne, que les ganglions cérébroïdes ne sont pas absolument sans action sur l'amplitude et le nombre des mouvements de respiration.

Barlow a vu, chez la Libellule décapitée, les mouvements affaiblis, et moi-même j'ai pu, bien plus nettement, constater une diminution d'amplitude par la méthode des projections.

Après la suppression de la tête de l'insecte, Barlow et Langendorff ont toujours constaté un ralentissement manifeste, le nombre des mouvements respiratoires par minute tombant, d'après le premier de ces auteurs, de 64 à 50, de 108 à 40, de 60 à 25, et d'après le second, de 84 à 68, 64 et, enfin, 48.

J'ai observé personnellement un léger ralentissement chez la *Libellula quadrimaculata* qui, intacte, respirait trente-huit fois par minute et, décapitée, trente-quatre fois seulement.

La comparaison de ces résultats avec ceux qu'ont fournis des insectes d'autres groupes, me permettra de formuler des conclusions générales à la fin de ce travail.

§ L.

Aeschna grandis.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode graphique.)

Malgré sa taille plus considérable, l'*Aeschna grandis* ne m'a pas donné d'aussi bons résultats que la *Libellula quadrimaculata*.

Les expériences ont été faites sur un individu très vif venant de manger et, cependant, l'amplitude des divers mouvements a toujours été faible, fait que j'attribue à la forme de l'abdomen de l'insecte.

Les mouvements respiratoires s'effectuent de la même façon que chez la Libellule; aussi ne citerai-je qu'une seule expérience.

Digitized by Google

Après avoir pris plusieurs tracés des mouvements de rentrée et de sortie des flancs chez l'individu intact, j'ai coupé la chaîne nerveuse à la base de l'abdomen, puis j'ai pris un nouveau tracé des mouvements des flancs fourni, par conséquent, par l'abdomen soustrait à l'influence des ganglions céphaliques et thoraciques.

Le graphique, parfaitement régulier, indique que la forme des mouvements respiratoires est restée absolument la même; le rhythme et l'amplitude sont seuls un peu modifiés. L'amplitude a très légèrement diminué et le nombre des mouvements par minute est descendu de 41 à 38.

Ce résultat intéressant confirme parfaitement ce que j'ai exposé, dans le paragraphe précédent, concernant l'indépendance des mouvements respiratoires abdominaux et l'influence des centres nerveux antérieurs des *Libellula* proprement dites.

§ LI.

Muscles respiratoires de l'Agrion sanguineum.

Les muscles respiratoires des Libelluliens ont été décrits par Rathke [1]; mais comme cette description n'est accompagnée d'aucun dessin, le lecteur éprouve une certaine peine à se faire une idée exacte de la disposition réelle. Les figures ci-jointes comblent, je l'espère, cette lacune.

La dissection des muscles abdominaux des Odonates est assez difficile et ne m'a bien réussi que pour l'*Agrion sanguineum*.

L'abdomen des *Agrion* n'offre pas les arêtes longitudinales de celui des Libellules, mais l'organisation est, au fond, absolument la même. Chaque somite se compose d'un grand arceau tergal dont les bords qui descendent fort bas limitent, sous le ventre, une gouttière profonde occupée par une lame sternale étroite. Celle-ci est reliée à l'arceau tergal par une zone flexible très élastique, formant de chaque côté un pli accusé (fig. 33).

Si l'on ouvre l'abdomen dans sa longueur, on voit le pli produit par la zone élastique faire, à l'intérieur du corps, une saillie notable. Les muscles

[1] *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc. Op. cit., p. 109.

Digitized by Google

longitudinaux ordinaires déterminant les incurvations de l'abdomen sont représentés comme suit (fig. 32.) :

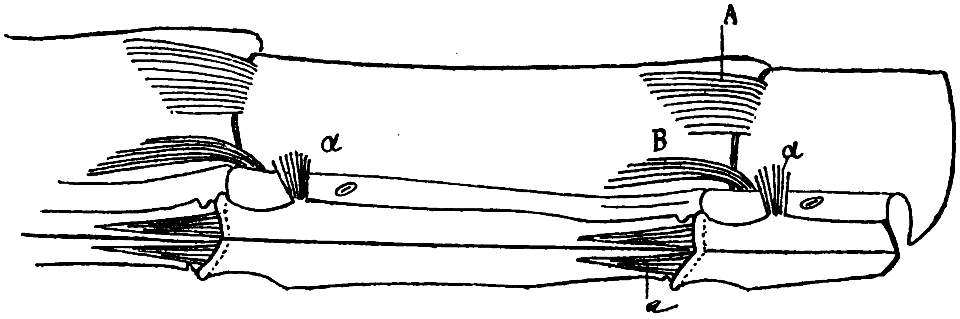


Fig. 32 × 13. — Portion de la moitié droite de l'abdomen de l'*Agrion sanguineum*.

A, *B* Muscles longitudinaux dorsaux.
a — — sternaux.
α — expirateurs verticaux.

La largeur de l'abdomen a été exagérée à dessein pour rendre l'interprétation des muscles plus facile.

1° *Dans l'arceau tergal* par deux groupes de fibres étalés en couches plus ou moins larges, l'un dorsal *A*, l'autre presque ventral *B* [1]. Celui-ci naît de la partie inférieure du bord antérieur de l'arceau tergal qui suit immédiatement;

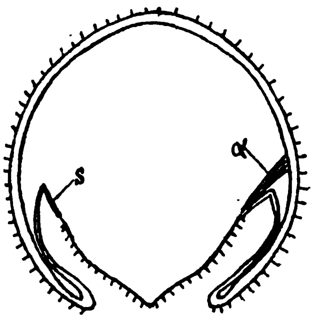


Fig. 33 × 18. — *Agrion sanguineum*.
Coupe transversale de l'abdomen.
S Stigmate.
α Muscle expirateur vertical.

2° *Dans l'arceau sternal* par un petit faisceau musculaire partant du bord antérieur de la plaque sternale suivante *a*.

On remarquera le peu de longueur de ces muscles et les distances considérables qui séparent les groupes successifs.

Les muscles respiratoires vrais *α*, fort courts et situés aussi très loin les uns des autres, ont une direction verticale et unissent, de chaque côté, la lame sternale à l'arceau tergal correspondant, en croisant la zone élastique.

Ce sont, comme on peut le voir, de petits muscles légèrement étalés en

[1] Son insertion inférieure est cachée sur la figure par le pli saillant de la zone élastique.

Digitized by Google

éventail et naissant de saillies latérales que présentent les lames sternales dans le voisinage de leur extrémité antérieure [1].

Il est aisé de comprendre comment ces muscles verticaux soulèvent les lames sternales et comment celles-ci, à leur tour, tendant la zone membraneuse, obligent les bords inférieurs des arceaux tergaux à se courber en dedans.

Les muscles en question sont donc expirateurs; les muscles inspirateurs font défaut, ainsi que Rathke le fait remarquer, et l'inspiration, chez les Odonates, s'opère par l'élasticité, du reste très grande, des téguments.

B. **Diptères.**

Les observations sur le mécanisme respiratoire des Diptères ont été peu nombreuses; Kirby et Spence, Straus-Durckheim, Dugès, Rathke et Künkel d'Herculais sont les seuls auteurs que je puisse citer à des titres divers [2].

Les trois premiers se bornent à indiquer incidemment de petits faits sans importance. Ainsi Kirby et Spence, parlant des vibrations des ailes de l'*Ortalis vibrans* posé, émettent l'opinion que ces vibrations sont liées aux mouvements respiratoires de l'insecte [3]. Straus-Durckheim signale la persistance des mouvements de respiration chez une mouche décapitée [4], et Dugès [5], qui a observé des mouches et des hélophiles, se contente de résultats incomplets.

Il faut lire le mémoire de Rathke [6] pour trouver une description suffisamment détaillée et à peu près exacte des mouvements respiratoires de quelques Diptères : *Tipula, Tabanus, Empis* et *Musca.* D'après ce travail, les mouve-

[1] Chez quelques Odonates (les *Aeschna,* si ma mémoire est fidèle), ces saillies, beaucoup plus développées, sont de véritables apodèmes arqués.

[2] Les deux mémoires de Léon Dufour sur les Diptères (1851) et sur la *Sarcophaga hæmorrhoidalis* ne renferment rien sur la respiration.

[3] Kirby et Spence. *An introduction to entomology,* People's edition, p. 447. London, 1867.

[4] Straus-Durckheim. *Considérations,* etc. Op. cit., p. 377.

[5] Dugès. *Traité de physiologie comparée,* p. 535. Montpellier, 1838.

[6] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen,* etc. Op. cit., pp. 105 à 107.

Digitized by Google

ments les plus nettement visibles, chez les insectes en question, consistent ordinairement en élévations et abaissements alternatifs des plaques sternales.

Enfin, Künkel d'Herculais a publié en 1875 la première partie et en 1881 l'atlas seul de la deuxième partie d'un ouvrage étendu sur l'organisation des Volucelles [1]. Le chapitre concernant la respiration n'a pas encore paru, mais l'auteur décrit le système musculaire abdominal et appelle l'attention sur des muscles qu'il considère comme déterminant les mouvements respiratoires. Je discuterai son interprétation plus loin, § LVIII.

§ LII.

Tipula gigantea.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

L'organisation de l'abdomen des Tipules n'est pas sans analogie avec ce que nous présentent les Odonates et les Orthoptères acridiens. Cet abdomen allongé se compose, en effet, de longs segments bien distincts constitués chacun par un grand arceau tergal entrant dans la composition des flancs et par un arceau sternal plus petit relié au premier au moyen d'une zone membraneuse fortement repliée en dedans. Structure caractéristique qui fait supposer immédiatement que les mouvements respiratoires doivent consister, comme chez les Libellules et les Acridiens, en ascensions et en descentes des pièces sternales de tous les somites ou, au moins, de la plupart d'entre eux.

Rathke dit cependant que les mouvements des pièces sternales sont très faibles, qu'ils n'ont lieu que pour les trois ou quatre premiers somites abdominaux et qu'il lui a été impossible de distinguer le moindre déplacement ayant un caractère respiratoire dans les segments situés au delà.

Mais Rathke, qui ne disposait que de l'observation directe, a mal vu, comme on en jugera par la description suivante :

L'insecte, qui est une femelle, est fixé par les ailes ; l'abdomen est absolument libre.

[1] Künkel d'Herculais. *Recherches sur l'organisation et le développement des Volucelles*, 1re partie, pp. 184 et 185, Paris, 1875 ; et Atlas de la 2me partie, pl. XII, fig. 1. Paris, 1881.

Digitized by Google

Les mouvements respiratoires, quoique de faible amplitude, sont très nets et ont lieu dans la presque totalité de l'abdomen. L'expiration est marquée par la descente des arceaux dorsaux et par l'ascension des pièces sternales qui rentrent sous les précédentes. La diminution du diamètre vertical, mesurée au 3e somite, est à peu près de $^1/_{15}$.

Le fait le plus intéressant à noter est l'existence d'une onde véritable, le mouvement n'étant pas simultané dans tous les somites, mais progressif; les somites 1, 2, 3, 4 sont en expiration lorsque les segments 5, 6, 7, 8, 9 sont en inspiration et *vice versâ*.

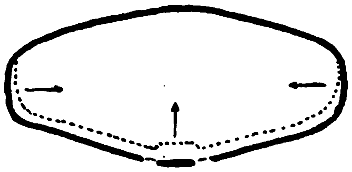
Les mouvements respiratoires sont accompagnés de légères oscillations de l'abdomen; mais il m'a paru, sans pouvoir le certifier, qu'il n'y avait pas toujours coïncidence; de sorte que ces oscillations sont peut-être étrangères à l'acte de la respiration.

La longueur de l'abdomen ne change pas; ce qui montre que les somites ne se déplacent pas dans le sens longitudinal. Le métathorax semble immobile.

§ LIII.

Calliphora vomitoria.

L'abdomen des Muscides se fait remarquer par le grand développement des arceaux tergaux qui, chez les Calliphores, par exemple, forment entièrement les flancs et se recourbent même à la face inférieure. Il en résulte que les arceaux sternaux, en général fort petits, ne sont représentés que par une série de plaques à peu près quadrangulaires occupant la ligne médiane ventrale. Ces plaques sont naturellement reliées aux bords des arceaux tergaux par une zone cutanée molle (fig. 34 et fig. 13).



Répétition de la figure 13.
Coupe transversale de l'abdomen de la *Lucilia cæsar*.

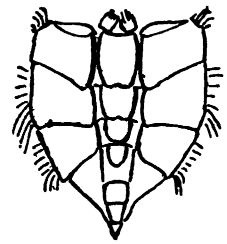


Fig. 34 × 5.
Face inférieure de l'abdomen de la *Calliphora vomitoria* ♀.

Ceci rappelé, je crois bien faire en reproduisant d'abord, en substance, les résultats des études de Rathke. Dans la respiration calme, dit cet éminent observateur, les plaques sternales des Muscides s'élèvent et s'abaissent d'une petite quantité. Si la respiration devient précipitée, comme chez la mouche maintenue par les ailes, il y a non seulement des mouvements de la part des plaques sternales, mais on observe, en même temps, des déplacements des flancs en dedans et en dehors, c'est-à-dire des déplacements des parties latérales des arceaux tergaux. Pendant ces phases, l'abdomen s'allonge et se raccourcit alternativement, l'allongement coïncidant avec l'élévation des pièces sternales (expiration), le raccourcissement accompagné d'incurvation vers le bas répondant à l'abaissement de ces mêmes pièces (inspiration).

Le tableau qui précède est à peu près exact; le lecteur pourra apprécier les petites erreurs commises par Rathke, en lisant l'exposé suivant de mes expériences personnelles.

§ LIV.

Étude des mouvements respiratoires de la Calliphora vomitoria par la méthode des projections.

La Calliphore, privée de ses pattes et de ses ailes, est supportée par deux épingles fines traversant les parties latérales du mésothorax. On place l'animal dans l'appareil de façon à obtenir successivement des silhouettes du profil longitudinal entier (fig. 67, pl. V), puis de l'abdomen seul vu dans sa largeur et par la face inférieure (fig. 68, pl. V). Le grossissement est de 10 diamètres.

L'insecte exécute deux espèces de mouvements qu'il importe de distinguer l'un de l'autre : 1° un mouvement sans caractère respiratoire. Chaque fois que la Calliphore agite rapidement ses tronçons de pattes et ses moignons d'ailes, elle étend et relève vivement l'abdomen;

2° Des mouvements respiratoires vrais, ayant lieu comme suit :

Le métathorax reste immobile.

Digitized by Google

Les inspirations sont lentes, mais assez profondes et séparées par des pauses inspiratoires.

Les plaques sternales s'élèvent en expiration et s'abaissent en inspiration; la diminution du diamètre vertical de l'abdomen en expiration est de $^1/_{17}$, par conséquent de valeur moyenne.

Même dans la respiration calme, le diamètre transversal de l'abdomen diminue et augmente un peu alternativement; les bords inférieurs des arceaux tergaux se portent en dedans et en dehors.

Pendant l'expiration, l'extrémité de l'abdomen se relève légèrement et des styles collés sur la face dorsale du corps montrent que les arceaux tergaux rentrent un peu les uns dans les autres. Lors de l'inspiration, ces mêmes arceaux s'écartent faiblement et la pointe de l'abdomen s'abaisse.

Les silhouettes montrent clairement que lorsque l'oviscapte ou pondoir des femelles est à l'état de rétraction, l'abdomen ne subit aucun changement appréciable de longueur, son extrémité décrivant seulement un petit arc de cercle. Il en est autrement lorsque l'insecte étend l'oviscapte; dans ce cas, cet organe subit un allongement manifeste et très facile à s'expliquer, pendant chaque mouvement expiratoire.

Mes résultats diffèrent donc de ceux de Rathke par deux points : les parties latérales des arceaux tergaux se portent en dedans et en dehors pendant la respiration calme et normale; l'abdomen ne change pas de longueur. L'auteur cité a été, quant à ce dernier point, victime de l'illusion qui trompe presque tous ceux qui se bornent à observer les mouvements respiratoires des insectes, à l'œil nu ou à la loupe.

Lucilia cæsar. — Les mouvements de respiration sont les mêmes que ceux de la Calliphore et n'exigent, par conséquent, pas de description spéciale.

Digitized by Google

§ LV.

Muscles respiratoires de la Calliphora vomitoria.

La musculature de l'abdomen offre la disposition la plus simple que j'aie rencontrée, jusqu'à présent, chez un insecte parfait.

Les muscles longitudinaux dorsaux *A* et sternaux *a* ainsi que les muscles expirateurs *α*, au lieu d'être condensés sous forme de faisceaux isolés et distincts, sont représentés ici par des nappes musculaires larges et minces.

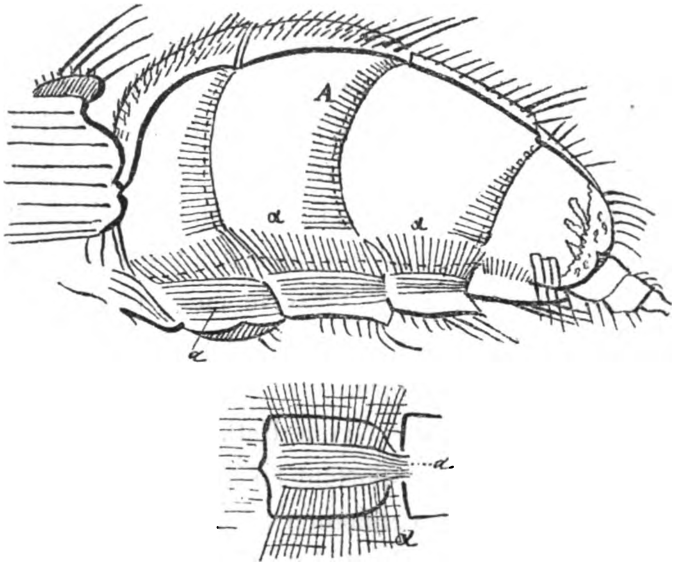


Fig. 35 × 10. — Muscles de la moitié droite de l'abdomen de la *Calliphora vomitoria* ♀.
A Muscles longitudinaux dorsaux.
a — — sternaux.
α — expirateurs verticaux.
Sous la figure on a représenté, à part, une plaque sternale et ses muscles.

Celle de ces nappes qui joue le rôle des muscles expirateurs verticaux des Coléoptères est composée de fibres à direction ascendante et relie les plaques sternales à la région inférieure des arceaux tergaux. Ses insertions expliquent parfaitement l'ascension des plaques sternales et la rentrée des parties latérales des arceaux supérieurs pendant l'expiration.

Je n'ai pas trouvé de muscles que l'on puisse considérer comme inspirateurs.

Digitized by Google

§ LVI.

Scatophaga stercoraria.

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

La structure de l'abdomen diffère quelque peu de celle que j'ai décrite plus haut chez les Calliphores; les plaques sternales sont proportionnellement plus larges et la zone molle qui les unit aux bords inférieurs des arceaux tergaux est légèrement convexe en dehors à l'état de repos.

Les longs poils qui couvrent l'insecte rendent les observations assez difficiles; néanmoins je crois avoir constaté ce qui suit : dans la respiration calme, les plaques sternales des somites 2, 3, 4, 5 s'élèvent vers le haut, en expiration, le maximum d'effet ayant lieu pour la 4^e et la 5^e plaque. Les poils qu'elles portent font l'office de styles; ils s'inclinent en arrière et indiquent ainsi que les lames sternales deviennent légèrement obliques.

Le grossissement, assez fort, me permet d'assurer que la longueur de l'abdomen ne varie pas et que les somites thoraciques restent immobiles.

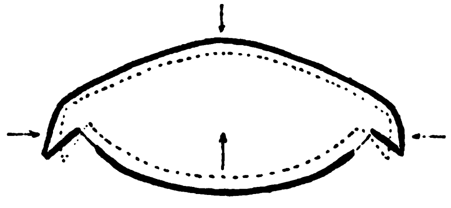
§ LVII.

(Syrphides.) Eristalis tenax et Syrphus ribesii.

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

L'*Eristalis tenax* me servira à exposer le mécanisme respiratoire des Syrphides, qui diffère légèrement de celui des autres Diptères.

L'abdomen, très large, ne comprend, du côté tergal, que quatre arceaux bien développés, tandis qu'à la face inférieure existent cinq grandes plaques sternales mobiles (fig. 12).



Répétition de la figure 12.
Coupe transversale de l'abdomen de l'*Eristalis tenax*.

L'insecte privé de ses pattes, de ses ailes et fixé par deux épingles traversant les parties latérales du mésothorax, est placé successivement dans l'appareil, suivant différentes positions. Le grossissement employé est de 10 diamètres (fig. 69, pl. V).

En expiration, les plaques sternales s'élèvent; le maximum d'effet a toujours lieu pour la 2e. En même temps, les arceaux tergaux 2, 3, 4 s'abaissent et les flancs rentrent, la plus grande dépression de ceux-ci ayant encore une fois lieu pour le 2e somite. L'abdomen diminue donc de diamètre dans deux sens. Dans le sens vertical, cette diminution, mesurée au niveau du 2e segment, est de $^1/_9$; dans le sens transversal, elle est de $^1/_{15}$ seulement.

Fait assez curieux, vu sa rareté chez les Diptères, l'abdomen s'allonge de $^1/_{20}$ durant chaque expiration; son extrémité se courbe en outre vers le bas.

Il existe très nettement une courte pause à la fin de chaque mouvement inspiratoire [1].

Pendant les arrêts qui ont toujours lieu en inspiration, l'insecte imprime souvent à son abdomen des mouvements d'oscillation considérables, dans le sens vertical. Je reviendrai sur ce détail à propos du système musculaire.

J'ajoute, enfin, qu'il n'y a ni mouvements thoraciques, ni onde.

Syrphus Ribesii. — Les mouvements respiratoires sont naturellement à peu près les mêmes que chez l'*Eristalis tenax*. On voit, en expiration, les plaques sternales s'élever, les arceaux tergaux s'abaisser et, quand la respiration est très active, l'abdomen augmenter légèrement de longueur [2].

La diminution de diamètre, dans le sens vertical, mesurée à la hauteur des somites apparents 2 et 3, est au plus de $^1/_{15}$; l'allongement atteint $^1/_{36}$ de la longueur totale de la région abdominale. J'ai observé une pause à la fin de l'inspiration. Il n'existe ni onde, ni mouvement thoracique.

[1] Il semble aussi y avoir une trace de pause expiratoire; mais le fait, s'il était bien constaté, serait unique chez les insectes (voyez § XCV).

[2] L'allongement n'existe que lorsque la respiration est très active; lorsque la respiration est calme, la longueur de cette partie du corps ne varie pas d'une manière appréciable.

Digitized by Google

§ LVIII.

Muscles respiratoires de l'Eristalis tenax.

Le système musculaire des Syrphides a été étudié, chez les Volucelles, par Künckel d'Herculais [1]. Si, ce que j'ai lieu de croire, les figures publiées par ce savant sont exactes, il n'existe, quant aux muscles, entre les Volucelles et les Eristales, que des différences très peu importantes.

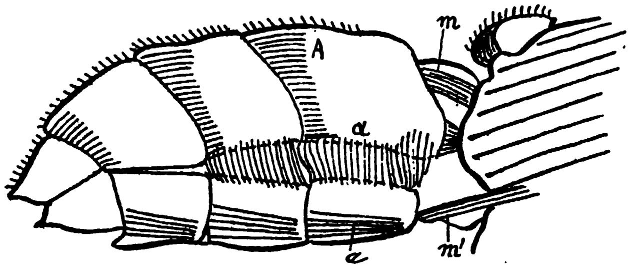


Fig. 36 × 8. — Moitié gauche de l'abdomen de l'*Eristalis tenax*.
A Muscles longitudinaux dorsaux.
a — — sternaux.
α — expirateurs verticaux.
m et *m'* — élévateurs et abaisseurs de l'abdomen déterminant les mouvements généraux d'oscillation dans le sens vertical.

D'un autre côté, le lecteur peut constater immédiatement, par la comparaison des figures 35 et 36, que les muscles respiratoires *α* de l'*Eristalis tenax* sont exactement disposés comme ceux des Muscides et en particulier de la *Calliphora vomitoria*. Comme chez les Calliphores, *il n'existe ici que des muscles expirateurs* offrant la disposition générale ordinaire, c'est-à-dire unissant les arceaux tergaux aux arceaux sternaux en croisant la zone molle latérale. Ils sont étalés sous forme d'une nappe mince que le microscope montre composée d'une seule couche de fibres musculaires à peu près parallèles. C'est cette couche musculaire continue des Muscides et des Syrphides qui se différencie en faisceaux musculaires distincts chez les Tabanides (fig. 39), chez les Coléoptères et chez tant d'autres insectes.

Künckel d'Herculais, qui n'était pas préparé par des études spéciales sur le mécanisme respiratoire des articulés, a donné aux muscles abdominaux des Volucelles des significations que je ne saurais accepter. Les deux muscles *m* et *m'* qui, naissant, *m* de la face tergale du premier somite et *m'* de la face sternale du métathorax, vont se terminer aux bords antérieurs du 2[e] somite abdominal, muscles qu'il nomme *élévateur* et *abaisseur de l'abdomen*, sont

[1] Künckel d'Herculais. *Rech. sur l'organisation et le développement des Volucelles*. Op. cit., 1[re] partie, pp. 184 et 185, pl. IX, fig. 5, pl. X, fig. 6, et Atlas de la 2[me] partie, pl. XII, fig. 1.

Digitized by Google

pour lui des muscles inspirateurs. Quant à la couche musculaire mince α que j'ai décrite plus haut comme représentant les muscles expirateurs des autres insectes, elle concourrait, suivant Künckel d'Herculais, à l'acte respiratoire, en comprimant le canal trachéen dans lequel s'ouvrent les stigmates et en obligeant ainsi l'air qui remplit ce canal à s'emmagasiner dans les vésicules aériennes du Diptère.

Tout ce que j'ai exposé dans les chapitres précédents me semble cependant démontrer que la couche de fibres musculaires α qui croise la zone molle latérale est exactement l'homologue des muscles expirateurs verticaux des insectes des autres groupes et que c'est cette couche dont la contraction fait remonter les plaques sternales et descendre les arceaux tergaux en les incurvant un peu en dedans à leur partie inférieure, en un mot, qui détermine une diminution dans la capacité de l'abdomen et amène, par conséquent, l'expiration.

Enfin la signification d'inspirateurs donnée par Künckel d'Herculais aux muscles *m* et *m'*, élévateurs et abaisseurs de l'abdomen, ne me paraît pas plus heureuse. Les expériences par projection nous ont montré, en effet (p. 130), que ces muscles n'entrent en jeu que par moments et que c'est précisément *pendant les arrêts respiratoires* que l'insecte fait *souvent* exécuter à son abdomen des mouvements oscillatoires dans le sens vertical.

§ LIX.

Asilus (sp ?)

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

L'abdomen allongé et étroit offre la structure ordinaire de celui des Diptères ; c'est-à-dire que les arceaux tergaux sont très développés et que les arceaux sternaux ont pris la forme de grandes plaques convexes (fig. 37).

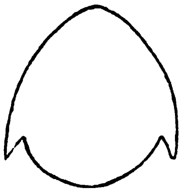


Fig. 37 × 10.— *Asilus.* Coupe transversale de l'abdomen.

L'insecte *intact,* muni de ses ailes et de ses pattes, n'est fixé que par une seule épingle traversant le mésothorax. Les mouvements respiratoires très nets et très faciles à dessiner sont les suivants : les plaques sternales s'élèvent et s'abaissent d'un mouve-

ment rapide, sans que l'on puisse discerner de déplacements du côté des arceaux dorsaux. Ces mouvements sont surtout accusés pour les plaques 1 et 2; la diminution du diamètre vertical en expiration est de $^1/_{10}$. De temps à autre, mais pas d'une façon constante, il y a apparition d'une onde. Dans ce cas, les mouvements sont plus lents et l'on voit les plaques sternales 1 et 2 s'élever, tandis que 3 et 4 s'abaissent, et vice versâ.

Enfin, pendant la respiration calme, l'extrémité de l'abdomen oscille verticalement d'une manière lente et régulière, sans qu'il y ait aucune concordance entre ce genre de déplacement et les mouvements respiratoires vrais.

On n'observe ni changements de longueur de l'abdomen, ni mouvements thoraciques. Quant aux arrêts qui ont lieu de temps en temps, ils répondent toujours à l'inspiration.

§ LX.

Tabanus bovinus.

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

En fait de Tabanides, Rathke a examiné le *Tabanus autumnalis;* il en a décrit les mouvements respiratoires, ainsi que le système musculaire abdominal. Mes observations personnelles, faites à l'aide d'un meilleur procédé et sur une forme plus grande, me permettent, tout en confirmant les résultats obtenus par Rathke, de signaler un certain nombre de détails intéressants.

L'abdomen des Tabanides diffère surtout de celui des Muscides par les dimensions relatives des arceaux tergaux et sternaux. Chez les Muscides, les arceaux supérieurs sont énormes et les arceaux sternaux sont réduits à de simples plaques; ici, au contraire, les tergites et les sternites sont presque égaux. A la hauteur des flancs, les arceaux tergaux chevauchent un peu sur les inférieurs et cachent la bande flexible qui les y relie (fig. 38).

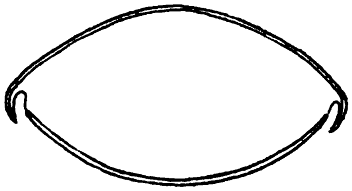


Fig. 38 × 6. — *Tabanus bovinus.* Coupe transversale du 2e somite abdominal.

D'après Rathke les mouvements respiratoires des Tabanides sont les sui-

vants : les arceaux sternaux s'élèvent et s'abaissent, principalement près de la base de l'abdomen; si la respiration devient un peu plus active, les bords latéraux des arceaux tergaux antérieurs sont alternativement inclinés en dedans ou repoussés au dehors; enfin, si les mouvements deviennent encore plus énergiques, les arceaux sternaux se déplacent dans le sens longitudinal, s'engageant un peu les uns sous les autres en expiration.

Tout cela est à peu près exact; ce qui a surtout échappé à l'auteur cité, c'est que les déplacements qui, selon lui, n'ont lieu que lorsque les mouvements respiratoires s'accélèrent chez l'insecte excité, ont lieu aussi dans la respiration calme.

Voici, du reste, ce que m'ont donné les observations faites à l'aide de la méthode des projections :

Le Taon, privé de ses ailes et de ses pattes, était fixé par deux épingles fines traversant les parties latérales de la région la plus large du thorax; l'abdomen était libre. L'insecte fut placé dans l'appareil, tantôt de façon à donner la silhouette du profil longitudinal et portait alors des styles de papier sur les arceaux tergaux 2 et 4, tantôt de façon à fournir l'image de la face dorsale dans toute sa largeur, tantôt, enfin, muni de trois styles collés sur l'arceau sternal du 3ᵉ somite et posé suivant l'axe du faisceau lumineux, de manière à projeter la coupe de l'abdomen et à permettre l'examen des changements de courbure de l'arceau sternal en question (le grossissement a varié de 9 à 8 diamètres).

Respiration calme; ni pauses inspiratoires, ni pauses expiratoires; mais, de temps en temps, des arrêts en inspiration. Aucun mouvement du côté du thorax.

En expiration, les arceaux sternaux s'élèvent, l'effet maximum ayant lieu à la hauteur de l'articulation entre le 2ᵉ et le 3ᵉ arceau. On voit très clairement sur les silhouettes, ou en regardant directement l'insecte à la loupe, que le plus grand effort mécanique a lieu au point que je viens d'indiquer. La disposition des muscles nous en donnera la raison.

En même temps, les arceaux sternaux 3, 4, 5 se portent légèrement en avant et l'extrémité de l'abdomen se relève; les styles fixés sur les arceaux dorsaux 2 et 4 montrent par leurs déplacements que les arceaux dorsaux

Digitized by Google

rentrent un peu les uns sous les autres et que ce mouvement n'a une certaine importance que pour les somites postérieurs.

Pendant la phase expiratoire, les arceaux sternaux changent de courbure; leurs régions latérales se dépriment un peu plus que leur région médiane et les rebords inférieurs de la plupart des arceaux tergaux s'inclinent légèrement en dedans, ce qui amène une diminution du diamètre transversal de l'abdomen.

Tous ces déplacements sont simultanés; il n'y a pas de trace d'onde.

La longueur de l'abdomen reste très sensiblement invariable lorsque la respiration est normale. Je n'ai constaté d'allongements et de raccourcissements réels que chez l'insecte momentanément excité par les manipulations et les mutilations que nécessitent les apprêts d'une expérience.

La diminution expiratoire du diamètre vertical de l'abdomen, là où elle est le plus accusée, c'est-à-dire sur la limite des somites 2 et 3, est environ de $^1/_{25}$; le rétrécisssement transversal à la hauteur du 2^e somite n'est que de $^1/_{32}$. Les mouvements respiratoires ont donc moins d'amplitude encore que ceux de la Calliphore.

§ LXI.

Muscles respiratoires du Tabanus bovinus.

Rathke a comparé les muscles respiratoires des Tabanides à ceux des Coléoptères. Ce rapprochement est, en effet, assez juste. En examinant simultanément les figures 35 et 39, le lecteur voit immédiatement que le système musculaire du Taon dérive de celui de la Calliphore par une différenciation plus accusée. Les fibres musculaires, au lieu d'être étalées en larges nappes minces, sont groupées en

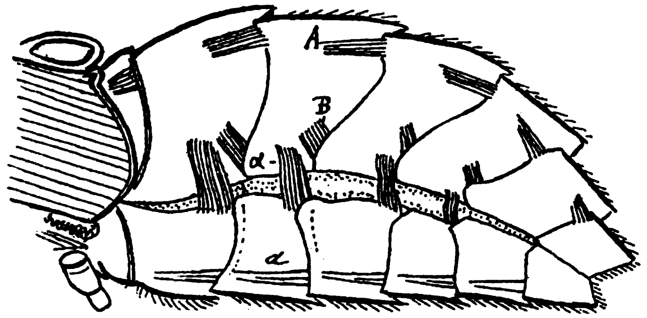


Fig. 39 × 5. — Muscles de la moitié droite de l'abdomen du *Tabanus bovinus* ♀.
A, *B* Muscles longitudinaux dorsaux.
a — — sternaux.
α — expirateurs verticaux.

Digitized by Google

petits muscles distincts plus épais, mais affectant les mêmes directions et les mêmes rapports.

Laissant de côté les muscles longitudinaux dorsaux *A* et *B* et sternaux *a*, on constate que les muscles expirateurs α naissent, comme chez la Calliphore, des bords des arceaux sternaux, croisent la membrane molle des flancs et s'insèrent, à la façon des mêmes muscles chez les Coléoptères, dans les arceaux tergaux correspondants.

Le volume plus considérable des muscles expirateurs occupant les 2ᵉ et 3ᵉ somites, nous explique immédiatement pourquoi la dépression des arceaux sternaux offre son maximum à la limite des arceaux sternaux 2 et 3, comme la légère obliquité de ces muscles et des suivants fait comprendre le petit déplacement en avant des arceaux inférieurs, sans qu'il soit nécessaire d'attribuer ici un rôle spécial aux muscles longitudinaux ordinaires.

Les muscles inspirateurs sont complètement absents, l'inspiration est donc passive, ainsi que chez la plupart des insectes.

§ LXII.

Appendice aux Diptères.

HYMÉNOPTÈRES CHRYSIDIENS. CHRYSIS IGNITA.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Je n'ai eu l'occasion d'étudier convenablement qu'un seul Hyménoptère térébrant, le *Chrysis ignita*. Ainsi qu'on va le voir, il se rapproche évidemment des Diptères muscides par ses mouvements respiratoires.

Les Chrysis ont l'abdomen composé de trois segments apparents; la face inférieure, à peu près plane, est constituée par trois plaques sternales dont les parties latérales sont engagées sous les bords des arceaux tergaux réfléchis en dessous.

En fixant l'animal, privé de ses pattes et de ses ailes, à l'aide d'une seule épingle traversant le mésothorax et en soutenant l'abdomen par une épingle coudée, pour éviter les grandes incurvations vers le bas, on constate, au

Digitized by Google

grossissement de 12 diamètres, que le *Chrysis ignita* effectue deux espèces de mouvements :

1° Des mouvements oscillatoires de l'abdomen dans le sens vertical, accompagnés d'allongements et de raccourcissements;

2° Des *mouvements respiratoires vrais*. Ceux-ci consistent en élévations et abaissements excessivement rapides des lames sternales, sans pauses et sans arrêts. La diminution du diamètre vertical de l'abdomen, en expiration, atteint $^1/_{10}$.

Quand l'insecte est tranquille, on s'assure facilement que les anneaux thoraciques ne bougent point et que *la longueur de l'abdomen reste invariable*, malgré les mouvements respiratoires incessants des plaques sternales.

Ainsi, quoique les Chrysis soient si voisins, par leur aspect général, des Hyménoptères porte-aiguillon, leurs mouvements de respiration diffèrent profondément de ceux de ces derniers insectes, puisqu'il y manque le caractère très spécial des raccourcissements et des allongements alternatifs de la région abdominale.

C. Hyménoptères porte-aiguillon.

§ LXIII.

Historique.

Bien que le groupe ait été beaucoup travaillé et que des centaines d'observateurs aient fait une étude particulière des mœurs de l'Abeille domestique, on ne peut citer qu'un petit nombre de naturalistes qui se soient occupés des mouvements respiratoires des Hyménoptères : Newport [1] a surtout fixé son attention sur le rhythme respiratoire du Bourdon terrestre, de l'Abeille et de l'Anthophore; Dugès [2] parle des mouvements de respiration des insectes en question, mais sans mentionner de forme spécifique; Wolff [3], auteur d'un

[1] Newport. *On the respiration of Insects* (Philosoph. Transactions, part. II, pp. 548, 549 et 550, 1836).

[2] Dugès. *Traité de physiologie comparée*, etc. Op. cit., t. II, p. 555.

[3] Wolff. *Das Riechorgan der Biene* (Nova acta der Ksl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. XXXVIII, nr 1. Dresde, 1875.

Digitized by Google

travail très remarquable sur l'organe de l'olfaction de l'Abeille, explique l'entrée et la sortie de l'air de l'appareil trachéen par une disposition anatomique dont je dirai quelques mots après avoir exposé complètement mes propres recherches; Girdwoyn [1] se borne à indiquer l'aspect général des mouvements d'inspiration et d'expiration; Dönhoff [2], à la suite d'essais faits dans de mauvaises conditions, a cru pouvoir avancer que le centre des mouvements respiratoires de l'Abeille a son siège dans les ganglions céphaliques; Langendorff [3] a rectifié cette erreur et a constaté par l'expérience que les mouvements de respiration persistent chez les Guêpes, les Bourdons et les Abeilles décapités; enfin, Rathke [4], que je cite intentionnellement le dernier, a seul réuni un nombre de faits suffisant pour donner une description à peu près complète et presque exacte du mécanisme respiratoire [5].

Les auteurs cités sont d'accord sur un fait : tous décrivent les mouvements de respiration des Hyménoptères porte-aiguillon comme consistant en raccourcissements et allongements alternatifs de l'abdomen; plusieurs d'entre eux comparent même ces déplacements à ceux des tubes d'une lunette.

D'autres zoologues ont dû faire la même observation, mais n'ont rien publié, n'en comprenant pas l'importance et acceptant, sans examen comparatif, l'opinion enracinée et constamment reproduite d'après laquelle l'expiration et l'inspiration de la plupart des Trachéates se font principalement par le raccourcissement et l'allongement de la portion abdominale du corps.

Préparé par mes études sur différents groupes, je savais combien, au contraire, les changements un peu notables dans la longueur de l'abdomen sont rares pendant les mouvements respiratoires *normaux* des insectes; aussi, en abordant les Hyménoptères, ai-je voulu constater jusqu'à quel point

1 Girdwoyn. *Anatomie et physiologie de l'Abeille*, p. 21. Paris, 1876.

2 Dönhoff. *Beiträge zur Physiologie*, § III *Das Athmungscentrum der Honigbiene* (Arch. f. Anat. und Phys., Phys. Abthlg., p. 162. Leipzig, 1882).

3 Langendorff. *Das Athmungscentrum der Insecten* (Arch. f. Anat. und. Phys., Phys. Abthlg., p. 81. Leipzig, 1883).

4 Rathke. *Anatomisch physiologische Untersuchungen*, etc. Op. cit., pp. 115 et suiv.

5 Je ne puis rappeler ici, même incidemment, les travaux concernant le mode d'occlusion des stigmates, les causes du bourdonnement, etc. Ces questions s'éloignent trop de mon sujet.

Digitized by Google

leur mode de respiration était exceptionnel. Profitant des avantages d'une méthode qui permet de distinguer des détails que l'observation ordinaire ne peut révéler, je me suis assuré, comme le lecteur le verra par les pages suivantes, que si les mouvements les plus marqués sont bien effectivement des déplacements des somites dans le sens longitudinal, *ces mouvements sont aussi accompagnés de modifications dans le diamètre vertical; les pièces tergales et sternales se rapprochant et s'écartant d'une façon rhythmique.*

Les Hyménoptères porte-aiguillon se trouvent ainsi rattachés, quant à leurs mouvements respiratoires, à d'autres insectes tels que les Cicindèles, les Coccinelles, les Éristales, les Blattes, certains Acridiens, des Lépidoptères, etc., chez lesquels les changements dans le diamètre vertical sont prédominants, mais qui offrent, en même temps, de petites modifications dans la longueur de l'abdomen.

J'ai étudié les mouvements respiratoires abdominaux chez deux *Bombus*, chez l'*Apis mellifica*, chez l'*Anthophora retusa* et chez la *Vespa germanica*. J'exposerai d'abord ce que j'ai vu chez la Guêpe, dont l'abdomen à peu près nu se prête mieux aux observations que celui des Hyménoptères couverts de poils.

§ LXIV.

Vespa germanica.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Si l'on fait abstraction des éléments qui entrent dans la composition du pédicule, l'abdomen de la Guêpe comprend six somites apparents; ceux-ci se recouvrent largement les uns les autres (voy. fig. 40) et sont reliés par des zones membraneuses annulaires étendues, minces et très flexibles cachées par les bords des somites successifs. Comme chez tous les Hyménoptères porte-aiguillon, les arceaux tergaux chevauchent fortement sur les arceaux sternaux et là aussi, sur les flancs, existe une zone membraneuse repliée en dedans et d'une grande flexibilité. Il résulte de cette disposition anatomique deux genres de mouvements possibles, l'un dans le sens longitudinal, l'autre dans le sens vertical.

Digitized by Google

Dans le sens longitudinal, les somites peuvent rentrer profondément les uns dans les autres, plus profondément même que chez aucun autre groupe d'insectes.

Dans le sens vertical, les arceaux dorsaux et sternaux sont susceptibles de se rapprocher ou de s'éloigner, de façon à diminuer ou à augmenter ainsi le diamètre vertical de l'abdomen. L'observation de ce qui se passe chez la Guêpe vivante montre, cependant, que les mouvements de cette nature n'ont qu'une faible amplitude.

Quelques autres détails sont nécessaires pour comprendre convenablement de quelle manière ont lieu les déplacements pendant la respiration : l'arceau sternal du 1er somite apparent est atrophié et presque fixe; la mobilité du 2e somite par rapport au premier est faible; ces segments ne peuvent jamais se déplacer que d'une petite quantité l'un par rapport à l'autre. Les segments suivants offrent, au contraire, une mobilité remarquable; enfin, le glissement horizontal des arceaux sternaux est plus facile et plus étendu que celui des arceaux dorsaux.

Ces préliminaires exposés, voici quels ont été les expériences effectuées et les résultats obtenus :

La Guêpe, privée de ses pattes et de ses ailes, est supportée par deux épingles traversant les parties latérales du mésothorax. Dans ces conditions, l'insecte, naturellement excité, fait exécuter à son abdomen des mouvements continuels de flexion, surtout vers le bas, l'allongeant outre mesure et cherchant à piquer. Ces déplacements auraient rendu le dessin des premières silhouettes impossible; il était donc important de les faire cesser sans nuire aux mouvements respiratoires vrais. J'y suis heureusement parvenu d'une façon très simple en faisant reposer la face inférieure du 2e somite apparent sur une petite tige horizontale.

On remarquera que l'abdomen n'était pas fixé, mais seulement soutenu.

1re *Expérience*. — La Guêpe est parfaitement calmée et respire assez régulièrement; le grossissement est de 11 diamètres, ce qui permet de constater des déplacements fort petits.

Aucun mouvement du côté du thorax; les mouvements abdominaux ont

Digitized by Google

peu d'amplitude; les somites 1 et 2 restent immobiles; les quatre derniers somites bougent seuls, l'abdomen se raccourcit d'une petite quantité, en expiration, et reprend sa longueur primitive en inspiration. Le mouvement expiratoire très faible de la part du 3[e] somite et plus accusé pour les somites 4, 5, 6 consiste dans la rentrée des arceaux sternaux les uns sous les autres et dans l'abaissement simultané des pièces tergales correspondantes. L'expiration est donc accompagnée d'une légère diminution du diamètre vertical.

2[e] *Expérience.* — Abdomen soutenu, comme précédemment. On amène facilement une grande excitation chez l'Hyménoptère et par conséquent une augmentation dans la fréquence et l'amplitude de ses mouvements respiratoires, en plaçant sur le support une épingle verticale située à quelques millimètres en avant des ocelles. L'insecte inquiet palpe l'épingle à l'aide de ses antennes, s'efforce inutilement de l'atteindre pour la saisir entre ses mandibules, etc.

Les mouvements respiratoires deviennent très difficiles à suivre; mais l'expérience précédente a fourni des bases qui servent de guide. Les mouvements sont de deux ordres différents : 1° des mouvements d'allongement et de raccourcissement, cette fois notables; ce sont les vrais mouvements respiratoires; 2° des mouvements d'incurvation vers le bas de l'extrémité de l'abdomen. Ces deux séries de mouvements alternent, en général; la Guêpe exécute un ou plusieurs mouvements respiratoires, puis courbe son abdomen; elle le remet ensuite horizontalement pour respirer encore, et ainsi de suite.

Ceux qui conserveraient quelques doutes et croiraient que les mouvements d'incurvation vers le bas jouent un rôle déterminé dans l'acte de la respiration, n'ont qu'à observer une Guêpe vivante renfermée dans un bocal un peu spacieux. Ils verront, même lorsque l'animal excité s'élève en voletant le long des parois verticales de sa prison, l'abdomen *rectiligne* n'effectuant que des mouvements d'allongement et de raccourcissement alternatifs et rapides.

Rathke [1] a, du reste, relevé le fait pour les Vespides, en ajoutant qu'il en

[1] *Anatomisch physiologische Untersuchungen*, etc. Op. cit., p. 116.

Digitized by Google

était autrement chez les Apides dont l'abdomen normalement courbe s'incurvait encore davantage en expiration.

Revenons à la deuxième expérience : cette fois, tous les somites abdominaux sont en action, tous rentrent les uns dans les autres en expiration, sortent et s'étendent en inspiration. Les déplacements en avant et en arrière sont faibles pour les somites 1 et 2, plus prononcés pour les autres et d'autant plus grands qu'il s'agit de somites plus voisins de l'extrémité abdominale. Le raccourcissement de l'abdomen, en expiration, atteint $^1/_9$ de la longueur totale de cette partie du corps. Quant aux changements de diamètre, la rapidité et la complexité des mouvements ne m'ont pas permis de les discerner.

3e *Expérience* (fig. 70 pl. V). — Abdomen non soutenu, complètement libre. La Guêpe le recourbe fortement vers le bas et le maintient dans cette position. L'animal est très calme.

Le métathorax ne bouge pas; comme dans la première expérience, les somites 1 et 2 sont immobiles. On constate très nettement que ce sont bien les faces sternales seules des somites 3, 4, 5, 6 qui rentrent les unes sous les autres en expiration; les arceaux tergaux ne rentrent pas ou rentrent peu; mais, ainsi que le montrait la première expérience, elles se portent légèrement vers la face inférieure de l'abdomen, diminuant ainsi quelque peu son diamètre vertical. Les changements de longueur ne dépassent pas $^1/_{14}$ de l'abdomen entier.

Les conclusions qui me paraissent découler de ce qui précède sont les suivantes :

1° Chez les Vespides, le métathorax ne participe pas aux mouvements respiratoires.

2° Les mouvements respiratoires les plus caractéristiques consistent en raccourcissements et allongements alternatifs de l'abdomen.

3° Ceux-ci ne sont pas les seuls : il existe, en même temps, dans le sens vertical, de légers mouvements de rapprochement et d'écartement des arceaux tergaux et sternaux.

4° Dans la respiration calme, les premiers segments sont immobiles : les déplacements n'ont lieu que pour les quatre somites postérieurs.

5° Dans la respiration très active, tous les somites se meuvent; mais les déplacements des segments les uns par rapport aux autres sont d'autant plus considérables que ces segments sont plus voisins de l'extrémité de l'abdomen.

6° Les incurvations de l'abdomen ne sont point des mouvements respiratoires.

Digitized by Google

§ LXV.

Muscles respiratoires de la Vespa germanica.

Rathke a décrit, *sans le représenter*, le système musculaire abdominal des Hyménoptères porte-aiguillon. Bien que sa description soit incomplète, l'existence de certains muscles lui ayant échappé, et bien que ses interprétations soient, par conséquent, en partie erronées, l'habile observateur a parfaitement saisi le caractère général de la musculature des articulés du groupe qui nous occupe.

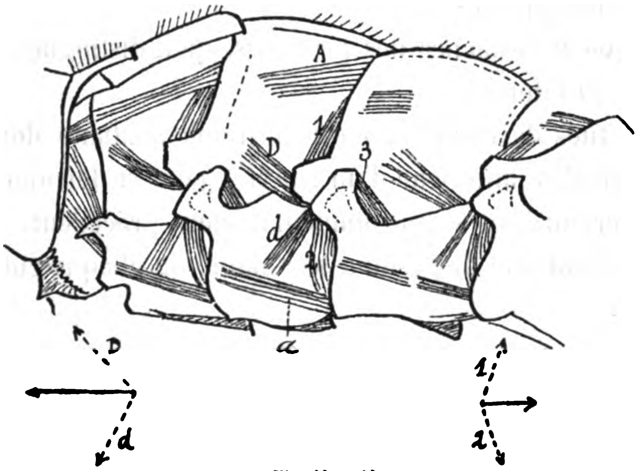


Fig. 40 $\times$ 10.

Muscles de la moitié droite de l'abdomen de la *Vespa germanica*.

Vers la droite de la figure, le 5e somite a été intentionnellement détaché en partie du 4e. Les muscles sont rompus en cet endroit.

A Muscles longitudinaux dorsaux.

a Muscles longitudinaux sternaux.

D et *d* Muscles obliques provenant d'une différenciation des muscles longitudinaux ordinaires des autres insectes.

1 et 2 Muscles inspirateurs déterminant l'allongement de l'abdomen.

3 Muscle inspirateur écartant l'arceau sternal de l'arceau tergal et amenant l'augmentation du diamètre vertical de l'abdomen.

Sous la figure, on a représenté l'action probable des muscles *D*, *d* et 1, 2.

Rathke admet ici non seulement des muscles expirateurs, mais, de plus, des muscles inspirateurs, venant ajouter leur action à celle de l'élasticité des téguments et du système viscéral.

Mes dissections personnelles m'ont donné les résultats suivants, quant à la disposition des muscles et à la configuration des pièces squelettiques sur lesquelles ils s'insèrent : ainsi que le montre la figure 40, chacun des somites pénètre profondément dans celui qui le précède et s'y termine par un bord libre antérieur donnant attache à des muscles. De plus, chacun des somites complets comprend deux moitiés mobiles l'une par rapport à l'autre : un arceau tergal dont les angles inférieurs et antérieurs sont

transformés en apodèmes [1] saillants servant à des insertions musculaires; un arceau sternal, dont les bords supérieurs glissent à la face interne de l'arceau tergal (voyez *Bombus*, fig. 5, 42, 43) et offrent aussi des angles antérieurs développés en larges apodèmes sur lesquels se fixent des muscles importants.

L'examen de la musculature montre qu'il existe ici des muscles homologues, des muscles longitudinaux ordinaires des autres insectes et, en outre, des muscles spéciaux aux Hyménoptères.

Rathke a clairement indiqué les attaches des premiers, qu'il distingue en dorsaux, ventraux (sternaux) et latéraux.

Les muscles *dorsaux* A, situés de chaque côté de la ligne médiane dorsale, naissent chacun du bord libre antérieur d'un somite, pour se terminer à l'intérieur de la région antérieure du somite immédiatement précédent.

Les muscles *sternaux* *a* offrent une disposition semblable de chaque côté de la ligne médiane sternale.

Quant aux muscles *latéraux*, que je ne puis m'empêcher de considérer comme résultant d'une différenciation un peu plus accusée des muscles longitudinaux ordinaires des Coléoptères et des Orthoptères, par exemple, surtout en présence de la disposition qui s'observe chez les Staphyliniens (fig. 26) et chez les Forficulés (fig. 45), ils offrent des directions très obliques. Il y en a deux de chaque côté; le supérieur D naît de l'apodème antérieur de l'arceau tergal pour se porter vers le haut à la région antérieure de l'arceau tergal immédiatement précédent; l'inférieur *d* qui présente une direction oblique descendante naît de l'apodème antérieur de l'arceau sternal. La résultante des actions combinées de ces deux muscles doit être une traction horizontale s'ajoutant à l'effet des muscles dorsaux et sternaux déjà décrits (fig. 40).

Tous les muscles dont nous venons de parler, dorsaux, sternaux et latéraux (A, *a*, D, *d*), ne pouvant produire d'autre effet que la pénétration des anneaux les uns dans les autres, et, par suite, une diminution de la longueur de l'abdomen, sont des muscles *expirateurs*.

[1] Voyez la note 2 de la page 26.

Digitized by Google

Ceux dont il me reste à entretenir le lecteur sont, au contraire, *inspirateurs*. Rathke en a signalé deux, mais je vais montrer qu'il y en a en réalité trois.

Les deux muscles inspirateurs décrits par Rathke s'insèrent l'un *1* à l'apodème antérieur de l'arceau tergal, l'autre *2* à l'apodème antérieur de l'arceau sternal; tous deux ont une direction à peu près verticale et vont, en s'inclinant légèrement en arrière, se terminer sur la région postérieure des arceaux tergaux et sternaux immédiatement précédents [1]. On voit que la résultante de leurs actions combinées est évidemment dirigée horizontalement en arrière et doit avoir pour effet de faire reculer chaque somite par rapport à celui qui le précède; seulement, ces muscles étant presque dans le prolongement l'un de l'autre, ne faisant entre eux qu'un petit angle, leur effet doit être faible (fig. 40).

On commettrait une erreur grave en regardant les muscles 1 et 2 comme destinés à déterminer l'écartement des arceaux tergaux et sternaux dans le sens vertical, puisque chacun d'eux, considéré isolément, s'insère *par ses deux extrémités* soit exclusivement sur des pièces tergales, soit exclusivement sur des pièces sternales.

Ce rôle tout spécial est dévolu à un troisième muscle 3 inconnu à Rathke et dont j'ai constaté l'existence chez la Guêpe et les Bourdons. C'est encore un muscle presque vertical, mais reliant, cette fois, les arceaux supérieur et inférieur d'un même segment abdominal. Il naît de l'apodème antérieur de l'arceau sternal et, se dirigeant un peu obliquement en arrière, va se terminer sur le bord inférieur de l'arceau tergal correspondant. La contraction de ce muscle, qui est, du reste, assez court, doit évidemment avoir pour résultats d'écarter un peu les deux moitiés de chacun des anneaux abdominaux, d'augmenter, par conséquent, le diamètre vertical de l'abdomen. Or, j'ai précisément signalé, dans les mouvements respiratoires de la Guêpe, le fait impossible à discerner par la vue seule, d'une diminution légère du diamètre abdominal en expiration, suivi naturellement d'une augmentation en inspiration.

[1] Ne pas les confondre avec les expirateurs verticaux des Coléoptères et d'autres insectes. Les muscles que nous décrivons ici sont *chacun entièrement tergal ou entièrement sternal;* ils n'unissent pas un élément squelettique supérieur à un élément inférieur.

Digitized by Google

L'existence du muscle que je viens de décrire prouve que ce genre de mouvements existe bien réellement chez les Hyménoptères porte-aiguillon et que le retour des anneaux abdominaux à leur diamètre primitif en inspiration est, chez ces insectes, une phase *active*.

§ LXVI.

Bombus muscorum et Bombus terrestris.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Les Bombus, entièrement couverts de longs poils, se prêtent assez mal à l'observation des mouvements respiratoires. Cependant, leur taille, la grande facilité avec laquelle on se les procure, la possibilité de disséquer leur système musculaire constituaient autant de motifs pour me faire tenter quelques expériences sur cette forme d'Hyménoptères.

Bombus muscorum ♀. — L'animal, auquel on a enlevé les ailes et les pattes, est fixé par deux épingles traversant les parties latérales du mésothorax. L'abdomen est absolument libre. Le grossissement employé est de 11 diamètres (fig. 71 pl. VI).

Comme les autres Hyménoptères porte-aiguillon, le Bourdon des mousses excité fait exécuter à son abdomen de violents mouvements d'oscillation qui n'ont rien de commun avec les mouvements respiratoires. En profitant des instants où l'insecte, momentanément calmé, cesse de courber et de décourber la région abdominale du corps, on parvient, sans trop de peine, à dessiner les phases d'inspiration et d'expiration. Voici ce qui résulte de ces dessins :

1° Le métathorax ne bouge pas;

2° L'abdomen se raccourcit en expiration et reprend ses dimensions primitives en inspiration. Le raccourcissement expiratoire est environ $^1/_{17}$ de la longueur de cette partie du corps;

3° Les changements dans la longueur de l'abdomen sont accompagnés de modifications dans le diamètre. Le diamètre vertical de l'abdomen diminue en expiration d'une façon évidente, quoique la valeur de cette diminution soit difficile à mesurer; les mesures prises sur les dessins indiquent $^1/_{59}$ environ;

Digitized by Google

4° Pendant la respiration normale, les somites 1 et 2 semblent immobiles;
5° Les somites 3, 4, 5, 6 se déplacent rapidement par rapport aux deux premiers;
6° La méthode des projections ne permet pas de discerner si les quatre somites postérieurs se déplacent en bloc relativement au somite 2, ou s'ils rentrent individuellement les uns dans les autres. Des observations directes, à la loupe, me font supposer que la dernière hypothèse est exacte.

Il suffit de comparer ces résultats avec ceux fournis par la *Vespa germanica* pour constater que les mouvements respiratoires des Bourdons et des Guêpes s'exécutent presque exactement de la même manière. On verra, du reste, plus loin, que la disposition anatomique est aussi à peu près identique.

J'ajouterai qu'il faut réduire l'importance d'une différence signalée par Rathke. Parlant des mouvements abdominaux, cet auteur dit que si chez les Vespides, dont l'abdomen est à peu près rectiligne, les mouvements respiratoires ont lieu suivant l'axe du corps, il n'en est plus de même chez les Hyménoptères Apides, tels que les Bourdons et les Abeilles, dont l'abdomen est plus ou moins courbé vers le bas. Chez ces derniers insectes, l'incurvation de l'abdomen augmenterait dans chaque phase inspiratoire.

Il y a effectivement une augmentation dans la courbure de l'abdomen en état d'extension ou d'inspiration, mais elle est très faible et ne parait être qu'une conséquence de la forme même des Hyménoptères de ce groupe.

Bombus terrestris ♀. — Les mouvements sont calqués sur ceux du Bourdon précédent et leur description n'apprendrait rien de nouveau; mais j'ai fait sur cet insecte une observation que je crois intéressante parce qu'elle montre bien que chez les Hyménoptères, comme chez les autres trachéates, les mouvements respiratoires sont des mouvements réflexes ayant lieu sans l'intervention des centres céphaliques ou thoraciques : on sépare complètement l'abdomen du thorax et on l'introduit dans un tube de verre contenant un peu de papier à filtrer mouillé, afin d'éviter l'action nuisible de l'évaporation. *Cinq heures et demie après l'installation de l'expérience,* les trois derniers somites abdominaux exécutent encore des mouvements respiratoires rapides, à raison de 79 par minute.

Digitized by Google

§ LXVII.

Muscles respiratoires du Bombus terrestris.

L'étude du système musculaire abdominal des Bombus présente une importance réelle parce qu'elle comble une lacune dans la série des nombreuses recherches anatomiques faites sur les Apides. Personne, à ma connaissance, n'a figuré ou décrit les muscles qui meuvent les anneaux abdominaux des Abeilles et des Bourdons.

Si l'on met en regard les dessins des muscles de l'abdomen de la

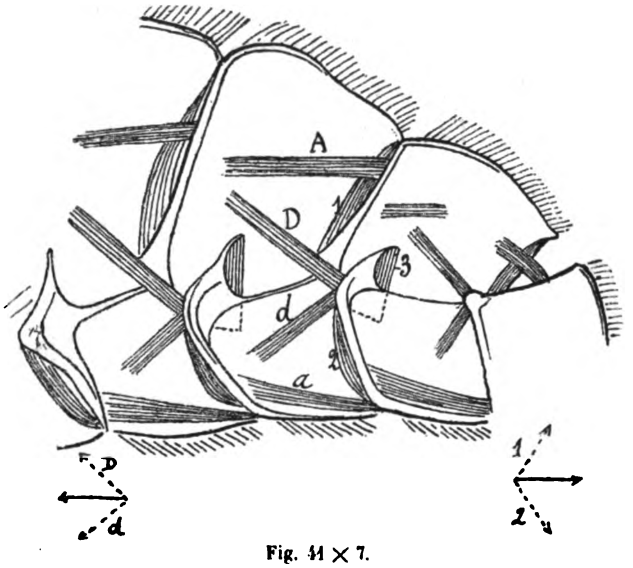


Fig. 41 × 7.

Muscles de la moitié droite de l'abdomen du *Bombus terrestris* ♀.

Vers la droite de la figure, un somite a été intentionnellement détaché en partie. Les muscles sont rompus en cet endroit.

A Muscles longitudinaux dorsaux.
a Muscles longitudinaux sternaux.
D et *d* Muscles obliques provenant d'une différenciation des muscles longitudinaux ordinaires des autres insectes.
1 et 2 Muscles inspirateurs déterminant l'allongement de l'abdomen.
3 Muscle inspirateur écartant l'arceau sternal de l'arceau tergal et amenant l'augmentation du diamètre vertical de l'abdomen.

Sous la figure, on a représenté l'action probable des muscles *D*, *d* et 1, 2.

Guêpe (fig. 40) et du Bourdon (fig. 41 et 42), on voit que, sauf quelques

Digitized by Google

différences dans les proportions, le plan est absolument le même de part et d'autre.

Comme chez la Guêpe, les muscles expirateurs sont constitués par des faisceaux dorsaux *A*, sternaux *a* et latéraux *D* et *d*, ces derniers à directions obliques.

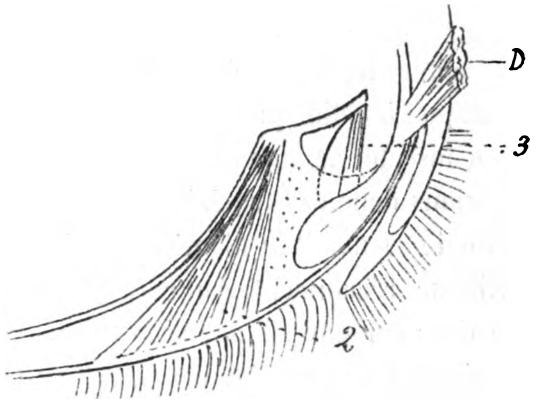


Fig. 42 × 30.

Portion d'une coupe transversale de l'abdomen du *Bombus terrestris* ♀ : côté droit.

On y voit l'arceau sternal du 4e somite engagé dans le 3e (comparer avec la fig. 5).

D L'un des muscles obliques.
2 Muscle inspirateur inférieur faisant reculer le 4e somite.
3 Muscle inspirateur abaissant l'arceau sternal par rapport à l'arceau tergal correspondant.

La surface pointillée est membraneuse et flexible.

Les muscles inspirateurs sont pareillement au nombre de trois de chaque côté, par somite, savoir : deux muscles, 1 et 2, à direction presque verticale, reliant les apodèmes antérieurs de l'arceau tergal et de l'arceau sternal au bord postérieur des arceaux qui précèdent immédiatement et un troisième, 3, plus court, naissant de l'apodème antérieur de l'arceau sternal et qui, descendant verticalement, va s'insérer sur le bord inférieur de l'arceau tergal appartenant au même segment.

Comme chez la Guêpe, les deux muscles 1 et 2, faisant entre eux un angle ouvert en arrière, déterminent le recul ou la sortie des anneaux successifs, tandis que le muscle 3 amène l'écartement des arceaux tergaux et sternaux et, par suite, un accroissement de diamètre.

Digitized by Google

§ LXVIII.

APIS MELLIFICA.

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

L'Abeille présente naturellement des mouvements respiratoires d'une forme à peu près identique à celle que je viens de décrire chez les Bourdons. Il existe chez cet insecte, comme chez les autres Hyménoptères porte-aiguillon, des modifications dans la capacité de l'abdomen s'opérant à la fois suivant l'axe longitudinal et suivant le diamètre vertical.

En employant l'Abeille récemment capturée et munie de ses ailes, il serait impossible de suivre sur une silhouette les mouvements extrêmement rapides des somites abdominaux; mais on peut, assez facilement, marquer les positions extrêmes du bout de l'abdomen et déterminer l'allongement maximum de cette partie du corps. On trouve ainsi que, dans les grands mouvements respiratoires de l'animal excité, l'allongement inspiratoire atteint $^1/_8$ de la longueur totale de la partie abdominale. On constate, tout aussi aisément, que les segments thoraciques postérieurs et principalement le métathorax ne participent en rien aux mouvements de respiration.

Pour étudier les mouvements de plus près, il convient de les ralentir sans en altérer la nature, ce que l'on obtient en enfermant d'abord l'insecte, avec quelques tiges de graminées ou d'autres végétaux, dans un petit bocal fermé par une toile métallique. L'Abeille, qui s'agite beaucoup pour s'échapper, se fatigue vite et, au bout de 30 minutes environ, ses mouvements respiratoires sont assez ralentis pour qu'on puisse parvenir à en dessiner les diverses phases.

Dans l'appareil à projection, l'insecte, privé de ses ailes et de ses pattes, était fixé par deux épingles traversant les parties latérales du mésothorax. Des expériences comparatives ont été faites sur des individus à abdomen libre et sur d'autres dont l'abdomen soutenu reposait simplement par la face inférieure du 2^e somite sur une épingle courbée à angle droit.

Digitized by Google

Les résultats peuvent être résumés comme suit :

1° Le métathorax ne bouge pas;

2° L'abdomen se raccourcit en expiration et reprend ses dimensions primitives en inspiration;

3° Ce genre de mouvements n'a pas lieu uniformément dans toute la longueur de la partie abdominale du corps. Ainsi, parmi les six somites apparents, les segments 1, 2, 3 n'offrent que des déplacements excessivement minimes donnant, en silhouette, l'impression d'un frémissement léger. Le somite 4 rentre et sort, mais encore faiblement, par rapport à 3; enfin 5 et 6 se déplacent d'une façon active. Le même fait que j'ai constaté chez d'autres Hyménoptères se retrouve donc chez l'Abeille, à savoir que, dans la respiration calme, les mouvements respiratoires n'ont guère lieu que dans les quatre somites postérieurs;

4° Pendant les mouvements dans le sens longitudinal ont lieu des changements dans le diamètre vertical. En expiration, lorsque l'abdomen est soutenu, la face tergale s'abaisse pour les somites postérieurs, surtout pour le 4e; lorsque l'abdomen n'est pas soutenu, ce sont les faces sternales qui paraissent s'élever. Au reste, en examinant directement l'Abeille à la loupe, on voit très bien les arceaux sternaux rentrer en expiration et sortir en inspiration de dessous les bords latéraux réfléchis des arceaux tergaux;

5° Enfin, comme chez les Bourdons, l'abdomen, lorsqu'il est libre, augmente de courbure dans la phase inspiratoire.

Ce dernier fait ne s'observe cependant que chez l'Hyménoptère calme et posé. J'ai parfaitement constaté chez des Abeilles et des Bourdons, butinant sur des fleurs et volant de temps à autre, ou chez les mêmes insectes volant le long des vitres d'une fenêtre, que, pendant le vol proprement dit, l'abdomen est rectiligne et *toujours* à l'état d'inspiration complète [1].

[1] J'ai montré, page 88, que les Coléoptères, le Hanneton, par exemple, sont en inspiration durant le vol.

Mon Mémoire, dont la publication par l'Académie avait été décidée dans la séance de la Classe des sciences du 7 avril 1883, était à l'impression, toutes les figures étaient gravées et le bon à tirer de la onzième feuille était donné, lorsque parut dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris (séance du 24 mars 1884) un travail de M. G. Carlet intitulé : *Sur les muscles de l'abdomen de l'Abeille*. La description de l'auteur, qui n'est malheureusement pas accompagnée de figures, ne concorde qu'incomplètement avec ce que j'ai observé chez la Guêpe et chez le Bourdon. M. Carlet n'admet que deux catégories de muscles inspirateurs, les *transverses* et les *interventraux*, répondant, je pense, aux muscles 2 et 3 de mes figures 40 et 41.

Quoi qu'il en soit, M. Carlet déduit de ses dissections la conclusion theorique suivante, que mes expériences confirment parfaitement : « On voit aussi que le mécanisme de la » respiration est plus compliqué qu'on ne le croyait, car, en même temps qu'il y a raccour- » cissement ou allongement de l'abdomen, *il y a rapprochement ou écartement des faces* » *dorsales et ventrales de cette région;* autrement dit, l'abdomen se dilate ou se resserre » suivant ses trois diamètres, pour l'entrée ou la sortie de l'air par les stigmates. »

Digitized by Google

§ LXIX.

Anthophora retusa.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections)

Après les Bourdons et l'Abeille, l'Anthophore ne pouvait rien nous apprendre de nouveau. J'ai tenu, cependant, à étudier la forme des mouvements respiratoires d'un insecte dont Newport avait fait, à un point de vue un peu différent, le sujet d'un grand nombre d'observations curieuses.

Voici ce que j'ai pu déduire de mes expériences :

1° Le métathorax reste immobile;

2° L'abdomen se raccourcit en expiration et revient à sa longueur primitive en inspiration. Comme chez les Hyménoptères précédents, ces mouvements n'ont guère lieu, pendant la respiration calme, que pour les trois derniers somites apparents. La différence, à ce sujet, entre les somites 1 et 2, d'une part, et le groupe 3, 4, 5, d'autre part, est telle encore une fois que le groupe 3, 4, 5 semble rentrer et sortir alternativement, en bloc, de l'anneau 2. En outre, sous l'influence de la traction longitudinale des muscles expirateurs, les deux premiers somites se déplacent légèrement en sens inverse du groupe postérieur;

3° Pendant que s'effectuent les mouvements dans le sens longitudinal, le diamètre vertical de l'abdomen est modifié d'une façon rhythmique. Ce sont surtout les lames sternales qui, en expiration, paraissent s'élever en s'enfonçant sous les rebords latéraux des arceaux tergaux.

§ LXX.

Hypothèse de Wolff.

Wolff, dans son beau mémoire intitulé *Das Riechorgan der Biene,* a décrit, chez l'Abeille, une disposition anatomique qui se retrouve avec plus ou moins de développement chez les insectes des autres groupes. Comme l'auteur attribue aux organes qu'il a observés un rôle assez important dans le mécanisme respiratoire, je vais essayer de résumer brièvement sa description et sa théorie.

Il existe dans l'abdomen des Apides, entre les téguments et la masse viscérale, deux diaphragmes musculaires horizontaux, l'un supérieur, l'autre

Digitized by Google

inférieur. Le diaphragme supérieur, en forme de toit (fig. 43, *ds*), s'étendant de la face inférieure du vaisseau dorsal vers les parties latérales des arceaux tergaux, est connu depuis longtemps sous le nom fautif d'*ailes du cœur*.

Le diaphragme inférieur (fig. 43, *di*) a été décrit et représenté par Leydig [1], Cattie [2] et Nusbaum [3] chez les Lépidoptères; Wolff l'a signalé chez les Diptères, Nusbaum déjà cité y fait allusion chez les Libellules, les Taupes-grillons et les Tipules, et Graber [4] l'a figuré chez le *Pachytylus migratorius*. Il répète, dans la moitié inférieure de l'abdomen, le diaphragme supérieur; sa partie médiane règne longitudinalement au-dessus de la chaîne ganglionnaire ventrale et ses nappes latérales vont s'insérer à droite et à gauche sur les arceaux sternaux.

Chez les Apides, un assez grand nombre de troncs trachéens sont compris entre ces diaphragmes et les parois tégumentaires; les uns, situés au-dessus du diaphragme supérieur (fig. 43, *tr*), remontent jusqu'au vaisseau dorsal; les autres, rampant sous le diaphragme inférieur, descendent jusqu'à la chaîne nerveuse.

Ces troncs sus- et sous-diaphragmatiques, que Wolff nomme *Saugröhren*, ce que je traduirai par *troncs aspirateurs*, adhèrent, d'une part, aux arceaux tergaux ou sternaux avec lesquels ils sont en rapport et, d'autre part, à l'un des deux diaphragmes; disposition qui peut faire supposer que les contrac-

[1] Leydig. *Das Sog. Bauchgefäss des Schmetterlinge* (Archives de Müller, p. 565; 1862).
— *Von Bau des Thierischen Körpers*, erster Band, erste Hälfte, pp. 211-213. Tübingen, 1864.
— *Tafeln zur Vergleichenden Anatomie*, pl. V, fig. 7, et pl. VI, fig. 1. Tübingen, 1864.

[2] Cattie. *Beiträge zur Kenntnis der Chorda supra-spinalis der Lepidoptera und des centralen, perypherischen und sympathischen Nervensystems der Raupen* (Zeitschr. f. Wiss. Zoologie, XXXV Band, p. 304. 1881).

Cattie et Nusbaum citent D. Burger. *Über das Sogen. Bauchgefäss der Lepidoptera*, etc. (Niederl. Archiv. f. Zoologie, III Band, 1876-77), travail que je n'ai pas eu à ma disposition.

[3] J. Nusbaum. *Vorläufige Mittheilung über die Chorda der Arthropoden* (Zoologischer Anzeiger, VI Jahrg., n° 140, p. 291, 1883).
— *Bau, Entwicklung und morphologischen Bedeutung der Leydig'schen Chorda der Lepidopteren* (Ibid., VII Jahrg., n° 157, p. 17, 1884).

[4] Graber. *Die Insekten*, op. cit., fig. 68, *e*, *n*, p. 109. Voir aussi : *Uebcr den pulsirenden Bauchsinus der Insekten* (M. Schulze's Archiv. f. mic. Anat., XII Band, 1876).

Digitized by Google

tions des diaphragmes musculaires exercent une certaine action sur les parois des troncs trachéens en question.

Tous les troncs aspirateurs naissent à la hauteur des flancs de deux longs tubes longitudinaux qui reçoivent l'air des stigmates abdominaux et qui forment, comme on sait [1], en se renflant, les deux énormes réservoirs occupant la base de l'abdomen des Hyménoptères (fig. 43, *ra*).

Wolff accorde aux diaphragmes une action presque prépondérante dans les mouvements d'inspiration et d'expiration. Par des vivisections, il a vu directement les contractions des diaphragmes de l'Abeille se propager sous forme d'ondes d'avant en arrière et d'arrière en avant; il aurait constaté, de plus, que les mouvements des segments abdominaux et les contractions des diaphragmes sont simultanés.

Pour Wolff, la contraction des deux diaphragmes de l'Abeille (le supérieur s'abaissant et l'inférieur s'élevant) aurait pour effet de dilater les troncs trachéens aspirateurs situés, comme je l'ai dit, entre les diaphragmes et les téguments; une certaine quantité de l'air renfermé dans les grands réservoirs abdominaux passerait alors dans ces troncs aspirateurs et, comme conséquence, une nouvelle dose d'air extérieur serait appelée dans les grands réservoirs par les orifices stigmatiques. La contraction des diaphragmes déterminerait donc l'inspiration et leur relâchement répondrait à l'expiration.

Wolff, je le répète, semble attacher une grande importance au rôle de ces minces cloisons musculaires, car il a soin de nous dire que, de même que chez l'homme, l'inspiration ne se fait pas seulement par le jeu du diaphragme, mais aussi par le mouvement des côtes, chez les Hyménoptères, les déplacements des anneaux abdominaux dans le sens longitudinal s'ajoutent aux effets des diaphragmes supérieur et inférieur.

Malgré la valeur incontestable de la partie anatomique du travail, il m'est impossible d'accepter la théorie de l'auteur et, si j'ai bien compris V. Graber, celui-ci fait aussi des objections sérieuses qu'il importe de rappeler.

[1] WOLFF. *Das Riechorgan*, etc., op. cit., pl. I, fig. 5. Voyez aussi LÉON DUFOUR. *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Orthoptères, les Hyménoptères et les Névroptères* (MÉM. ACAD. SC. DE PARIS, SAVANTS ÉTRANGERS, t. VII, p. 375 (*Bombus terrestris*), 1841); puis la plupart des monographies de l'Abeille domestique.

Digitized by Google

Graber [1], après avoir admis que la contraction des diaphragmes doit comprimer la masse viscérale située entre eux, dit, avec raison, qu'il ne peut se présenter que les deux cas suivants : ou bien la compression intérieure produite par les diaphragmes a lieu en même temps que la compression extérieure déterminée par la position que prennent les pièces squelettiques en expiration, sous l'influence des muscles expirateurs proprement dits; ou bien, les compressions intérieure et extérieure ont lieu en des moments différents.

Dans le premier cas, celui des compressions simultanées et de même sens, l'action produite par le rapprochement des pièces tégumentaires est évidemment de beaucoup la plus énergique; l'effet utile des diaphragmes doit être nul et le résultat définitif ne peut consister qu'en une expulsion d'air.

Dans le second cas, celui où la contraction des diaphragmes aurait lieu pendant la dilatation abdominale, ce qui paraît être le fait admis par Wolff, les deux actions ne peuvent s'ajouter pour déterminer toutes deux l'inspiration comme Wolff le suppose, mais sont, suivant Graber, certainement antagonistes. Pour ce dernier, les contractions des diaphragmes abdominaux ne produiraient, en aucune façon, les mouvements d'inspiration et d'expiration, et si elles jouent quelque rôle dans le mécanisme respiratoire, ce ne peut être qu'en régularisant la circulation de l'air dans le réseau trachéen périphérique.

Graber a, du reste, montré, dans un travail spécial, que la véritable fonction du diaphragme supérieur des insectes est de chasser le sang des lacunes interorganiques vers le vaisseau dorsal [2].

J'ajouterai, enfin, comme observation personnelle, que la différence entre les diaphragmes délicats composés d'une seule couche de fibres musculaires striées et les robustes faisceaux musculaires respiratoires qui meuvent les somites abdominaux est telle qu'il serait bien difficile de ne pas voir, dans ces derniers, les seuls agents réellement actifs dans les mouvements respiratoires proprement dits.

[1] *Die Insekten*, op. cit., p. 112.

[2] GRABER. *Vorlaüfiger Bericht über den Propulsatorischen Apparat der Insekten* (SITZB. DER K. AKAD. WIEN, Band LXV, 1te Abth. 1872).

Digitized by Google

La figure inédite ci-jointe (fig. 43) représentant la coupe transversale de l'abdomen du *Bombus muscorum* à l'endroit où le 4e somite abdominal s'engage dans le 3e, figure dessinée d'après nature avec tout le soin que j'ai pu y mettre, est destinée à faire saisir ce qui précède.

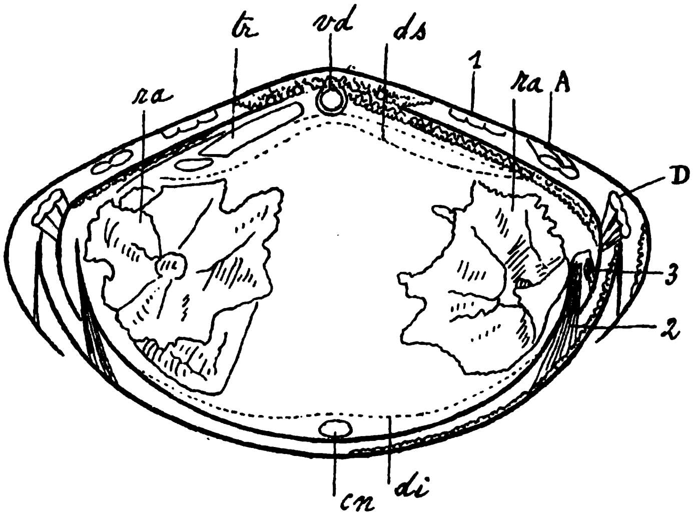


Fig. 43 × 10. — Coupe transversale de l'abdomen du *Bombus muscorum*, là où le 4e somite est engagé dans le 3e.

Les muscles *A*, *D*, 2 et 3 comme dans les figures précédentes.

vd	Vaisseau dorsal.
cn	Chaîne nerveuse.
ra, *ra*	Grands réservoirs abdominaux ouverts par la coupe.
tr	Coupe d'un tronc trachéen *sus-diaphragmatique*.
ds	Diaphragme supérieur.
di	Diaphragme inférieur.

Si le diaphragme supérieur paraît ici beaucoup plus épais que le diaphragme inférieur, cela tient simplement, ainsi qu'on peut aisément s'en assurer, à ce que la toile conjonctivo-musculaire du diaphragme supérieur est doublée d'une couche de ces cellules caractéristiques que Graber a fait connaître sous le nom de *Pericardialzellen* [1]. En réalité, mis côte à côte sur la même plaque du microscope, les deux diaphragmes sont à fort peu près aussi minces et, par suite, aussi peu puissants l'un que l'autre.

[1] *Vorlaüfiger Bericht über den propulsatorischen Apparat*, etc., p. 8, pl. I, fig. 1 *c* et *A*.

Digitized by Google

§ LXXI.

Appendice aux Hyménoptères porte-aiguillon.

Névroptères phryganiens.

La forme des mouvements respiratoires des Phryganes et la disposition des muscles abdominaux de ces insectes ne me permettent pas de les éloigner des Hyménoptères porte-aiguillon.

Dans ma *Communication préliminaire,* j'ai cité les Phryganes comme un exemple frappant de ce fait qu'il n'existe aucune relation étroite entre les mouvements respiratoires d'un insecte et la place qu'il occupe dans les classifications zoologiques. Mais les Phryganes ne sont pas le seul exemple à citer; on a déjà vu que j'ai été obligé de rapprocher les Blattiens des Hémiptères et des Coléoptères, les Chrysidiens des Diptères, et le lecteur trouvera plus loin un Locustien séparé des Orthoptères sauteurs et placé à côté des Lépidoptères et des Névroptères propres.

Phryganea striata.

(**Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.**)

Si l'on fait abstraction de l'armure génitale qui ne doit pas nous occuper ici, la structure extérieure de l'abdomen des Phryganes est sensiblement celle qui existe chez les Sialis. Les arceaux tergaux et sternaux qui ne se recouvrent pas sont unis, sur les parties latérales du corps, par une large bande membraneuse à découvert plissée longitudinalement.

Cette similitude d'organisation ferait supposer la similitude dans la forme des mouvements respiratoires et, cependant, les Phryganes s'écartent, à cet égard, des Sialis pour se rapprocher des Hyménoptères. Elles offrent, comme

Digitized by Google

on va le voir, une combinaison de deux mouvements, l'un dans le sens vertical, l'autre dans le sens longitudinal.

Je me suis adressé de préférence aux femelles, dont l'abdomen est plus développé que celui des mâles.

L'insecte, privé de ses pattes, était suspendu par les ailes. Afin d'empêcher les incurvations exagérées de l'abdomen vers le bas, celui-ci reposait librement, par sa région moyenne, sur une épingle coudée à angle droit (fig. 72, pl. VI).

Les mouvements sont excessivement difficiles à suivre; car il existe ici trois espèces de déplacements différents :

1° Par périodes, des oscillations de l'abdomen étrangères à l'acte de la respiration;

2° Des mouvements respiratoires faibles, consistant, en expiration, dans un léger abaissement des arceaux dorsaux, surtout à la hauteur des somites 4 et 5, accompagné d'un petit allongement de l'abdomen;

3° De temps en temps, par exemple, après deux ou trois mouvements respiratoires faibles, des mouvements expiratoires puissants, se composant d'un abaissement notable des arceaux tergaux (encore une fois plus marqué dans les somites 4 et 5), d'une légère projection vers le bas des arceaux sternaux 2 et 3 et d'un raccourcissement brusque de l'abdomen déterminé par la rentrée les uns dans les autres des trois anneaux terminaux. Le raccourcissement est environ de $^1/_{30}$ de la longueur abdominale totale.

A la loupe, on voit, pendant l'expiration, la membrane molle qui unit les arceaux tergaux et sternaux se plisser longitudinalement. Les plis s'effacent en inspiration.

Dans chaque phase, les déplacements des diverses parties paraissent simultanés. Il n'y pas d'onde.

En résumé, lorsque les Phryganes respirent d'une façon active, elles présentent des mouvements très voisins de ceux des Hyménoptères porte-aiguillon dont l'abdomen se raccourcit en expiration, tandis que les arceaux tergaux et sternaux se rapprochent. Ce fait intéressant m'a naturellement conduit à rechercher si le système musculaire était quelque peu analogue à celui des Hyménoptères.

Digitized by Google

Muscles respiratoires des Phryganes.

Le système musculaire abdominal des Phryganes ressemble à celui des Guêpes et des Bourdons et mérite un examen spécial.

La plupart des muscles qui déplacent les somites ne sont bien développés que dans la région moyenne de l'abdomen. Plusieurs d'entre eux s'atténuent ou disparaissent dans les anneaux de la base et dans ceux de l'extrémité. Je limiterai la description à ce qui existe dans les somites 4, 5 et 6 (fig. 44).

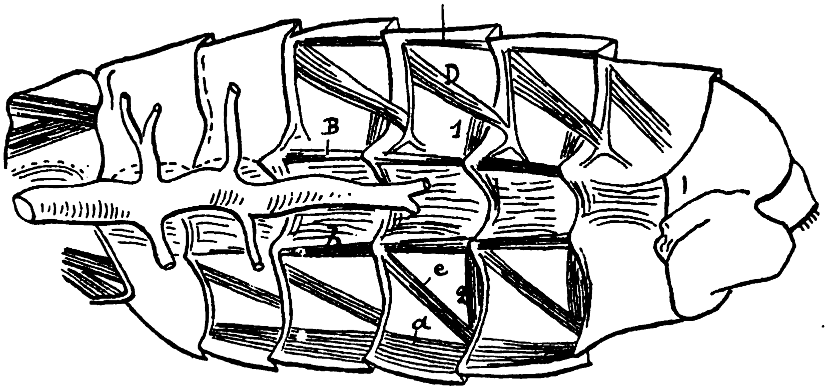


Fig. 44 × 6. — Muscles de la moitié droite de l'abdomen de la *Phryganea striata* ♀.

A, *B* Muscles longitudinaux dorsaux.
a, *b* Muscles longitudinaux sternaux.
D, *e* Muscles obliques.
1, 2, Muscles inspirateurs homologues de ceux des Hyménoptères.

Les bords antérieurs des somites se développent, comme chez les Hyménoptères porte-aiguillon, en apodèmes saillants donnant insertion à des muscles importants. Ces apodèmes sont portés par l'angle inférieur pour les arceaux tergaux, par l'angle supérieur pour les arceaux sternaux.

Muscles expirateurs. — De même que chez les Hyménoptères, les muscles longitudinaux dorsaux et sternaux (prétracteurs de Straus-Durckheim) se sont décomposés en faisceaux très distincts, offrant, les uns la direction longitudinale vraie (*A*, *B*, *a*, *b*) et les autres une direction très oblique (*D*, *e*).

Digitized by Google

Dans l'arceau tergal, le muscle oblique *D* qui naît de l'apodème inférieur et antérieur pour remonter vers l'angle antérieur et supérieur du somite précédent, est évidemment identique chez les Phryganes et chez les Hyménoptères porte-aiguillon (voy. fig. 40 et 41, *D*).

Dans l'arceau sternal, au contraire, le muscle oblique *e* reliant le bord antérieur et inférieur d'un arceau à l'apodème antérieur et supérieur de l'arceau précédent, offre une direction inverse de celle que présente le muscle analogue des Guêpes et des Bourdons. Il n'existe pas de muscles transversaux croisant la zone molle des flancs. Cependant l'abaissement des pièces tergales pourrait assez bien s'expliquer, me semble-t-il, par l'action des puissants muscles obliques *D*, qui sont précisément situés dans les somites où nous avons vu que ce mouvement s'observait (voy. fig. 72, pl. VI).

Tous les muscles précédents sont évidemment expirateurs. Existe-t-il, comme chez les Hyménoptères, des muscles inspirateurs?

Muscles inspirateurs.— On trouve, dans les segments de la région moyenne de l'abdomen de la Phrygane, des muscles verticaux *1* et *2* absolument homologues des muscles inspirateurs 1, 2 des Hyménoptères. Comme chez la Guêpe, ils s'insèrent chacun à l'un des apodèmes pour se porter (en montant, dans les arceaux tergaux, en descendant, dans les arceaux sternaux) sur le bord *postérieur* du somite qui précède.

Pas plus que pour les Hyménoptères, je n'oserais les regarder comme déterminant l'écartement des arceaux supérieur et inférieur l'un de l'autre, cette façon d'interpréter me semblant absurde. Mais si l'on veut bien considérer que, pendant l'expiration, les somites sont beaucoup plus engagés les uns dans les autres que sur notre figure *44* [1], on comprendra que la direction de ces muscles 1 et 2 est alors un peu oblique, qu'ils forment deux à deux, comme chez les Hyménoptères, un angle obtus ouvert en arrière et que, par suite, la résultante de leurs actions combinées doit venir en aide à l'élasticité des téguments pour allonger l'abdomen et le ramener à ses dimensions primitives en inspiration.

[1] La dissection a relâché le tout et a amené l'abdomen en inspiration.

Digitized by Google

Le seul muscle caractéristique des Hyménoptères porte-aiguillon que je n'ai pas rencontré chez les Phryganes, est le petit muscle vertical (fig. 40 et 41, *3*) qui unit l'apodème de l'arceau sternal au bord inférieur de l'arceau tergal correspondant. Sa présence se serait, du reste, fort mal expliquée, l'arceau dorsal ne chevauchant pas ici sur l'arceau inférieur.

En résumé, les muscles respiratoires des Phryganes offrent avec ceux des Hyménoptères porte-aiguillon une similitude curieuse, et nous pouvons probablement enregistrer un nouvel exemple d'insectes chez lesquels il existe des muscles *inspirateurs*. Cette dernière remarque a son importance, car on a considéré les Hyménoptères comme les seuls insectes possédant des muscles aidant à l'inspiration.

D. **Orthoptères Forficuliens et Acridiens.**

Les pages qui précèdent et les observations que j'aurai encore à rapporter montrent les désaccords fréquents qui existent entre le groupement des insectes d'après leurs mouvements respiratoires et les classifications zoologiques. Les mouvements respiratoires de deux insectes ne sont analogues, en effet, que lorsque la structure des arceaux abdominaux et la disposition des muscles qui les meuvent sont à peu près les mêmes [1].

Les Orthoptères constituent, à cet égard, un exemple instructif. L'étude des mouvements de respiration de quelques insectes de l'ordre [2] m'a obligé à pratiquer, dans ce groupe, un démembrement que d'autres pousseront peut-être plus loin encore après l'examen de nouvelles formes. Comme je l'ai dit page 157, j'ai dû placer les Blattiens dans le premier type avec les Hémiptères hétéroptères et les Coléoptères; les Locustiens, représentés par le Dectique verrucivore, dans le troisième, avec les Lépidoptères et les Névrop-

[1] Lorsque ces deux conditions existent, on peut déterminer nettement d'avance la forme des mouvements respiratoires. Quand il n'en existe qu'une, c'est tantôt la musculature qui amène un mode de respiration spécial : tel est le cas pour les Phryganes; tantôt c'est, au contraire, la structure squelettique de l'abdomen qui cause le genre de mouvement : tel est peut être le cas chez les Forficules.

[2] Ordre, du reste, très peu homogène. (Voyez Huxley, *An introduction to the classification of animals*, p. 121. Londres, 1869.)

Digitized by Google

tères vrais. Enfin, les Acridiens appartiennent au deuxième type respiratoire et se rangent immédiatement après les Hyménoptères porte-aiguillon.

Dans toute classification soit zoologique, soit physiologique, on rencontre des êtres de transition, intermédiaires entre deux ou plusieurs groupes définis.

Les Forficuliens me paraissent être dans ce cas; aussi la place que je leur assigne ici, faute de mieux, est-elle douteuse. Leurs mouvements respiratoires sont, je le pense, ceux d'un insecte du deuxième type; leurs segments abdominaux ressemblent à ceux des Hyménoptères et leurs muscles ont plutôt de l'analogie avec ceux des Coléoptères.

§ LXXII.

Forficula auricularia.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections et description des muscles de la respiration.)

Les Forficuliens ont été complètement négligés par les auteurs qui m'ont précédé; personne n'a étudié leur mécanisme respiratoire.

Quelques essais que j'avais faits sur des Nymphes, au commencement de l'été de 1882, ne m'avaient donné que des résultats peu satisfaisants; les mouvements respiratoires étaient obscurs et d'une interprétation difficile.

Je n'ai guère été plus heureux en opérant, plus tard, sur des individus parfaits. Voici, cependant, ce que je crois pouvoir déduire de mes observations: la structure de l'abdomen des Forficules s'éloigne, d'une façon générale, de la disposition la plus commune chez les Orthoptères; comme les entomologistes l'ont signalé depuis longtemps, la forme des parties latérales des arceaux tergaux chevauchant sur des arceaux sternaux et les contours de ces pièces rappellent, d'une façon étonnante, ce qui existe chez les Hyménoptères apides.

L'insecte, cherchant à se défendre et à se dégager, exécute fréquemment des mouvements violents; il ouvre largement ses pinces et recourbe l'abdomen vers le haut; aussi n'est-ce que pendant les périodes de calme relatif, ou chez un individu décapité, qu'on peut espérer surprendre des mouvements respi-

Digitized by Google

ratoires vrais. Ceux-ci, séparés par de longs arrêts inspiratoires, m'ont paru consister en élévations et abaissements des arceaux sternaux des somites 1 et 2, la face inférieure du métathorax étant entraînée dans le même sens.

En expiration, on voit les faces sternales du métathorax et des deux premiers somites abdominaux s'élever d'une petite quantité, tandis que tout le reste de l'abdomen s'abaisse, masquant ainsi, sur les silhouettes, les déplacements qui pourraient avoir lieu pour les faces sternales des somites qui suivent le second.

J'évalue, mais avec doute, la diminution du diamètre vertical, en expiration, au niveau du premier somite, à $^1/_{20}$. On ne distingue pas d'onde et l'abdomen ne semble pas changer de longueur.

Muscles respiratoires de la Forficula auricularia.

La faiblesse des mouvements respiratoires et le peu d'étendue de la région du corps dans laquelle on parvient à les constater ne permettent de se faire, *à priori*, aucune idée de la disposition des muscles. En partant de la notion

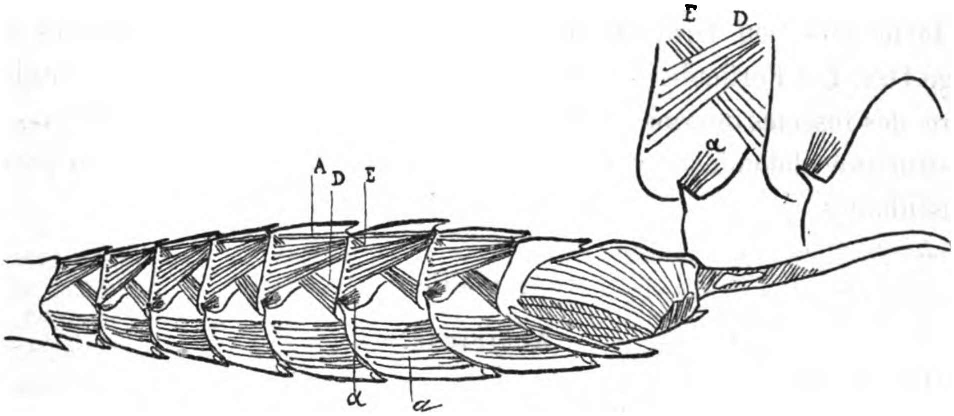


Fig. 45 × 10. — Muscles de la moitié droite de l'abdomen de la *Forficula auricularia*.

A, *a* Muscles longitudinaux tergaux et sternaux.
D, *E* Muscles obliques.
α Muscles expirateurs verticaux.

que les Forficuliens sont des Orthoptères et de ce fait que les arceaux tergaux chevauchent sur les arceaux sternaux en cachant la zone élastique des flancs,

Digitized by Google

on pouvait supposer que les muscles abdominaux sont construits suivant le type propre aux Acridiens. L'hypothèse est cependant erronée et la dissection démontre que la musculature de l'abdomen, fort peu différente du cas le plus ordinaire, se rapproche de ce qui existe chez les Coléoptères (fig. 45).

Comme chez les Staphyliniens (fig. 26, p. 96), les muscles dorsaux sont, en grande partie, décomposés en faisceaux D, E qui se croisent à angle aigu; modification probablement en rapport avec la grande mobilité de la région abdominale. Quant aux muscles expirateurs α, ils naissent, il est vrai, d'apodèmes que présentent les arceaux sternaux à leurs angles antérieurs et supérieurs; mais ils sont peu développés, se dirigent obliquement vers le haut, pour s'insérer sur les arceaux dorsaux, et me semblent avoir beaucoup plus d'analogie avec les muscles expirateurs des Coléoptères, des Blattes et des Odonates qu'avec ceux des Acridiens ou des Hyménoptères porte-aiguillon. Il n'existe aucune trace de muscles aidant à l'inspiration.

J'ajouterai que la dissection des muscles des Forficules étant très difficile, je n'ose affirmer avoir tout vu. L'étude anatomique de grandes formes exotiques conduirait probablement à des résultats plus précis.

Je ne puis, en terminant ce sujet, que répéter ce que je disais à la page 162. Les Forficuliens sont probablement, quant au mécanisme respiratoire, des insectes intermédiaires entre les Hyménoptères dont ils ont presque la structure abdominale et les Coléoptères dont ils possèdent à peu près la musculature.

§ LXXIII.

Acridiens.

La tribu des Acridiens dont l'histoire anatomique et physiologique se confond malheureusement souvent avec celle des Locustiens a été, au point de vue du mécanisme de la respiration, non seulement l'objet de quelques observations isolées, telles que celles de Treviranus[1] sur les déplacements des

[1] Treviranus. *Biologie*, etc. Op. cit., p. 157.

Digitized by Google

pièces du squelette abdominal et celles de Marcel de Serres [1] sur les apodèmes internes et leurs muscles, mais elle a fait, en outre, le sujet d'études plus approfondies. Ainsi Rathke [2] a décrit avec soin les muscles respiratoires des Acridiens; Graber [3] a pris, dans son remarquable petit ouvrage sur les Insectes, le *Pachytylus migratorius* comme type, pour faire comprendre nettement la nature des mouvements respiratoires et faire saisir les différences entre les muscles inspirateurs et expirateurs; Packard [4] a donné une description des mouvements de respiration du *Caloptenus femur-rubrum* et, enfin, Sedgwick Minot [5] a figuré l'un des muscles respiratoires principaux du même animal, en accompagnant ses indications anatomiques de quelques mots sur les déplacements des somites tergaux et sternaux [6].

J'aurai surtout à établir en quoi mes résultats personnels se rapprochent ou s'écartent de ceux de Rathke, de Graber et de Packard. Les formes que j'ai spécialement étudiées sont le *Stethophyma grossum* et le *Stenobothrus variabilis*.

1 Marcel de Serres. *Observations sur les usages du vaisseau dorsal,* etc. Op. cit., pp. 74 et 75.

2 Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen,* etc. Op. cit., p. 110.

3 Graber. *Die Insekten*. Op. cit., pp. 108 et suivantes.

4 Packard. *Anatomy and Physiology of the Locust* (First annual Report of the United States entomological commission. Washington, 1878), p. 269.

5 Sedgwick Minot. *Histology of the Locust* (*Caloptenus*) *and the Cricket* (*Anabrus*) (Second Report of the United States entomological commission. Washington, 1880), p. 196, pl. II, fig. 2 et 6.

6 On trouvera aux §§ LXV (*Periplaneta*) et LXXVIII (*Decticus*) les indications bibliographiques concernant les Blattiens et les Locustiens. Afin de compléter l'ensemble des renseignements au sujet des observations sur le mécanisme respiratoire des Orthoptères, j'ajoute ici, en note, ce qui a trait aux insectes de cet ordre que je n'ai pas étudiés moi-même.

Rathke a donné uue description du système musculaire abdominal des *Mantis* et des *Gryllotalpa*. Le genre *Gryllus* a fait l'objet de diverses recherches; mais il convient de remarquer que sous le nom de *Gryllus* les naturalistes anciens confondaient une foule de petits groupes nettement séparés aujourd'hui et que j'ai dû considérer, comme se rapportant aux Grillons, les travaux dans lesquels les auteurs, en employant ce terme, n'ont pas été assez explicites pour faire entrevoir qu'il s'agit d'autres insectes. Marcel de Serres a fourni quelques indications sur la structure des pièces squelettiques et sur les muscles qui les meuvent; Barlow a constaté la persistance des mouvements respiratoires chez le Grillon décapité; enfin Rathke a figuré et décrit, en détail, les muscles abdominaux du Grillon des champs.

Digitized by Google

§ LXXIV.

Stethophyma grossum [1].

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Chez les *Stethophyma,* comme chez les autres Acridiens, les somites de l'abdomen se composent chacun : 1° d'un grand arceau tergal résultant de la fusion des pièces tergales proprement dites et épimériennes et concourant, par suite, largement à la formation des flancs; 2° d'un arceau sternal plus étroit dont les prolongements latéraux ascendants ou apodèmes pénètrent profondément sous les parties latérales descendantes de l'arceau supérieur [2].

Ainsi que le montrent les figures 14 et 46, l'arceau sternal est emboîté dans l'arceau tergal; une zone molle, très peu élevée, unit le bord inférieur de l'arceau tergal et la région voisine de l'arceau sternal correspondant.

Rathke, Graber et Sedgwick Minot ont indiqué brièvement que les mouvements respiratoires des Acridiens consistaient surtout en rapprochements et éloignements des pièces sternales et tergales, accompagnés de dépressions et de saillies alternatives des flancs; la contraction de l'abdomen répondant naturellement à l'expiration et son retour aux dimensions primitives représentant l'inspiration. Mais Packard, dans une description assez détaillée des mouvements respiratoires du *Caloptenus femur-rubrum,* semble, si je saisis bien la valeur de ses expressions, interpréter les faits d'une tout autre manière.

Après avoir expliqué comment, dans la contraction, les pièces sternales s'élèvent et les flancs ou pleurites se dépriment, et après avoir signalé entre autres particularités que, lors du mouvement inverse, c'est-à-dire lorsque les pleurites font saillie, la membrane tympanique s'enfonce, Packard ajoute

[1] *Mecostethus grossus,* Fieber.

[2] Pour des figures d'ensemble de l'aspect *extérieur* de l'abdomen des Acridiens, consultez: Léon Dufour. *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Orthoptères, les Hyménoptères et les Névroptères,* etc. Op. cit., pl. I, fig. 3. — Packard. *First annual Report,* etc. Op. cit., p. 259, fig. 13.

Digitized by Google

que l'ouverture des stigmates coïncide à peu près avec les dépressions des pleurites et que les réservoirs aériens du premier somite s'affaissent lorsque l'abdomen se dilate. Ce qui indiquerait, dit le savant entomologiste, que l'air se précipite dans les stigmates durant la contraction de l'abdomen : « that the » air rushes into the spiracles during the contraction of the abdomen ».

Comme il est possible que le sens exact du texte anglais m'échappe, je me bornerai à citer un fait qui prouve, d'une façon évidente, que la pression à laquelle est soumis l'air renfermé dans le système trachéen de l'Orthoptère est supérieure à la pression extérieure au moment de la contraction abdominale, ce qui oblige cet air à *s'échapper* en partie par les orifices stigmatiques.

V. Graber [1] et Packard [2] lui-même ont dit que la tension de la membrane tympanique des Acridiens se trouve constamment modifiée par les mouvements respiratoires de ces insectes.

Chez le *Stethophyma grossum* la membrane en question est insérée obliquement à la surface du corps, son bord postérieur étant situé beaucoup plus profondément que son bord antérieur. Or, si on observe le tympan à la loupe chez un *Stethophyma* vivant maintenu par les ailes, on constate, lors de chaque contraction de l'abdomen, non seulement que la membrane se porte en dehors, mais, de plus, qu'elle devient moins oblique et qu'elle tend à se placer parallèlement à la surface du corps.

J'ai rendu ces mouvements très visibles en collant perpendiculairement sur la membrane tympanique, à l'aide de baume du Canada, un petit style de papier de 8 millimètres de longueur. Chaque fois que l'abdomen de l'insecte se contracte, le style de papier se porte en avant de $0^{mm},5$ environ.

Je n'ai pas à discuter, dans le Mémoire actuel, la portée que peut avoir, au point de vue de la signification auditive [3], le fait des changements d'inclinaison et de tension de la membrane tympanique pendant les mouvements

[1] GRABER. *Die Tympanalen Sinnesapparate der Orthopteren* (DENKSCHRIFTEN DER K. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN. Wien, Bd. 36, 1876), p. 123.

[2] Op. cit.

[3] GRABER dans l'ouvrage cité (*Die Tympanalen Sinnesapparate*, etc.) a fait un grand nombre d'expériences et d'observations qui font douter sérieusement de la nature auditive des organes tympaniques des Orthoptères (voyez ses conclusions à la page 127 de son Mémoire).

Digitized by Google

respiratoires ; ce qu'il est important de remarquer ici, c'est que, durant la contraction de la région abdominale du corps, la membrane est repoussée au dehors, preuve incontestable que la pression intérieure est, en ce moment, supérieure à la pression extérieure et que la contraction détermine l'expiration, comme chez tous les insectes [1].

Ces premiers points étant élucidés, j'aborde l'exposé des quelques faits que j'ai observés à l'aide de la méthode des projections.

L'animal est intact, suspendu par les ailes et les élytres serrés entre une lame de liège et une lame de carton ; les grandes pattes de la dernière paire sont ramenées au-dessus du dos et liées ensemble par un bout de fil. Le grossissement est de 9 diamètres environ.

En expiration, les arceaux tergaux s'abaissent et les arceaux sternaux s'élèvent, le maximum d'effet ayant lieu au niveau des somites 3 et 4.

Les observateurs qui m'ont précédé et qui n'ont utilisé, du reste, que l'observation directe, signalent généralement cette particularité que le mouvement vers le haut des arceaux sternaux surpasse de beaucoup le mouvement vers le bas des arceaux tergaux. Cette observation est vraie d'une façon absolue; mais il ne faut pas oublier qu'à chaque expiration l'extrémité de l'abdomen se relève d'une façon notable ; ce mouvement d'ascension général s'ajoute à celui de même sens des pièces de la face sternale et annule, pour l'œil, le mouvement de descente des pièces de la face tergale qui se meuvent en sens opposé.

En se reportant aux figures 46 et 47 qui représentent les anneaux en coupe et les muscles expirateurs, on voit très bien que les deux arceaux supérieur et inférieur doivent simplement marcher à la rencontre l'un de l'autre. Mes expériences sur le *Stenobothrus variabilis,* § LXXVII, prouvent que les choses se passent bien ainsi.

[1] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc. Op. cit., p. 120) nous fournit encore un argument assez important. Il a observé, chez le *Psophus stridulus*, que chaque fois que l'abdomen de cet Orthoptère se contractait, les stigmates situés au-dessus des pattes de la deuxième paire s'ouvraient d'une façon évidente. Ce qui démontre, dit cet éminent observateur, qu'une certaine quantité de l'air logé dans la portion antérieure du corps est expulsée en ce moment par les stigmates.

Digitized by Google

Des mesures prises sur les silhouettes montrent qu'à la hauteur du troisième somite, le diamètre vertical diminue, en expiration, de $^1/_{12}$.

Les arrêts qui se présentent de temps en temps ont toujours lieu en inspiration; les mouvements respiratoires paraissent simultanés dans tous les somites; la longueur de l'abdomen ne change pas.

Le prothorax et la tête exécutent de petits mouvements de bascule à peine perceptibles, se relevant un peu en expiration pour s'abaisser ensuite en inspiration. Je n'ai pas utilisé la méthode des projections pour l'étude des mouvements des flancs; tout ce que je puis dire, c'est que la dépression des pleurites en expiration paraît faible.

§ LXXV.

Muscles respiratoires du Stethophyma grossum.

Le système musculaire abdominal des Acridiens a été esquissé par Marcel de Serres et décrit par Rathke et par Graber. Sedgwick Minot s'est borné à attirer l'attention sur la forme du muscle expirateur principal.

Marcel de Serres a signalé, le premier, à propos des Truxales, les grands apodèmes saillants dilatés en palette à leur extrémité libre supérieure qui prolongent les angles antérieurs des arceaux sternaux des Acridiens; il les désigne sous le nom de *côtes* et indique, en quelques mots, qu'ils donnent chacun insertion à deux muscles : « un releveur ou extenseur et un abaisseur » ou fléchisseur; la direction de ce dernier est assez oblique ».

Ni Marcel de Serres, ni Rathke n'ont publié de figures de ces apodèmes et de leurs muscles. Graber seul, à ma connaissance, les a représentés dans des dessins réellement démonstratifs [1].

Comme mes dissections personnelles m'ont fait découvrir quelques petits muscles supplémentaires et qu'il est nécessaire de pouvoir établir rapidement et facilement des comparaisons entre les muscles abdominaux des Acridiens et ceux des autres insectes dont je parle dans ce travail, j'ai cru utile d'insérer ici

[1] Graber. *Die Insekten*, pp. 108, 109, 110, fig. 67, 68 et 69.

Digitized by Google

des figures dessinées d'après le *Stethophyma* et sans lesquelles la description et les comparaisons eussent été difficiles et peu claires (fig. 46, 47 et 48).

Un simple coup d'œil sur ces figures et sur celles qui représentent le squelette abdominal et les muscles de la Guêpe et des Bourdons montre immédiatement que les apodèmes [1] (*prolongements costiformes* de Graber) sont absolument les homologues des apodèmes que présentent les arceaux sternaux des Hyménoptères porte-aiguillon. La différence capitale qui existe entre le squelette des Acridiens et celui des Hyménoptères en question, c'est que chez les Acridiens l'arceau tergal est privé d'appendices semblables. Les apodèmes n'existent donc, ici, que pour les pièces de la face sternale.

Les muscles appartiennent, comme chez les autres insectes, à deux catégories principales : il y a les muscles fléchisseurs généraux et les muscles respiratoires proprement dits.

Les fléchisseurs généraux destinés à courber l'abdomen dans divers sens sont, comme toujours, des muscles longitudinaux dorsaux *A* et sternaux *a* qui ne nous offrent, pour le moment, aucun intérêt.

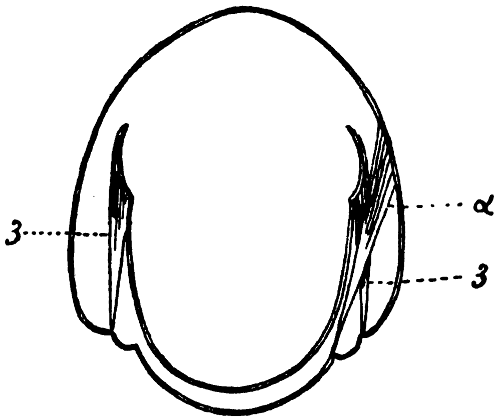


Fig. 46 × 9. — *Stethophyma grossum.*
Coupe transversale de l'abdomen vers le dernier tiers. Deux somites sont engagés l'un dans l'autre.
α Muscle expirateur vertical, ou principal.
3 Muscle inspirateur principal.

Quant aux muscles respiratoires, Marcel de Serres, puis Rathke et enfin Graber en indiquent deux de chaque côté par anneau. J'en ai observé personnellement quatre, deux principaux et deux accessoires.

Fait extrêmement important, déjà mis en lumière par les auteurs précités, les Acridiens possèdent, comme les Hyménoptères porte-aiguillon et comme les Névroptères Phryganides, de véritables muscles *inspirateurs,* ajoutant leur action à celle de l'élasticité des tissus pour amener la dilatation de l'abdomen.

[1] Voyez la note 2 de la page 26.

Les *expirateurs,* au nombre de deux de chaque côté et par somite, ont une direction presque verticale; ce sont :

1° L'*expirateur principal* α (dorso-ventral de Graber), sans homologue chez les Hyménoptères, mais homologue évident de l'expirateur ordinaire des Coléoptères et d'un grand nombre d'insectes, est un muscle puissant, naissant en dedans du bord supérieur de l'arceau sternal, en arrière de l'apodème et allant s'insérer vers le milieu de la hauteur de l'arceau tergal correspondant (c'est le seul figuré par Sedgwick Minot);

2° L'*expirateur accessoire* β, que je crois avoir observé le premier, est plus grêle et moins long; ses insertions sont analogues; il est situé entre l'apodème et l'expirateur principal.

Ces deux muscles rapprochent les arceaux tergaux et sternaux et, comme l'indique la figure 47, déterminent la formation d'un pli rentrant dans la zone membraneuse latérale qui unit ces arceaux.

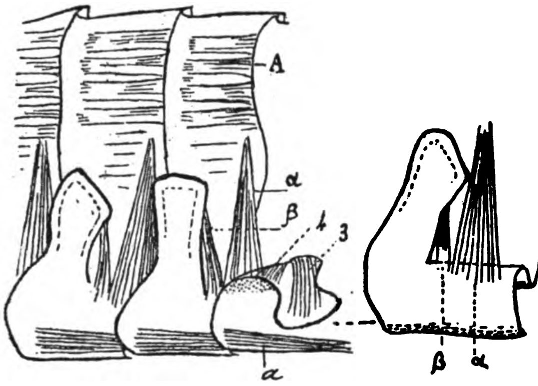


Fig. 47 × 7.

Portion de la moitié droite de l'abdomen du *Stethophyma.*

A, *a* Muscles longitudinaux dorsaux et sternaux.

α, β Muscles expirateurs verticaux, principal et accessoire.

3 Muscle inspirateur vertical ou principal.

4 Muscle inspirateur accessoire.

Fig. 48 × 7.

Apodème et ses muscles vu par sa face externe.

3 Muscle inspirateur principal.

4 Muscle inspirateur accessoire.

Les *inspirateurs,* au nombre de deux aussi, de chaque côté et par somite, sont :

1° L'*inspirateur principal* 3, à direction presque verticale, antagoniste de l'expirateur principal, est évidemment l'homologue de l'inspirateur 3 que j'ai

Digitized by Google

découvert chez les Guêpes et les Bourdons (fig. 40, 41 et 42). Comme lui, il occupe la face *externe* de l'apodème; comme lui, il nait de cet apodème, se porte en bas et un peu en arrière pour se terminer sur le bord inférieur de l'arceau tergal correspondant. Son action éloigne l'arceau sternal de l'arceau tergal et augmente le diamètre vertical de l'abdomen. Il offre cette particularité d'être notablement plus faible que l'expirateur principal; ce qui prouve que l'inspiration s'opère encore en grande partie par l'élasticité des téguments et du système trachéen;

2° L'*inspirateur accessoire* 4, qui avait, comme l'expirateur accessoire, échappé à mes devanciers, ne mérite peut-être pas la dénomination d'inspirateur. Il est situé, comme le précédent, à la face externe de l'apodème; il naît du bord antérieur de la base de cette saillie, descend obliquement en arrière et va s'insérer sur le bord antérieur de l'arceau sternal qui suit immédiatement. Ce muscle paraît devoir faire basculer l'apodème. Dans tous les cas, sa situation externe ne permet pas de le considérer comme une subdivision des muscles longitudinaux [1].

§ LXXVI.

Expériences sur le système nerveux du Stethophyma.

Les expériences sur les fonctions du système nerveux sont assez faciles à exécuter; en effet la chaîne nerveuse est située très bas, de sorte qu'il est aisé de la couper ou de l'exciter en divers points, en ne faisant aux téguments que de petits orifices. De plus, les masses ganglionnaires sont généralement éloignées les unes des autres et reliées par de longs connectifs.

Afin d'interpréter exactement les résultats des opérations, il importe de remarquer que, comme chez les Coléoptères, les premiers ganglions abdominaux sont évidemment fusionnés avec la partie postérieure des ganglions métathoraciques. Les preuves de cette fusion sont le nombre des ganglions abdominaux toujours inférieur à celui des somites de l'abdomen, le grand

[1] La dissection de grands Acridiens exotiques provenant de Java m'a permis de retrouver exactement tous les muscles que je viens de décrire chez le *Stethophyma*.

Digitized by Google

volume de la masse métathoracique, enfin la distribution des nerfs qui naissent de cette masse et dont les uns se rendent dans le métathorax proprement dit et dans les grandes pattes postérieures, tandis que d'autres se portent en arrière dans la base de l'abdomen, animant, ainsi que le démontrent les sections, les trois premiers segments de cette portion du corps.

Mes expériences ont eu le même but que celles que j'ai effectuées sur les insectes des autres groupes; prouver 1° que les ganglions abdominaux sont les centres respiratoires pour les somites auxquels ils distribuent leurs nerfs moteurs et 2° que la masse métathoracique n'est point le centre excitateur des mouvements de respiration.

1re *Expérience.* — On sectionne la chaîne nerveuse entre la masse métathoracique et la première masse abdominale distincte. Les ganglions métathoraciques n'ayant pas été touchés, l'insecte conserve la faculté de sauter.

Comme en faisant l'opération on a inévitablement coupé les nerfs qui du centre métathoracique se portent en arrière dans l'abdomen, les anneaux que ces nerfs animent sont paralysés. Ce sont évidemment les trois premiers, car les mouvements respiratoires cessent dans les arceaux sternaux 2 et 3 (c'est-à-dire dans les deux premiers arceaux sternaux *apparents,* l'arceau sternal du premier somite étant rudimentaire ou mieux absent). Mais les mouvements respiratoires parfaitement réguliers persistent dans toute la partie de l'abdomen située au delà. Le rhythme est ralenti; l'animal intact respirait 38 fois par minute; après l'opération, on observe, en moyenne, 19 mouvements respiratoires dans le même espace de temps.

2e *Expérience.* — On détruit, chez un autre individu, la masse nerveuse complexe du métathorax. L'animal est devenu incapable de sauter. Les mouvements respiratoires continuent avec régularité dans les anneaux abdominaux qui suivent les trois premiers. Comme dans l'expérience précédente, ils sont notablement ralentis. On en compte, en moyenne, 16 par minute, alors que l'animal intact et un peu excité en offrait 76.

Digitized by Google

3e *Expérience.* — Chez le même individu dont le centre métathoracique est détruit, on sectionne la chaîne nerveuse au bord postérieur du 4e arceau sternal apparent. Les somites situés en deçà de la section, c'est-à-dire entre celle-ci et la base de l'abdomen, deviennent immobiles; les somites qui suivent continuent, au contraire, à présenter des mouvements respiratoires réguliers, à raison de 16, en moyenne, par minute, comme précédemment [1].

4e *Expérience.* — Chez un nouveau *Stethophyma,* on sépare complètement l'abdomen du thorax et on l'introduit dans un tube de verre à atmosphère humide, afin d'éviter l'influence de la dessiccation. La section des nerfs émanant des ganglions abdominaux soudés aux ganglions métathoraciques a amené l'immobilité des arceaux sternaux 2 et 3, absolument comme dans la 1re expérience. Le reste de l'abdomen continue à respirer pendant longtemps [2]; les mouvements respiratoires, un peu moins réguliers et plus lents que chez l'insecte intact, sont profonds et très nets. On en comptait avant l'opération environ 50 par minute; l'abdomen isolé en présente 16 à 17 dans le même temps.

Bien que ces expériences eussent pu être multipliées davantage, je crois qu'elles sont suffisantes et qu'elles fournissent la solution des questions que je m'étais proposé de résoudre. Leurs résultats prouvent, en effet : 1° que la masse métathoracique n'est point le centre respiratoire de l'abdomen; 2° que les ganglions abdominaux sont les centres respiratoires vrais d'où émanent les excitations qui font contracter rhythmiquement les muscles inspirateurs et expirateurs.

On remarquera, en outre, que toutes les fois que l'abdomen est soustrait à l'influence indirecte des centres cérébroïdes ou volontaires, par une section de la chaîne nerveuse, les mouvements respiratoires sont ralentis.

Les résultats ci-dessus sont, du reste, en parfait accord avec ce que les insectes des autres groupes nous ont donné à mes prédécesseurs et à moi.

[1] On ne comprend pas bien l'arrêt du somite 4 qui est animé par un centre ganglionnaire abdominal intact.

[2] Je n'ai pu suivre l'expérience jusqu'au bout. Les mouvements existaient encore deux heures après l'opération.

Digitized by Google

§ LXXVII.

Stenobothrus variabilis, Fieb. (biguttulus, L.).

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections et expériences sur le système nerveux.)

Mouvements respiratoires. — Les diverses observations faites sur cette forme, beaucoup plus petite, confirment parfaitement les données fournies par le *Stethophyma*.

La manière de fixer l'insecte dans l'appareil est un peu différente; il est porté par deux épingles traversant les parties latérales du prothorax; les ailes et les grosses pattes postérieures sont supprimées; l'abdomen est libre et le grossissement employé est de 5 diamètres environ (fig. 73, pl. VI).

Pendant l'expiration, les pièces sternales s'élèvent et les arceaux tergaux s'abaissent d'une quantité à peu près égale, l'effet maximum paraissant avoir lieu pour le somite 4. En même temps, l'extrémité de l'abdomen s'abaisse légèrement et sa longueur augmente de $^1/_{30}$ environ.

Les mouvements respiratoires sont simultanés dans tous les anneaux et les segments thoraciques semblent rester immobiles. L'observation directe à la loupe montre, en outre, que pendant la phase expiratoire, les flancs se dépriment et que, comme chez le *Stethophyma,* la membrane tympanique fait saillie pour s'enfoncer ensuite pendant l'inspiration.

Expérience sur le système nerveux. — Chez un individu fixé par les ailes et dont on a seulement supprimé les grandes pattes postérieures, les mouvements respiratoires ont lieu par petites séries de quatre ou cinq, séparées par des arrêts en inspiration. On note successivement 21, 20, 26 (moyenne 22 expirations) par minute.

On sectionne la chaîne nerveuse à la base de l'abdomen; les mouvements respiratoires persistent et sont encore groupés en petites séries, comme chez l'animal dont le système nerveux est entier; la seule différence réside dans un ralentissement marqué. On note, en effet, 16, 12, 11 (moyenne 13) expirations par minute.

Digitized by Google

On sépare ensuite complètement l'abdomen du thorax; les mouvements respiratoires semblent un peu plus régulièrement espacés; cependant la moyenne par minute est restée la même, ainsi que l'indiquent les chiffres suivants : 13, 14, 15, 15, 12, 10 (moyenne 13). Ces pulsations rhythmiques continuent pendant plus d'une heure dans l'abdomen isolé.

Les résultats sont, on le voit, à fort peu près les mêmes que ceux des expériences faites sur le *Stethophyma* et conduisent à des conclusions identiques.

Afin de compléter ces données concernant l'influence du système nerveux sur les mouvements respiratoires des Orthoptères, je résumerai les observations de Barlow sur le Grillon (*Observations on the respiratory movements of insects*. PHILOS. TRANS., vol. 145, Part. I, pages 141 et 142. Londres, 1855). Barlow a décapité successivement divers individus après avoir compté le nombre de leurs mouvements respiratoires à l'état normal; il a constamment constaté : 1° la persistance des mouvements respiratoires abdominaux; 2° l'affaiblissement de ces mouvements et un ralentissement manifeste. « Ces expériences, dit l'auteur, » prouvent à l'évidence la diminution dans la fréquence et la force des mouvements respi- » ratoires après la suppression des ganglions sus- et sous-œsophagiens; mais le fait que ces » mouvements ne sont pas abolis démontre, d'un autre côté, qu'il existe chez l'insecte une » multiplication des centres nerveux répondant à la distribution et à la répétition des » organes respiratoires. »

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

ÉTUDE DU TROISIÈME TYPE.

A. **Orthoptères locustiens.**

§ LXXVIII.

HISTORIQUE.

Les *Locusta,* en comprenant sous cette dénomination la Sauterelle verte, les Dectiques et quelques autres formes que les naturalistes d'une époque déjà éloignée confondaient sous une appellation commune, ont été fréquemment examinés au point de vue des mouvements d'inspiration et d'expiration.

Malpighi [1] a vu les déplacements de leurs arceaux sternaux; Hausmann [2] a cherché, comme je l'ai dit page 8, à rendre plus sensibles, par les oscillations d'une colonne d'eau, les diminutions et les augmentations de volume de l'abdomen de la *Locusta viridissima;* Sorg [3], Vauquelin [4], Treviranus [5] ont déterminé le nombre de mouvements respiratoires par minute pour la même espèce, et Rengger [6], après avoir observé ces mouvements, a comparé le système des anneaux abdominaux au système costal des mammifères.

Burmeister [7] a indiqué, le premier, dans l'abdomen des *Locusta,* l'exis-

[1] MALPIGHI. *Dissertatio epistolica de Bombyce,* etc., op. cit., p. 20.
[2] HAUSMANN. *De animalium exsanguium respiratione Commentatio,* etc., op. cit., p. 8.
[3] SORG. *Disquisitiones physiologicae circa respirationem Insectorum,* etc., op. cit., p. 46.
[4] VAUQUELIN. *Annales de Chimie,* t. XII, p. 273.
[5] TREVIRANUS. *Biologie,* etc., op. cit., t. IV, p. 158.
[6] RENGGER. *Physiologische Untersuchungen über die thierische Haushaltung der Insecten,* p. 38. Tübingen, 1817.
[7] BURMEISTER. *Handbuch der Entomologie,* etc., op. cit., p. 284.

Digitized by Google

tence de muscles transversaux qui ont été, plus tard, figurés, sans interprétation, par E. Blanchard [1], puis considérés comme faisant peut-être partie d'un diaphragme inférieur, par Leydig [2]. C.-G. Carus a décrit en quelques mots [3] et a tenté de représenter par deux figures juxtaposées [4] l'aspect général des mouvements de l'abdomen du Dectique verrucivore; Dugès [5] s'est borné à signaler l'énergie des mouvements respiratoires de la Sauterelle; Newport [6] a étudié le rhythme de ces mouvements et, enfin, Rathke [7], prenant le Dectique comme type, a décrit, avec figures à l'appui, la disposition des muscles abdominaux.

Cette longue énumération bibliographique renferme surtout l'indication d'observations isolées ou incomplètes et aucun des travaux mentionnés, même la description anatomique de Rathke, ne me dispensait de recommencer l'étude détaillée des mouvements respiratoires d'un Locustien.

§ LXXIX.

Decticus verrucivorus.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode graphique.)

La taille de ce bel Orthoptère et l'énergie de ses mouvements respiratoires le désignaient comme un sujet d'étude intéressant; aussi, comme je le dis plus haut, le mécanisme de la respiration du Dectique a-t-il été déjà l'objet d'un examen de la part de C.-G. Carus et de Rathke.

[1] E. Blanchard. Dans Cuvier, *Règne animal distribué d'après son organisation. Insectes.* Atlas, 1re partie, pl. 76, fig. 2. Paris (édition Masson), 1849.

[2] Leydig. *Vom Bau des Thierischen Körpers,* Erster Band, Erste Hälfte, p. 210. Tübingen, 1864.

[3] Carus. *Traité élémentaire d'anatomie comparée,* p. 335.

[4] — *Tabulae anatomiam comparativam illustrantes,* pars VII, tab. III, fig. 10. Lipsiae, 1848.

[5] Dugès. *Traité de physiologie comparée,* etc., op. cit., t. II, p. 555.

[6] Newport. *On the respiration of Insects,* etc., op. cit., p. 548.

[7] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen,* etc., op. cit., p. 111, pl. VIII, fig. 1 et 2.

Digitized by Google

C.-G. Carus a publié deux figures assez exactes de la face inférieure de l'abdomen de la femelle; la première représente la position des pièces en inspiration, et la seconde, les rapports des mêmes pièces en expiration. Ces figures, le texte qui les accompagne et les quelques mots que l'auteur consacre au même sujet dans son *Anatomie comparée* sont, cependant, tout à fait insuffisants pour donner une idée complète des faits.

Dans l'abdomen du Dectique, les pièces sternales apparentes (7 chez la femelle, 8 chez le mâle), assez réduites, sont de petites plaques à peu près quadrangulaires, reliées aux arceaux tergaux par de larges zones membraneuses portant les stigmates et divisées chacune en deux, dans toute leur longueur, par un sillon très accusé. Les figures 49 et 50 sont destinées à faire comprendre cette disposition qui diffère notablement de celle que nous offrent les Acridiens. On voit que chaque somite est nettement divisé, d'une façon classique, si je puis m'exprimer ainsi, en pièces sternales, épisternales, épimériennes et tergales, que les pièces sternales et tergales sont seules résistantes, que les pièces épisternales et épimériennes sont molles et séparées par le sillon cité plus haut, sillon qui marque exactement la limite entre les arceaux supérieurs et inférieurs [1].

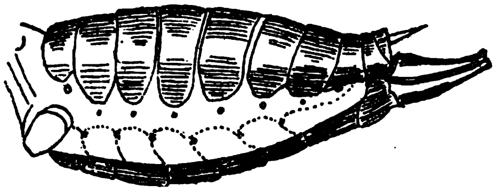


Fig. 49 × 2. — *Decticus verrucivorus* ♀.
Surface extérieure de l'abdomen montrant la zone molle des flancs, son sillon indiqué par une ligne pointillée, les dépressions qui répondent à l'implantation des muscles expirateurs et enfin l'emplacement des stigmates.

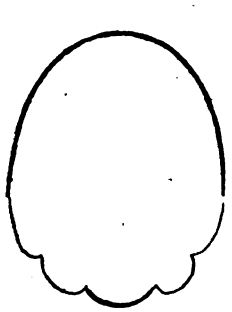


Fig. 50 × 3.
Decticus verrucivorus.
Coupe transversale du 4e somite abdominal.

En examinant le sillon avec attention, il est facile d'y constater une série de dépressions profondes que l'on pourrait confondre, à première vue, avec des stigmates vrais. Ces dépressions, au nombre de 6 chez la femelle et de 7 chez le mâle, répondent à des insertions musculaires importantes dont je reparlerai au § LXXXI.

1 Voyez, pour une figure analogue (*Anabrus*), *Second Report of the United States entomological Commission for the years 1878 and 1879*, p. 172, fig. 4. Washington, 1880.

Digitized by Google

Les mouvements respiratoires les plus intenses et les plus apparents consistant en élévations expiratoires et en abaissements inspiratoires alternatifs des plaques sternales, j'ai naturellement cherché à obtenir d'abord des graphiques des déplacements de ces plaques.

Toutes mes expériences ont porté sur des femelles. L'insecte est fixé, *la face ventrale en haut,* les élytres et les ailes serrés entre une lame de liège et une lame de carton. Les tarses des grandes pattes postérieures sont liés l'un à l'autre. J'ai été obligé de couper les pattes des deux premières paires.

Un levier inscripteur ordinaire, transversal (fig. 2), repose, par un petit talon, sur la limite entre les plaques sternales 2 et 3. La pointe du levier s'abaisse donc en expiration. Le tracé P obtenu dans ces conditions et lorsque

← Sens de la rotation du cylindre.

l'animal est encore plus ou moins sous l'influence de l'excitation produite par les apprêts de l'expérience, montre des mouvements respiratoires rapides (50 expirations par minute), sans pauses, ni arrêts. La courbe ressemble beaucoup à celle que fournissent les pièces tergales des Coléoptères; on y constate une partie ascendante inspiratoire à vitesse décroissante et une partie descendante expiratoire caractérisée par une chute brusque du levier.

Si l'on attend 20 à 25 minutes avant de prendre un nouveau tracé, on voit apparaître, soit sous l'influence de la fatigue, soit parce que l'animal rentre à l'état normal, et cela, comme chez l'Hydrophile parmi les Coléoptères, un plateau horizontal à la partie supérieure de la courbe, indiquant une pause en inspiration (tracé Q). De plus, de temps en temps se présente

← Sens de la rotation du cylindre.

un arrêt complet, aussi en inspiration. Il n'y a ni pauses, ni arrêts expiratoires, ce qui concorde parfaitement avec ce que nous donnent les insectes des autres groupes.

Digitized by Google

Théoriquement, en expiration, les mouvements d'élévation des pièces sternales doivent être accompagnés de mouvements d'abaissement des arceaux tergaux et d'une légère dépression des flancs. Les projections permettent, comme on le verra plus loin, de s'assurer de l'existence réelle de ces déplacements, tandis que la méthode graphique employée seule conduirait à des conclusions erronées. Voici, du reste, les résultats qu'elle donne et la façon dont il faut les interpréter.

Lorsque le Dectique est dans la situation normale d'un insecte posé, on voit que l'ensemble de l'abdomen est nettement projeté vers le haut à chaque expiration. Ce mouvement, qui masque l'abaissement des arceaux dorsaux, peut être reproduit graphiquement, soit en faisant reposer un levier ordinaire transversal sur la face dorsale du troisième tergite apparent, soit en faisant inscrire directement le mouvement par la pointe de l'oviscapte de la femelle, soit encore en amplifiant les déplacements du pondoir en y fixant un style d'une longueur triple, par exemple.

J'ai fait usage de ces divers procédés. Les tracés obtenus, et que je crois inutile de reproduire, montrent tous, ce qui était à prévoir, une partie de la courbe montant brusquement, répondant à l'expiration, et une partie descendante à vitesse décroissante, répondant à l'inspiration.

Si, enfin, plaçant l'insecte sur le flanc, en prenant d'ailleurs toutes les précautions nécessaires, on fait reposer un levier transversal sur les pleurites, on observe immédiatement que ce levier s'élève en expiration au lieu de s'abaisser. Ce fait, qui est l'inverse de ce que l'on supposerait à priori, tient à cette particularité que, lors de l'ascension expiratoire des pièces sternales, le sillon entre les éléments épisternaux et épimériens s'accusant davantage, les bords de ce sillon forment des bourrelets plus accusés.

Dans les tracés ainsi obtenus, comme dans les précédents, les pauses sont toujours exclusivement inspiratoires.

Digitized by Google

§ LXXX.

Étude des mouvements respiratoires du Dectique par la méthode des projections.

L'insecte, privé de ses pattes, est fixé par les organes du vol serrés entre une plaque de liège et une lame de carton. Les mouvements respiratoires ne sont donc gênés en rien. Le grossissement employé est de 7 diamètres. Les observations ont été faites sur un mâle vigoureux.

Lorsque le Dectique est placé le ventre en bas et de façon à fournir une silhouette du profil longitudinal, on voit naturellement les plaques sternales s'élever en expiration et s'abaisser en inspiration d'une façon rhythmique; mais l'abdomen étant projeté vers le haut d'une petite quantité, dans chaque mouvement expiratoire, les déplacements des arceaux tergaux sont masqués.

On peut néanmoins s'assurer qu'il existe une véritable pause inspiratoire courte, que les segments thoraciques ne participent pas aux mouvements respiratoires et, enfin, que la longueur de l'abdomen ne change guère. Les dessins indiquent seulement un allongement en expiration de $^1/_{113}$ de cette partie du corps; valeur absolument négligeable, mais que je cite pour montrer jusqu'où peuvent aller les résultats de la méthode.

Afin de résoudre les questions restées en souffrance, il convient de placer le Dectique dans la position inverse, les organes du vol en bas, la face sternale en haut et le dos reposant par un seul point, le bord postérieur du sixième arceau tergal, sur un petit support saillant (fig. 74, pl. VII).

Les mouvements respiratoires restent aussi libres que dans le cas précédent, mais la projection de l'abdomen du côté dorsal, en expiration, est supprimée.

Dans ces conditions, on observe, pendant l'expiration, non seulement la dépression des pièces sternales avec maximum d'effet vers la troisième, mais, en outre, le déplacement en sens inverse des arceaux tergaux [1]. Ainsi se trouve démontré ce fait que chez les Locustiens, comme chez nombre

[1] La *descente* des arceaux tergaux pour un animal dans sa position normale.

Digitized by Google

d'autres insectes, les arceaux sternaux et tergaux marchent à la rencontre l'un de l'autre durant la phase expiratoire.

L'amplitude du mouvement des arceaux tergaux n'est que le quart de celle du déplacement des plaques sternales. La diminution totale du diamètre vertical de l'abdomen à la hauteur du troisième somite est de $^1/_{13}$, par conséquent moyenne (voyez § XCII).

Un autre phénomène intéressant que présente le Dectique placé sur le dos, c'est l'existence incontestable d'une onde progressant d'arrière en avant; la dépression des plaques sternales 5, 6, 7 commençant un instant très court avant celle des plaques 2, 3, 4.

J'ajouterai, comme détail de moindre importance, que chez l'insecte posé ainsi la face sternale en haut et un point du dos en contact avec la surface résistante, l'extrémité de l'abdomen se porte un peu, en expiration, du côté sternal, au lieu d'être projetée du côté dorsal, comme dans le cas d'un individu en situation normale.

Enfin, en suspendant le Dectique verticalement, la face dorsale tournée vers la lampe, on obtient une silhouette sur laquelle on peut constater et mesurer la dépression des flancs en expiration. Celle-ci, qui offre son maximum vers le quatrième somite, soit dans la partie la plus large du corps, amène, en moyenne, une diminution du diamètre transversal de l'abdomen de $^1/_{14}$.

Cette étude, assez complète, permet de résumer avec netteté la série des mouvements respiratoires du Dectique.

Faits généraux.

1° Les segments thoraciques ne participent pas aux mouvements respiratoires; ceux-ci sont localisés dans l'abdomen;

2° Les somites abdominaux changent de diamètre dans les deux sens, vertical et transversal, mais ne se déplacent pas les uns par rapport aux autres;

3° La dilatation de l'abdomen en inspiration est plus lente que la contraction expiratoire;

4° Dans certaines positions de l'animal (peut-être dans tous les cas) les mouvements respiratoires progressent sous forme d'onde d'arrière en avant;

5° Pendant les mouvements respiratoires l'abdomen oscille verticalement, mais ne change guère de longueur.

Digitized by Google

Faits spéciaux à chaque phase.

Expiration.	Inspiration.
Le mouvement débute d'une façon brusque.	L'inspiration est plus graduelle et à vitesse décroissante.
Il n'y a jamais de pause expiratoire.	Il existe une pause inspiratoire et même des arrêts en inspiration.
Les plaques sternales s'élèvent avec maximum d'effet vers la troisième.	Les plaques sternales s'abaissent.
Le sillon compris entre les éléments épisternaux et épimériens s'approfondit.	Le sillon s'efface en partie.
Les arceaux tergaux descendent d'une quantité quatre fois plus petite que le déplacement vers le haut des plaques sternales.	Les arceaux tergaux s'élèvent.
Les flancs se dépriment légèrement.	Les flancs reprennent leur position première.

§ LXXXI.

Muscles respiratoires du Decticus verrucivorus.

Mes dissections ont confirmé la description que donne Rathke du système musculaire abdominal du Dectique et je pourrais, à la rigueur, renvoyer le lecteur au mémoire que j'ai déjà cité tant de fois; mais Rathke ayant représenté l'insecte ouvert par le dos, la comparaison des muscles du Dectique avec ceux des autres insectes figurés dans mon propre travail, demande une certaine étude que j'ai voulu éviter à mes successeurs en publiant un dessin d'après un individu sectionné suivant un plan vertical.

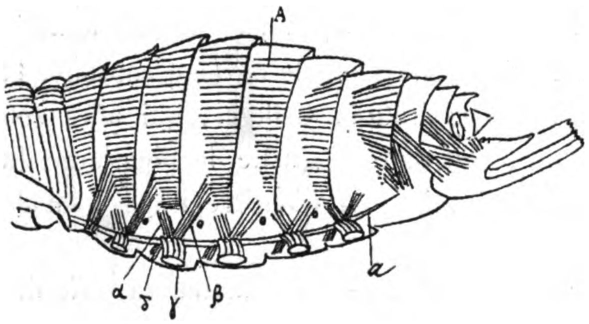


Fig. 54 × 2. — Moitié droite de l'abdomen du Dectique verrucivore ♀.
A, *a* Muscles longitudinaux dorsaux et sternaux.
α, β — expirateurs verticaux ascendants.
δ — — descendants.
γ — — transversaux.

Laissant de côté les muscles longitudinaux dorsaux A et sternaux *a*, dont la disposition est fort simple, on voit que tous les muscles respiratoires vrais naissent dans le sillon qui divise longitudinalement en deux la zone molle latérale et qu'ils partent tous des dépressions que ce sillon offre de distance en distance.

Digitized by Google

Trois catégories de petits muscles naissent de chacune des dépressions en question :

1° Des muscles α, β, à direction verticale ascendante, se portant du fond du sillon à la partie inférieure des arceaux tergaux ;

2° Des muscles plus faibles δ à direction verticale descendante, se portant du fond du sillon sur les plaques sternales ;

3° Des muscles transversaux γ, signalés pour la première fois par Burmeister [1], disposés au-dessus de la chaîne nerveuse ventrale comme les barreaux d'une échelle et reliant le sillon droit au sillon gauche.

Tous ces muscles sont expirateurs; leur contraction rend le sillon latéral plus profond et élève les plaques sternales. On remarquera que les muscles verticaux ascendants sont plus forts dans la région antérieure de l'abdomen, ce qui explique, en partie, pourquoi l'amplitude des mouvements respiratoires offre son maximum vers la deuxième et la troisième plaque sternale.

Je n'ai trouvé aucune trace de muscles inspirateurs. Leur absence a une grande importance si l'on considère que les Acridiens possèdent des muscles inspirateurs développés et très nets. L'inspiration, chez les Locustiens, est, par conséquent, absolument passive.

B. Lépidoptères.

§ LXXXII.

HISTORIQUE. — CONSTITUTION DE L'ABDOMEN. — MÉTHODES D'OBSERVATION.

Les mouvements respiratoires des Lépidoptères, qu'il ne faut point confondre avec les vibrations ou les ondulations de l'abdomen de ces insectes lorsqu'on les enfile sur une épingle ou lorsqu'on les tient par les ailes, n'attirent pas immédiatement l'attention du naturaliste, comme ceux des Orthoptères ou des Libellules; ils sont peu accusés et le plus souvent masqués

[1] BURMEISTER. *Handbuch der Entomologie,* op. cit., t. I, p. 284. Représentés plus tard par E. Blanchard chez la Sauterelle (voir p. 178).

Digitized by Google

en partie par un revêtement épais d'écailles et de poils. Aussi les observations ont-elles été rares.

Sorg [1] a compté les mouvements respiratoires chez le *Deilephila euphorbiae;* Newport [2] a fait quelques remarques sur la façon dont l'exercice modifie le rhythme respiratoire du *Sphinx ligustri* et a cherché à déterminer, chez de grands Lépidoptères plongés dans l'eau, si l'expulsion de l'air par les orifices stigmatiques avait lieu avec la même force par tous les stigmates ou bien si elle était plus abondante pour certains stigmates déterminés [3]. Nitzsch [4] et Carus [5] paraissent avoir vu les mouvements respiratoires de quelques Papillons, mais ne donnent aucune description. Enfin, Rathke [6], qui est en général si explicite, ne consacre que six à sept lignes de son mémoire aux mouvements de respiration des Lépidoptères qu'il compare à ceux des Panorpes. Il dit avoir constaté que ces mouvements sont tantôt plus apparents vers la base de l'abdomen, tantôt plus visibles vers son extrémité; mais il ne cite pas de forme spécifique et ne fournit aucune indication quant aux muscles.

Pour se faire une idée claire de la structure de l'abdomen des Lépidoptères et pour voir nettement les relations qui existent entre les arceaux dorsaux et sternaux, il faut évidemment enlever, par le frottement, la presque totalité du revêtement écailleux (fig. 52). On constate alors, comme Rathke l'a fort bien indiqué en quelques mots, que, dans la plupart des segments, les arceaux tergaux et sternaux sont séparés, à la hauteur des flancs, par une zone latérale molle, très large, portant les

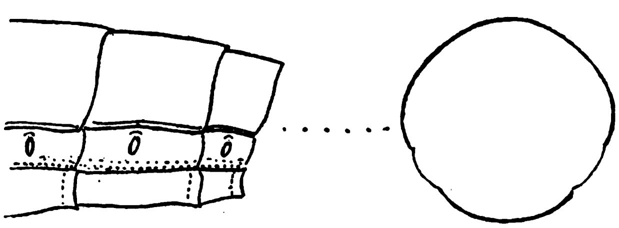


Fig. 52 × 3. — Structure de l'abdomen d'un lépidoptère (*Smerinthus*).

[1] Sorg. *Disquisitiones physiologicae circa respirationem Insectorum*, etc., op. cit., p. 66.

[2] Newport. *On the temperature of Insects*, etc. (Philos. Trans. of the Royal Society, part. II, p. 292, tableau V. 1837.)

[3] Newport. *On the respiration of Insects*, op. cit., p. 548.

[4] Nitzsch. *Commentatio de respiratione animalium*. Vitebergae, 1808.

[5] Carus. *Traité élémentaire d'anatomie comparée*, op. cit., p. 336.

[6] Rathke. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc., op. cit., p. 107.

Digitized by Google

stigmates [1]. Les arceaux supérieurs ne chevauchent donc point sur les inférieurs et il existe, par conséquent, une certaine ressemblance générale entre la structure de l'abdomen des Lépidoptères et celle de l'abdomen des Panorpes et des Sialis.

Cette ressemblance ne concerne pas seulement l'aspect extérieur; je montrerai plus loin que la disposition des muscles s'éloigne peu de celle que j'ai observée chez les Névroptères propres.

J'ai déjà dit ailleurs, § IV, pages 11 et 17, pourquoi je n'avais pu appliquer la méthode graphique aux grands Lépidoptères. L'emploi de ce procédé serait, du reste, tout aussi impossible avec les Hyménoptères porte-aiguillon et avec beaucoup d'autres insectes à mouvements vifs et à abdomen très mobile.

Restait la méthode des projections pour les Lépidoptères de taille moyenne. Par suite de circonstances indépendantes de ma volonté, je n'ai pu soumettre à l'expérimentation qu'un petit nombre de ces animaux. Les résultats que j'ai obtenus suffisent cependant, me semble-t-il, pour montrer 1° que la forme des mouvements respiratoires des Lépidoptères doit les faire ranger dans le troisième type et 2° que ces mouvements sont, en général, si faibles, si obscurs, qu'il faut considérer les Papillons, et surtout les formes nocturnes, comme les plus mauvais sujets d'observation que l'on puisse choisir.

Avant d'aborder l'exposé des faits constatés, je crois devoir revenir sur une cause d'erreur que je signalais au début de ce paragraphe. Lorsque l'on fixe à l'aide d'épingles traversant les parties latérales du thorax, ou de toute autre façon, un Lépidoptère dont on a coupé les ailes, l'animal imprime, soit continuellement, soit par phases, à son abdomen et même à son corps entier, des mouvements oscillatoires d'une si grande rapidité que le terme de *vibrations* leur est applicable. L'observateur non prévenu pourrait prendre ces mouvements pour des mouvements respiratoires rapides. Ce serait là une

[1] On trouve des figures représentant l'abdomen des Lépidoptères *dénudé* dans :
LYONET. *Recherches sur l'anatomie et les métamorphoses de différentes espèces d'Insectes.* (OEuvre posthume publiée par W. de Haan, pl. XLVI, fig. 4. Paris, 1832.)
BURGESS. *Contributions to the anatomy of the Milk-Weed Butterfly* (*Danais archippus*). (ANNIVERSARY MEMOIRS OF THE BOSTON SOCIETY OF NATURAL HISTORY, pl. I, fig. 1. Boston, 1880.)

Digitized by Google

faute grave; les mouvements respiratoires vrais des Lépidoptères sont généralement lents. Les vibrations, probablement entièrement étrangères à l'acte respiratoire, sont dues aux contractions rapides des muscles thoraciques, moteurs des organes du vol.

J'ai étudié, ou plus exactement, essayé d'étudier le mécanisme respiratoire des formes suivantes : *Smerinthus tiliae, Sesia apiformis, Arctia menthastri, Euchelia jacobaeae, Pygaera (Phalera) bucephala, Triphaena pronuba, Triphaena fimbria* et *Pieris napi*. Afin d'abréger, je me bornerai à la description des expériences concernant *Pieris napi* et *Euchelia jacobaeae*.

§ LXXXIII.

Pieris napi.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

L'insecte est fixé par une seule épingle traversant le mésothorax; les ailes ont été enlevées, ainsi que les pattes de la paire postérieure (fig. 75, pl. VII).

Les mouvements respiratoires sont lents (quatre par minute, en général) et ont lieu de la façon suivante : en expiration, les arceaux tergaux de l'abdomen semblent immobiles, mais les arceaux sternaux s'élèvent d'une manière marquée. On observe, le plus souvent : 1° l'ascension des quatre premiers arceaux sternaux apparents, puis, immédiatement après, lorsqu'ils ont repris leur position inspiratoire; 2° l'ascension des trois arceaux sternaux postérieurs; 3° enfin un arrêt en inspiration.

L'onde n'est cependant pas constante; par moments, la face sternale de l'abdomen se déprime en entier, dans toute sa longueur.

La diminution du diamètre vertical de l'abdomen en expiration est d'un peu plus de $^1/_{12}$. Les segments thoraciques paraissent immobiles et la longueur de l'abdomen reste invariable.

Digitized by Google

§ LXXXIV.

Euchelia Jacobaeae.

Les observations sur les mouvements respiratoires abdominaux ont été faites à l'aide d'un individu fixé par les ailes; celles qui concernent les segments thoraciques ont été effectuées en se servant d'une Euchelie privée des organes du vol et fixée par une épingle traversant le mésothorax. Dans tous les cas l'abdomen était libre (le grossissement employé était de 11 diamètres).

Les mouvements respiratoires, assez nets pour un Lépidoptère, consistent en rapprochements et éloignements alternatifs des arceaux tergaux et sternaux de l'abdomen. Ces mouvements sont surtout accusés pour les segments 4 et 5 de la région moyenne. En expiration, les arceaux sternaux s'élèvent et glissent un peu d'arrière en avant; en même temps, l'abdomen s'incurve vers le bas et s'allonge de $^1/_{36}$ environ.

L'association des deux genres de mouvements que je viens d'indiquer, mouvements d'incurvation de l'abdomen et mouvements des arceaux dans le sens vertical, produit l'illusion d'une onde; mais il est aisé de s'assurer que les mouvements respiratoires vrais sont simultanés dans tous les somites et non progressifs.

La diminution du diamètre vertical de l'abdomen, en expiration, est de $^1/_{16}$.

§ LXXXV.

Résumé des observations sur les mouvements respiratoires des Lépidoptères.

Je crois pouvoir résumer de la façon suivante les observations que j'ai faites sur les huit formes énumérées à la fin du § LXXXII.

1° Les segments thoraciques des Lépidoptères au repos ne semblent pas participer aux mouvements respiratoires;

2° En expiration, les arceaux tergaux et sternaux se rapprochent et les flancs se dépriment. Le déplacement des arceaux sternaux vers le haut l'emporte, en général;

3° Comme l'a fort bien remarqué Rathke, ces mouvements respiratoires sont tantôt plus apparents vers la base de l'abdomen, tantôt vers son extrémité;

4° Chez plusieurs Lépidoptères, mais non chez tous, les mouvements respiratoires sont successifs, progressent sous la forme d'onde;

5° La longueur de l'abdomen reste invariable ou change peu;

6° Les arrêts ont toujours lieu en inspiration.

Digitized by Google

§ LXXXVI.

Muscles respiratoires des Lépidoptères.

Je n'ai trouvé nulle part de description ou de figure concernant le système musculaire abdominal des Lépidoptères à l'état parfait. Les travaux monographiques de Lyonet [1], de Newport [2], de Cornalia [3] et de Burgess [4] présentent tous la même lacune. Ce sujet d'étude, cependant, assez intéressant, paraît avoir été complètement négligé.

J'ai examiné les muscles de l'abdomen du *Smerinthus tiliae*, de l'*Arctia menthastri* et de la *Pygaera bucephala*. J'exposerai d'abord ce que j'ai observé chez la troisième de ces formes, parce que la disposition y est plus simple (fig. 53).

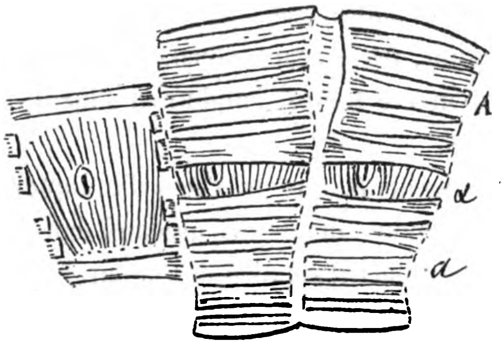


Fig. 53 × 7. — *Pygaera bucephala* ♀.
Muscles des somites 3 et 4 de la moitié droite de l'abdomen.
A et *a* Muscles longitudinaux dorsaux et sternaux.
α Muscles expirateurs verticaux.
Sur la gauche de la figure, le somite 3 a été figuré une deuxième fois, mais privé de la plupart des muscles longitudinaux, de façon à mettre à nu le muscle expirateur *α* dans toute son étendue.

Chez la *Pygaera*, les muscles longitudinaux tergaux et sternaux *A*, *a* sont très développés et, comme l'indique la figure, cachent, en partie, les insertions des muscles respiratoires vrais *α*. Ceux-ci, de même que chez les Muscides, ne consistent qu'en une couche de fibres musculaires verticales, croisant la zone molle latérale qui porte les stigmates et se rendant des arceaux inférieurs aux arceaux supérieurs. L'ensemble s'éloigne peu de ce qui existe chez les Névroptères du genre *Sialis* (fig. 56), bien que, chez les *Sialis*, les muscles expirateurs soient différenciés en faisceaux distincts.

[1] Lyonet. *Recherches sur l'anat. et les métamorph. de différentes espèces d'insectes*, op. cit.
[2] Newport. *On the nervous system of the Sphinx Ligustri*, part. I. (Philos. trans., part. II, p. 289, 1834.)
[3] Cornalia. *Monografia del Bombice del Gelso*. (Memorie dell' R. istituto lombardo, vol. VI.) Tiré à part. Milan, 1856.
[4] Burgess. *Contribution to the anatomy of the Milk-Weed Butterfly*, op. cit.

Digitized by Google

En consultant les figures publiées par Lyonet [1], Newport [2] et Cornalia [3] du système musculaire des chenilles de *Cossus*, de *Sphinx* et de *Sericaria*, on retrouvera immédiatement les mêmes expirateurs verticaux croisant la zone stigmatifère. Ce sont les *muscles latéraux* de Lyonet, les *muscles transverses latéraux* de Newport et les *muscles communs* α et β de Cornalia. Ces muscles persistent donc, sans grande modification, chez le Lépidoptère adulte, et il est à remarquer que Newport, en les décrivant chez la chenille du *Sphinx ligustri*, dit, en propres termes, que « ces faisceaux musculaires paraissent » avoir pour fonction de contracter les segments en expiration [4]. »

Si nous passons actuellement au *Smerinthus tiliae* (fig. 54) et à l'*Arctia menthastri*, nous trouvons une structure anatomique un peu plus complexe.

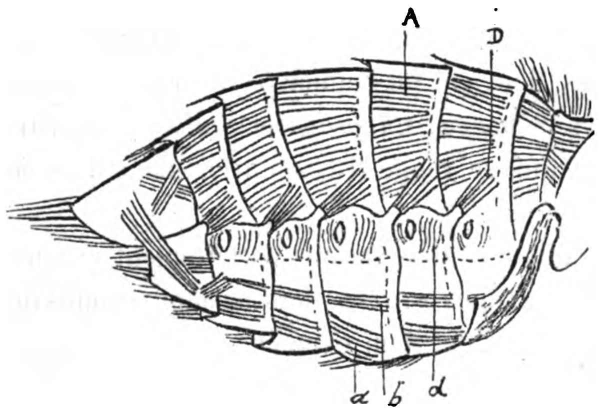


Fig. 54. × 3½. — *Smerinthus tiliae* ♂.
Muscles de la moitié gauche de l'abdomen. La préparation étant étalée à plat, la largeur de l'abdomen paraît exagérée.
A Muscles longitudinaux dorsaux.
D Faisceaux obliques résultant d'une différenciation des muscles précédents.
a, *b* Muscles longitudinaux sternaux.
α Muscles expirateurs verticaux.

La couche musculaire α, observée chez la *Pygaera*, existe ici aussi et joue évidemment le même rôle expirateur, mais le bord antérieur de chaque somite présente, *au-dessus de la zone molle portant les stigmates*, un apodème saillant donnant insertion à un muscle assez fort *D*, dirigé obliquement vers le haut et en avant et se terminant sur la région antérieure de l'arceau tergal qui précède immédiatement.

Les muscles D en question, naissant au-dessus de la zone molle, appartiennent exclusivement aux arceaux tergaux et me semblent constituer des

[1] Lyonet. *Traité anatomique de la Chenille qui ronge le bois de saule*, pl. VII, fig. 5 et 6 : β, γ, δ. La Haye, 1842.
[2] Newport. *On the respiration of Insects*, op. cit., p. 539, pl. XXXVII, fig. 1.
[3] Cornalia. *Monografia del Bombice*, etc., op. cit., p. 152, pl. VIII, fig. 108.
[4] Newport. *On the respiration of Insects*, op. cit., p. 540.

Digitized by Google

subdivisions obliques des muscles longitudinaux dorsaux analogues à celles que nous offrent d'autres insectes. Leur direction permet peut-être de les regarder comme aidant à l'expiration.

Je n'ai rencontré aucun muscle inspirateur; l'inspiration des Lépidoptères est donc passive.

C. Névroptères propres.

La forme des mouvements respiratoires des Phryganes et la disposition de leurs muscles m'ayant conduit à placer ces insectes dans le deuxième type, à la suite des Hyménoptères porte-aiguillon, il ne saurait être question des Phryganides, dans le chapitre actuel, qu'à un point de vue comparatif.

Les autres Névroptères propres dont j'ai pu étudier le mécanisme respiratoire appartiennent aux genres *Panorpa, Chrysopa* et *Sialis;* ils constituent un petit groupe homogène qui se range très naturellement dans le troisième type, à côté des Lépidoptères.

On trouvera ci-dessous le résumé des observations parfaitement exactes de Rathke sur les Panorpes, seuls Névroptères vrais dont les mouvements de respiration aient fait, jusqu'à présent, l'objet d'un examen.

§ LXXXVII.

Panorpa communis.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

L'abdomen des Panorpes femelles se compose, on le sait, de six segments cylindriques assez larges, suivis de trois segments plus étroits, formant une sorte de queue ou de pondoir très mobile. Les mouvements respiratoires vrais ayant lieu seulement dans la partie élargie, je n'insisterai que sur la structure de cette portion. Les arceaux tergaux et sternaux sont ici séparés, le long des flancs, par une zone molle d'une grande hauteur, offrant quelques plis irréguliers, mais sensiblement plane durant la phase inspiratoire ou de repos.

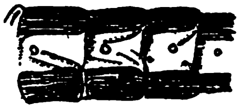


Fig. 55 × 7. *Panorpa communis* ♀. Surfaces extérieures des somites 2, 3, 4 et 5, de l'abdomen.

Rathke[1], qui a étudié les mouvements respiratoires des Panorpes, les caractérise très nettement en quelques mots, en disant que la membrane unissante se déprime un peu en expiration pour les premiers anneaux de l'abdomen et qu'en même temps le diamètre vertical de cette région du corps diminue.

Pour ma part, j'ai cru un moment à l'impossibilité d'employer les Panorpes dans l'appareil à projection, ces animaux fixés, imprimant à leur long abdomen flexible des mouvements continuels d'une grande énergie; mais, me rappelant que les mouvements respiratoires continuent avec assez de régularité chez les insectes décapités, j'ai enlevé la tête aux Panorpes en expérience et j'ai pu alors suivre très facilement les déplacements expiratoires et inspiratoires.

Les conditions expérimentales sont donc : insecte décapité, fixé par les ailes; abdomen libre; grossissement 12.

Les mouvements respiratoires ont lieu comme Rathke les a décrits et je n'ai à y ajouter que quelques détails.

La zone molle des flancs se déprime, en expiration, pour les somites 2, 3, 4 et faiblement pour le somite 5. La silhouette de la face sternale de l'abdomen indique nettement des diminutions dans le diamètre transversal des anneaux que je viens de citer et montre, de plus, que le mouvement est simultané pour tous, qu'il n'y a pas d'onde. Pendant ce temps, les plaques sternales se soulèvent; comme ce mouvement a surtout lieu pour les premiers anneaux abdominaux, il en résulte que le profil longitudinal de la face inférieure de l'abdomen devient concave et que toute la partie abdominale du corps s'incurve un peu vers le bas.

L'abdomen se relève naturellement de la même quantité en inspiration; de là de petites oscillations rhythmiques avec lesquelles il ne faut pas confondre les mouvements dont je parlais plus haut.

De temps en temps la Panorpe contracte brusquement le premier somite de la partie caudale rétrécie; ce qui détermine un allongement brusque de cette région. Mais ce mouvement spécial est absolument étranger à l'acte respiratoire et, dans la respiration calme et régulière, la longueur de l'abdomen reste sensiblement la même.

[1] RATHKE. *Anatomisch-physiologische Untersuchungen*, etc., op. cit., p. 107.

Digitized by Google

§ LXXXVIII.

Chrysopa vulgaris.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Les anneaux abdominaux se composent d'arceaux tergaux et sternaux à peu près égaux, unis le long des flancs par une bandelette cutanée molle, fort étroite, ne faisant pas saillie au dehors et susceptible de se déprimer en dedans dans la phase expiratoire.

Les deux premiers somites de l'abdomen ont un diamètre notablement plus faible que ceux qui suivent et présentent des parois tégumentaires plus molles. On verra qu'il existe peut-être une relation entre ce détail anatomique et certains mouvements exécutés par les Chrysopes.

L'insecte est suspendu par les ailes qui sont rassemblées au-dessus du thorax et serrées entre une petite plaque de liège et une lamelle de carton. Le grossissement employé est de 11 diamètres environ. Il faut naturellement faire abstraction des oscillations violentes que la Chrysope imprime parfois à son abdomen lorsqu'elle fait des efforts pour se détacher.

Dans une première expérience, l'abdomen est libre et pend presque verticalement; il présente de petits balancements rhythmiques d'une faible amplitude, mais assez accusés cependant pour masquer les changements de diamètre s'il en existe. Les deux seuls faits à noter sont : 1° l'absence d'allongements et de raccourcissements; 2° des mouvements d'abaissement prononcés des faces tergales des somites 1 et 2, séparés par des intervalles de temps beaucoup plus longs que ceux qui séparent les petites oscillations de l'abdomen. J'ai compté de quatre à huit oscillations abdominales entre deux rétrécissements des somites de la base.

Ce premier essai montre la nécessité de soutenir l'extrémité de l'abdomen si l'on veut obtenir des résultats quelque peu nets. On recommence donc en faisant reposer, cette fois, le septième segment sur une épingle pliée à angle droit. Il est aisé de constater, dans ces nouvelles conditions, qu'il existe des augmentations et des diminutions alternatives et rhythmiques du diamètre

Digitized by Google

vertical de la plupart des somites. L'abdomen s'abaisse légèrement lors de chaque contraction.

L'examen de l'animal à la loupe montre aussi des mouvements rhythmiques de rentrée et de sortie des flancs et je suis disposé à croire, sans pouvoir l'affirmer cependant d'une façon absolue, que les augmentations du diamètre vertical sur les silhouettes répondent aux dépressions des flancs et, par conséquent, à l'expiration. Ce fait permettrait, malgré des différences assez importantes, de rapprocher les mouvements respiratoires des Chrysopes de ceux des Libellules.

J'ajouterai que les segments thoraciques semblent immobiles, que la longueur de l'abdomen ne varie pas et enfin que les mouvements de respiration paraissent progressifs. Il existerait donc une onde.

Quant aux mouvements amples et espacés des arceaux tergaux des deux premiers somites abdominaux, je les ai réobservés lorsque l'abdomen était soutenu, et je les ai même étudiés directement à la loupe, mais cet examen ne m'a rien appris quant à leur rôle.

§ LXXXIX.

Sialis lutaria.

(Étude des mouvements respiratoires par la méthode des projections.)

Les anneaux abdominaux des *Sialis* ont une structure typique : les arceaux tergaux et sternaux, de dimensions à peu près égales, ne chevauchent point l'un sur l'autre et sont réunis, à la hauteur des flancs, par une zone membraneuse à découvert, portant les stigmates et marquée de plis longitudinaux.

La forme et le mode d'implantation des ailes ne m'ont pas permis de fixer l'insecte par les organes du vol; j'ai donc été obligé d'enlever les ailes et les pattes et d'enfiler l'animal sur une épingle traversant la région antérieure du thorax. L'abdomen a été laissé libre; le grossissement employé était de 12 diamètres (fig. 76, pl. VII).

Digitized by Google

Comme beaucoup d'insectes placés dans ces conditions, la *Sialis lutaria* exécute deux espèces de mouvements : 1° de fortes incurvations de l'abdomen n'ayant rien de commun avec les mouvements respiratoires; 2° des mouvements respiratoires vrais. Ces derniers consistent essentiellement en rapprochements et écartements des arceaux tergaux et sternaux, déterminant des diminutions et des augmentations alternatives du diamètre vertical.

Quelques détails sont à noter :

1° Les segments thoraciques postérieurs restent immobiles;

2° Les plus grands déplacements verticaux des arceaux dorsaux et sternaux ont lieu vers le milieu de la longueur de l'abdomen, au niveau des somites 4, 5; la diminution du diamètre vertical en expiration est de $^1/_{10}$. Les deux derniers somites abdominaux ne participent pas à ces modifications;

3° Pendant la phase expiratoire, l'extrémité de l'abdomen se relève un peu;

4° Les mouvements respiratoires sont progressifs. Ainsi, par exemple, l'expiration est presque terminée dans les somites 4, 5, alors qu'elle commence dans le somite 6;

5° Malgré la forme allongée de l'abdomen, il n'existe aucun déplacement dans le sens longitudinal; la longueur ne varie pas.

§ XC.

Muscles respiratoires de la Sialis lutaria.

Les mouvements respiratoires des Phryganes (page 157) diffèrent profondément de ceux que nous venons d'étudier chez les Sialis.

De pareilles dissemblances dans le mécanisme respiratoire, alors qu'il existe incontestablement beaucoup d'analogie dans la structure des somites abdominaux, ne peuvent s'expliquer que par des différences notables dans la disposition des muscles; aussi, malgré les difficultés pratiques de la dissection, ai-je tenu à mettre sous les yeux du lecteur des figures exactes des muscles respiratoires des deux types à comparer (fig. 44 et fig. 56).

Digitized by Google

Comme il est facile de le constater, le système musculaire des Sialis ressemble à celui des Coléoptères, des Blattes et des Lépidoptères à disposition simple. Outre des muscles longitudinaux dorsaux et sternaux, il existe des muscles expirateurs α à peu près verticaux, croisant la zone molle des flancs et reliant chaque arceau tergal à l'arceau sternal correspondant. Ces muscles caractéristiques, que je n'ai pas trouvés chez les Phryganes, sont évidemment les seuls agents actifs dans le rapprochement des arceaux de l'abdomen et dans la diminution du diamètre vertical de celui-ci. J'ai inutilement cherché des traces de muscles inspirateurs; l'inspiration est donc, encore une fois, passive.

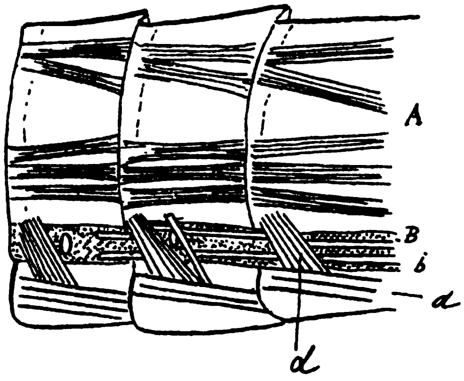


Fig. 56 × 20. — *Sialis lutaria.*
Muscles de la moitié droite de l'abdomen.
A, *B* Muscles longitudinaux dorsaux.
a, *b* Muscles longitudinaux sternaux.
α Muscles expirateurs verticaux.

CHAPITRE VIII.

RÉSUMÉS ET CONCLUSIONS.

Je résume ci-dessous l'ensemble des résultats de mes recherches. Les uns sont des faits nouveaux; les autres sont la confirmation de faits déjà connus, mais qui demandaient à être vérifiés à l'aide de méthodes rigoureuses.

§ XCI.

Relation entre la structure anatomique et la forme des mouvements respiratoires. Mouvements abdominaux et mouvements thoraciques.

1° Il n'existe point de relation étroite entre la forme des mouvements respiratoires d'un insecte et la place occupée par celui-ci dans les classifications zoologiques. Les mouvements respiratoires ne sont analogues que lorsque la structure des anneaux abdominaux et surtout la disposition des muscles qui les meuvent sont à peu près les mêmes.

L'importance de la disposition musculaire est prépondérante et la similitude dans la direction et l'insertion des muscles paraît suffire pour déterminer une ressemblance dans les mouvements de respiration.

Comme exemples de la proposition ci-dessus, on peut citer les *Blattes* que leurs mouvements respiratoires font mettre à côté des Hémiptères hétéroptères, les *Phryganes* qu'il faut distraire des Névroptères propres pour les ranger à la suite des Hyménoptères porte-aiguillon, les *Locustiens* que j'ai dû détacher des Orthoptères pour les rapprocher des Lépidoptères et des Névroptères;

2° Les mouvements respiratoires des insectes (au repos) sont localisés dans l'abdomen de ces animaux (confirmation d'une observation déjà ancienne

Digitized by Google

que V. Graber [1] a pittoresquement rappelée, en disant que les insectes ont la poitrine placée à la partie postérieure du corps). S'il existe des mouvements respiratoires thoraciques, ceux-ci ne proviennent point de l'action de muscles particuliers; ils n'ont lieu que par entraînement ou comme conséquence des mouvements de certaines parties des somites abdominaux;

3° Dans le plus grand nombre des cas, les segments thoraciques ne participent pas aux mouvements respiratoires chez l'insecte posé. Les déplacements respiratoires des segments postérieurs du thorax sont, cependant, moins rares que ne le croyait Rathke. Je les ai observés chez les formes suivantes :

TABLEAU I.

A. Faces tergales des anneaux thoraciques se déplaçant *dans le même sens* que les arceaux tergaux de l'abdomen (abaissement en expiration).

Mouvements très nets.

	Méso-thorax.	Méta-thorax.
Staphylinus pubescens	..	+
— caesareus	+	+
— olens	+	+
Chlorophanus viridis	..	+
Corymbites latus	+	+

Mouvements plus faibles.

	Méso-thorax.	Méta-thorax.
Hydrophilus piceus	+	+
Carabus auratus	..	+
Tenebrio molitor	..	+

B. Faces tergales des anneaux thoraciques se déplaçant *en sens inverse* des arceaux tergaux de l'abdomen (ascension en expiration).

	Méso-thorax.	Méta-thorax.	
Melolontha vulgaris	+	+	Mouvement de bascule en avant.
Periplaneta orientalis	+	+	

C. Faces sternales des anneaux thoraciques participant aux mouvements respiratoires.

	Méso-thorax.	Méta-thorax.
Forficula auricularia	..	+
Periplaneta orientalis	+	+

Plus de quarante autres formes appartenant à des groupes très divers, examinées à ce point de vue spécial, ne m'ont offert aucun mouvement respiratoire thoracique méritant la peine d'être signalé.

[1] Graber. *Die Insekten*, op. cit., 1 Theil, p. 107.

§ XCII.

Diminution du diamètre vertical de l'abdomen en expiration.

4° Si l'on néglige tous les détails et toutes les exceptions, les mouvements respiratoires des insectes consistent en diminutions et rétablissements alternatifs de l'ensemble des *deux* diamètres vertical et transversal de l'abdomen [1].

La diminution des diamètres en question répond à l'expiration; le retour de ces diamètres à leurs dimensions premières répond à l'inspiration.

La diminution expiratoire du diamètre transversal (vulgairement rentrée des flancs), souvent faible, peut être tellement minime qu'elle passe inaperçue. D'un autre côté, la diminution, en expiration, du diamètre vertical, généralement très nette, *existe toujours* [2].

Le tableau suivant renferme les valeurs relatives de la diminution expiratoire du diamètre vertical, mesurées sur les silhouettes.

TABLEAU II.

Diminution du diamètre vertical de l'abdomen en expiration.

A. Diminution très marquée comprise entre $^1/_5$ et $^1/_{10}$.

	Valeur de la diminution.	Région du corps où la mesure a été prise.
Stenobothrus variabilis	$^1/_5$	4e somite abdominal.
Libellula quadrimaculata.	$^1/_7$	Région moyenne de l'abdomen.
Melolontha vulgaris	$^1/_6$ à $^1/_7$	3e somite abdominal.
Hydrophilus piceus	$^1/_7$ à $^1/_9$	2e somite —
Cicindela hybrida	$^1/_7$ à $^1/_{10}$	2e somite —
Periplaneta orientalis.	$^1/_8$	Entre les somites 2 et 3.
Eristalis tenax	$^1/_9$	2e somite.

[1] L'axe du corps étant horizontal, comme chez l'insecte posé.

[2] Elle peut être, mais très rarement, masquée sur les silhouettes par la formation de plis saillants, etc.

Digitized by Google

B. Diminution de valeur moyenne comprise entre $^1/_{10}$ et $^1/_{20}$.

	Valeur de la diminution.	Région du corps où la mesure a été prise.
Chlorophanus viridis	$^1/_{10}$	3e et 4e somites abdominaux.
Corymbites latus	$^1/_{10}$	3e somite abdominal.
Oryctes nasicornis	$^1/_{10}$	3e somite —
Chrysis ignita	$^1/_{10}$	1er somite apparent.
Asilus	$^1/_{10}$	2e somite abdominal.
Phryganea striata	$^1/_{10}$	4e et 5e somites abdominaux.
Sialis lutaria	$^1/_{10}$	4e somite abdominal.
Onthophagus nuchicornis	$^1/_{11}$	4e somite —
Crioceris merdigera	$^1/_{11}$	3e somite —
Stethophyma grossum	$^1/_{12}$	3e et 4e somites abdominaux.
Pieris napi	$^1/_{12}$	2e somite abdominal.
Decticus verrucivorus	$^1/_{13}$	3e somite —
Staphylinus pubescens	$^1/_{15}$	Limite entre le méso- et le métathorax.
Tipula gigantea	$^1/_{15}$	3e somite abdominal.
Syrphus ribesii	$^1/_{15}$	2e et 3e somites (en expiration active).
Arctia menthastri	$^1/_{15}$	3e somite abdominal.
Tenebrio molitor	$^1/_{16}$	2e et 3e somites abdominaux.
Euchelia jacobaeae	$^1/_{16}$	4e et 5e somites —
Calliphora vomitoria	$^1/_{17}$	2e somite abdominal.
Clytus arietis	$^1/_{18}$	3e somite —
Colymbetes fuscus	$^1/_{18}$ à $^1/_{20}$	2e et 4e somites abdominaux.
Trichius abdominalis	$^1/_{20}$	3e somite abdominal.
Forficula auricularia	$^1/_{20}$	1er somite — (avec doute).

C. Diminution très faible en dessous de $^1/_{20}$.

Staphylinus caesareus	$^1/_{20}$ à $^1/_{30}$	2e somite abdominal.
Dytiscus marginalis	$^1/_{22}$	3e somite —
Staphylinus olens	$^1/_{23}$	Métathorax.
Donacia simplex	$^1/_{25}$	2e somite abdominal.
Tabanus bovinus	$^1/_{25}$	2e et 3e somites abdominaux.
Carabus auratus	$^1/_{26}$	4e somite abdominal.
Chrysomela staphylea	$^1/_{30}$	2e somite —
Nepa cinerea	$^1/_{34}$	2e somite —
Anthophora retusa	$^1/_{37}$	3e somite —
Apis mellifica	$^1/_{40}$	Vers le 4e somite abdominal.
Vespa germanica	$^1/_{45}$	Avec doute.
Bombus muscorum	$^1/_{59}$	Difficile à mesurer exactement.
Triphaena pronuba	$^1/_{60}$	3e et 4e somites abdominaux.
Sesia apiformis	$^1/_{95}$	5e somite abdominal (avec doute).

La valeur de la diminution du diamètre vertical en expiration n'a pu être déterminée, pour des motifs divers, chez *Scatophaga stercoraria, Panorpa communis, Triphaena fimbria* et *Pygaera bucephala*. D'un autre côté, par

Digitized by Google

suite de causes qui ont été exposées dans les chapitres précédents, le diamètre vertical semble exceptionnellement augmenter chez *Chrysopa vulgaris* de $^1/_6$, *Coccinella septempunctata* de $^1/_9$ et *Telephorus fuscus* de $^1/_{30}$.

§ XCIII.

Types respiratoires; changements de longueur de l'abdomen.

5° Bien que la diminution expiratoire du diamètre vertical s'effectue constamment par le rapprochement des arceaux tergaux et sternaux des somites de l'abdomen, on a constaté, depuis longtemps, entre les formes des mouvements respiratoires des insectes, des différences déterminées par la structure des somites et par la disposition des muscles qui en meuvent les diverses parties. J'ai admis *trois types* respiratoires principaux reliés les uns aux autres par quelques transitions (voir pour la description de ces types et les subdivisions qu'ils comportent, le chapitre III, § IX, pages 27 à 33).

6° Contrairement à une opinion ancienne, les changements de longueur de l'abdomen, dans la respiration normale, par suite de la sortie et de la rentrée des somites les uns dans les autres, sont rares chez les insectes. Ces mouvements longitudinaux ne s'observent, dans tout l'ensemble d'un groupe, que chez les Hyménoptères porte-aiguillon. Dans les autres subdivisions zoologiques, on peut en rencontrer quelques exemples isolés.

J'ai réuni, sous forme de tableau, les noms des insectes chez lesquels j'ai observé des changements respiratoires dans la longueur de la région abdominale, ainsi que la valeur de ces changements. Cette valeur est indiquée en fractions de la longueur de l'abdomen.

TABLEAU III.

A. Raccourcissement de l'abdomen en expiration.

1° Hyménoptères porte-aiguillon.

Apis mellifica (excitée).	$^1/_8$ de la longueur de l'abdomen.
— (calme).	$^1/_{36}$ — —
Vespa germanica	$^1/_{14}$ — —
Bombus muscorum.	$^1/_{17}$ — —
— terrestris	$^1/_{24}$ — —
Anthophora retusa	$^1/_{42}$ — —

Digitized by Google

2° Autres Insectes.

Phryganea striata	$^1/_{50}$	de la longueur de l'abdomen.	
Cicindela hybrida	$^1/_{40}$	—	—
Sesia apiformis	$^1/_{65}$	—	—
Oryctes nasicornis	$^1/_{80}$	—	—

B. Allongement de l'abdomen en expiration.

Eristalis tenax	$^1/_{20}$	de la longueur de l'abdomen.	
Coccinella septempunctata	$^1/_{25}$	—	—
Stenobothrus variabilis	$^1/_{30}$	—	—
Periplaneta orientalis	$^1/_{30}$	—	—
Euchelia jacobaeae	$^1/_{36}$	—	—
Syrphus ribesii	$^1/_{36}$	—	— (en respiration très active).
Arctia menthastri	$^1/_{60}$	—	—
Decticus verrucivorus	$^1/_{113}$	—	— (avec doute; valeur négligeable).

L'abdomen conserve une longueur invariable chez plus de quarante autres formes que j'ai étudiées à ce point de vue.

§ XCIV.

Mouvements respiratoires progressifs.

7° Les naturalistes qui se sont occupés des mouvements respiratoires des Arthropodes, ont cru constater que, chez beaucoup d'insectes, ces mouvements étaient progressifs et se propageaient comme une onde, soit de la base de l'abdomen vers la pointe, soit du milieu vers les deux extrémités.

Cette onde est, au contraire, un phénomène exceptionnel. Elle paraît faire défaut dans des groupes entiers et n'apparaît dans d'autres que pour des formes isolées.

TABLEAU IV.

Sur 63 insectes appartenant à tous les ordres principaux, je n'en ai rencontré que 9 dont les mouvements expiratoires aient lieu d'une manière progressive. Ce sont :

Tenebrio molitor [1].	Sialis lutaria.
Decticus verrucivorus.	Chrysopa vulgaris.
Nepa cinerea.	Pieris napi.
Tipula gigantea.	Sesia apiformis.
Asilus.	

[1] Dans ma communication préliminaire, j'ai dit à tort, page 11 (6°), que l'onde manquait chez *tous* les Coléoptères.

Digitized by Google

Quelques faits me paraissent devoir diminuer encore l'importance qu'on a voulu donner au phénomène de l'onde : ainsi, chez certains insectes, l'onde n'est pas constante; on observe, à de courts intervalles, tantôt des mouvements expiratoires progressifs, tantôt des mouvements expiratoires simultanés.

Je crois aussi, mais sans oser l'affirmer, le nombre de mes observations étant insuffisant, que l'onde existe parfois chez les femelles chargées d'œufs, alors qu'elle est absente chez les mâles, ce qui semblerait indiquer qu'elle peut, dans certains cas, être déterminée par une gêne dans le jeu des arceaux de quelques somites abdominaux (voyez § XXII, page 66, *Abax striola*).

§ XCV.

Pauses et arrêts.

8° La conclusion suivante demande quelques explications quant aux termes.

Avec tous les physiologistes, j'appelle *pause* le repos de courte durée qui, chez certains animaux, marque régulièrement la fin soit des inspirations, soit des expirations. La pause inspiratoire ou expiratoire se répète donc d'une façon régulière et avec des durées sensiblement égales. Mais il existe des animaux chez lesquels, *à l'état normal,* la série des mouvements respiratoires réguliers est complètement interrompue, à des intervalles égaux ou variables, par de *longs repos* en inspiration ou en expiration. Ce phénomène, assez différent du précédent, doit évidemment porter un autre nom. J'appelle *arrêt* [1] l'interruption qui peut ainsi se présenter normalement dans les mouvements respiratoires.

1 Terme employé, mais d'une façon passagère, par Paul Bert. *Leçons sur la physiologie comparée de la respiration*, p. 308. Paris, 1870.

Digitized by Google

Ceci dit, voici ce que j'ai observé chez les insectes :

TABLEAU V.

A. Les *pauses* ou les *arrêts* ont toujours lieu en *inspiration*, jamais en expiration.
B. Une *pause* termine chaque mouvement inspiratoire chez les formes suivantes :

Hydrophilus piceus (calme).	Periplaneta orientalis.
Melolontha vulgaris (épuisé et seulement dans ce cas).	Libellula quadrimaculata.
Colymbetes fuscus.	Aeschna grandis.
Crioceris merdigera.	Calliphora vomitoria.
Decticus verrucivorus.	Syrphus ribesii.
	Eristalis tenax.

C. Des *arrêts* plus ou moins longs, en inspiration, interrompent la série des mouvements respiratoires chez les insectes ci-dessous :

Dytiscus marginalis (en liberté).	Forficula auricularia.
Melolontha vulgaris.	Pieris napi.
Geotrupes sylvaticus.	Sesia apiformis.
Tenebrio molitor.	Triphaena pronuba.
Corymbites latus.	Arctia menthastri (au début des observations seulement).
Chlorophanus viridis.	Tabanus bovinus.
Stethophyma grossum.	Eristalis tenax.
Stenobothrus variabilis.	Asilus.
Decticus verrucivorus.	

Ces listes, qu'il serait facile d'allonger encore, montrent que des pauses ou des arrêts en inspiration caractérisent la respiration d'un grand nombre d'insectes.

Il peut être intéressant de rapprocher de ces faits ce qui a été observé chez les Vertébrés. D'après les expériences de Paul Bert [1], il n'existe à l'état normal [2], ni pauses ni arrêts chez les Oiseaux et les Mammifères [3]; mais la respiration des Reptiles vrais est marquée tantôt par de longs arrêts en inspiration (Caïman) ou en demi-expiration (Tortues), tantôt par des pauses inspiratoires régulières et longues (Serpents).

[1] Paul Bert. *Leçons sur la physiologie comparée de la respiration*, op. cit., pp. 286 et suiv. et p. 335.

[2] Il faut nécessairement faire abstraction des cas spéciaux, tels que la respiration très lente et très profonde qui, chez l'homme, présente toujours une pause, etc.

[3] Marey a démontré le fait pour l'homme. *Du mouvement dans les fonctions de la vie*, p. 164. Paris, 1868. *Pneumographie* (Journal d'anatomie et de physiologie de Ch. Robin, t. II, p. 431, 1865).

Digitized by Google

§ XCVI.

VITESSE DE L'EXPIRATION ET DE L'INSPIRATION. — PHASE ACTIVE ET PHASE PASSIVE.

9° Chez les insectes assez vigoureux pour fournir des graphiques convenables, tels que de grands Coléoptères, des Libellules, des Locustiens, etc., on constate que l'inspiration est ordinairement plus lente que l'expiration et que ce dernier mouvement est souvent brusque (confirmation, par la méthode graphique, d'une ancienne observation directe faite par W. Sorg sur le *Lucanus cervus* (1805).

Les insectes nous offrent donc, à cet égard, un phénomène inverse de celui qui existe chez les Vertébrés à respiration aérienne. Chez ces derniers, en effet, c'est l'expiration qui se trouve être, en général, plus lente que l'inspiration. Paul Bert a constaté, pour le Canard, que les rapports de temps entre les durées de l'expiration et de l'inspiration sont environ comme 12 est à 9 [1].

Cette différence curieuse entre les mouvements respiratoires des insectes et ceux des Vertébrés pulmonés s'explique parfaitement par les conclusions suivantes, 10° et 11°.

10° Chez la plupart des insectes l'expiration est seule active; l'inspiration est passive et a lieu sous l'influence de l'élasticité des téguments et des parois trachéennes (confirmation de plusieurs observations antérieures [2]).

§ XCVII.

MUSCLES RESPIRATOIRES.

11° Le plus grand nombre des insectes ne possède que des muscles expirateurs. J'ai trouvé des muscles aidant à l'inspiration, non seulement chez les Hyménoptères porte-aiguillon et les Acridiens, chez lesquels ils avaient été

[1] Voyez, à ce sujet, les graphiques publiés par Paul Bert dans l'ouvrage cité plus haut : p. 283, Grenouille ; p. 304, Lézard ; p. 305, Caïman ; p. 319, Canard.

[2] C'est absolument le contraire de ce qui se passe chez les Vertébrés supérieurs; ainsi, chez l'homme « *l'inspiration est essentiellement active*, musculaire... l'expiration *ordinaire* est » produite uniquement par l'élasticité pulmonaire (et thoracique) et sans intervention mus- » culaire ». H. BEAUNIS. *Nouveaux éléments de physiologie humaine*, t. II, p. 921. Paris, 1881.

Digitized by Google

indiqués par Rathke et Graber, mais, de plus, chez les Phryganes parmi les Névroptères.

Les muscles respiratoires des Articulés trachéates ont été peu étudiés et n'ont, du reste, jamais été examinés sérieusement d'une façon comparative. Il y aurait donc un grand intérêt à traiter spécialement ce point d'anatomie comparée.

Malheureusement, mes dissections, suffisantes pour compléter le présent Mémoire, ne sont pas assez nombreuses pour les faire servir de bases à un travail morphologique. J'utiliserai donc mes matériaux tels quels, en me bornant, pour le moment, à faire ressortir les passages graduels existant entre les types que j'ai pu analyser et en négligeant, *à dessein*, toute comparaison avec ce qui existe chez les Trachéates inférieurs et chez les larves [1].

1re CATÉGORIE [2].

Des muscles expirateurs seulement.

1er *Cas.* — La disposition la plus simple est celle que nous offrent quelques Diptères, la *Calliphora vomitoria* (fig. 35) et l'*Eristaris tenax* (fig. 36).

Les muscles dorsaux et sternaux déterminant les mouvements généraux de l'abdomen sont représentés par des nappes musculaires continues, ou à peu près *A*, *a* à fibres longitudinales. Les *muscles expirateurs* sont, de

[1] J'ai, il est vrai, étudié très soigneusement les Mémoires de Lyonet, Newport, Cornalia, Rathke, Künckel d'Herculais et Scudder dans les passages qui traitent des muscles des Chenilles ou des Larves, ceux de Kutorga et de Voges sur les muscles des Scolopendres et des Jules, enfin les recherches de Wasmann et d'Émile Blanchard sur les muscles des Scorpions, des Télyphones, des Phrynes, des Phalangides et des Mygales, mais, pour des travaux comparatifs sérieux, chacun sait qu'il ne faut jamais se contenter des figures et des descriptions, qu'il est indispensable de refaire les dissections soi-même; c'est ce que je me propose d'effectuer un jour, afin d'arriver à établir les premiers jalons d'une myologie comparée des Arthropodes.

[2] Il est absolument impossible, dans un résumé, de revenir de nouveau sur les travaux de mes prédécesseurs. On trouvera dans le corps même du Mémoire, l'indication exacte de ce qui revient à chacun en fait de descriptions de muscles.

Digitized by Google

même, constitués par une nappe musculaire *a* à fibres *verticales*, reliant les plaques sternales aux arceaux tergaux, en passant sur la zone molle élastique qui unit les éléments squelettiques des somites.

II[e] *Cas.* Quelques Lépidoptères, *Pygaera bucephala,* par exemple (fig. 53). — Les muscles dorsaux et sternaux qui amènent les mouvements généraux de l'abdomen ne sont plus de simples nappes; ils sont différenciés en faisceaux longitudinaux distincts *A, a.* Les muscles expirateurs sont encore représentés par une nappe musculaire à fibres verticales, recouvrant la zone molle élastique des flancs.

Légère déviation du cas précédent. Smerinthus tiliœ (fig. 54), autres Sphingides et *Arctia menthastri.* — Disposition voisine; seulement le système des muscles dorsaux présente une petite complication : des faisceaux D à direction très oblique s'ajoutent aux faisceaux longitudinaux et naissent d'espèces d'apodèmes que présente le bord antérieur de la zone molle de chaque somite. Ces faisceaux obliques jouent, peut-être, un certain rôle dans l'expiration.

III[e] *Cas.* (Disposition très fréquente.) — Les *muscles expirateurs a,* à fibres verticales, cessent d'être constitués par de simples nappes de fibres; ce sont, actuellement, des faisceaux distincts, plus ou moins étroits, se répétant de somite en somite et d'autant plus distants les uns des autres que les arceaux sternaux sont plus longs [1]. *Tabanus bovinus* (fig. 39), *Sialis lutaria* (fig. 56),

[1] Le passage suivant, extrait d'un des ouvrages d'Émile Blanchard, est ici entièrement applicable. L'auteur, qui n'a en vue que la musculature générale et non les muscles respiratoires en particulier, s'exprime ainsi : « En examinant les muscles d'une manière comparative chez des espèces appartenant aux principaux groupes de la classe des insectes, des dissemblances très grandes en apparence s'offrent aux yeux de l'observateur; mais bientôt à son attention se révèle l'existence d'un fonds commun dont les éléments tantôt se séparent ou se confondent, tantôt prennent un développement considérable ou s'amoindrissent à l'extrême. *Les muscles deviennent plus nombreux si les mouvements doivent être très variés; seulement on arrive à reconnaître que l'accroissement du nombre des muscles est dû à de simples divisions. Les fibres se partagent en deux ou trois faisceaux ou même davantage, au lieu d'être réunies en une seule masse.* » (MÉTAMORPHOSES, MOEURS ET INSTINCTS DES INSECTES, p. 78. Paris, 1868.)

Digitized by Google

Agrion sanguineum (fig. 32), *Periplaneta orientalis* (fig. 30) et un grand nombre de Coléoptères : *Melolontha vulgaris* (fig. 24), *Oryctes nasicornis* (fig. 21), *Clytus arietis* (fig. 27), etc.

Légère déviation du cas précédent. — La disposition générale est la même; la seule différence consiste dans ce fait que les muscles expirateurs verticaux, au lieu d'être composés chacun d'un seul faisceau, sont constitués soit par deux faisceaux divergents, soit par deux faisceaux croisés α, β. On peut citer, comme exemples, le *Dytiscus marginalis* (fig. 19) et l'*Hydrophilus piceus* (fig. 16).

IV^e^ *Cas.* — Disposition analogue à celle du III^e^; mais les muscles dorsaux sont, en grande partie, décomposés en faisceaux obliques D, E, qui se croisent sous des angles plus ou moins aigus. (*Forficula auricularia,* fig. 45; *Staphylinus olens,* fig. 26.)

V^e^ *Cas.* — Les muscles longitudinaux et les muscles expirateurs verticaux sont encore disposés comme dans le III^e^ cas. De petits muscles expirateurs transversaux γ sont venus s'y ajouter. Placés en échelons au-dessus de la chaîne nerveuse, ils relient, de droite à gauche, les zones élastiques des flancs. (*Decticus verrucivorus,* fig. 51.)

2^e^ CATÉGORIE.

Des muscles expirateurs et des muscles inspirateurs.

Les muscles inspirateurs ont, en général, une direction verticale et leur présence complique ordinairement beaucoup la musculature de l'abdomen.

VI^e^ *Cas. Acridiens.* — Les muscles dorsaux et sternaux qui déterminent les mouvements généraux sont très simples et se composent de faisceaux longitudinaux.

Les muscles *expirateurs* α, β (fig. 47), encore verticaux, sont évidem-

Digitized by Google

ment, malgré la dimension de l'un d'entre eux α, les homologues des expirateurs simples ou doubles, parallèles ou croisés, des Coléoptères, des Odonates, des Blattes, etc. (voyez III^e^ cas).

Les *inspirateurs* apparaissent comme muscles nouveaux. L'*inspirateur principal 3* est exactement antagoniste de l'expirateur principal, mais moins développé. L'*inspirateur accessoire 4,* dont l'action est plus douteuse, semble, par suite de sa direction oblique, devoir faire basculer, en arrière, l'apodème saillant du bord antérieur de l'arceau sternal. (*Stethophyma grossum,* fig. 47.)

VII^e^ *Cas. Hyménoptères porte-aiguillon.* — On sait que chez ces animaux l'expiration est toujours accompagnée d'un raccourcissement de l'abdomen. Une portion ou la totalité des muscles dorsaux et sternaux ordinaires est détournée de sa destination primitive. Ces muscles jouent le rôle d'*expirateurs.* D'un autre côté, les expirateurs verticaux α, β, si constants chez les autres insectes (Acridiens, Coléoptères, Blattes, Odonates, Lépidoptères, etc.), ont disparu.

Les muscles *inspirateurs* servent, les uns à écarter les arceaux sternaux des arceaux dorsaux, les autres à rendre à l'abdomen sa longueur primitive. L'*inspirateur 3,* qui écarte les arceaux et augmente, par suite, le diamètre vertical, est l'homologue de l'inspirateur principal des Acridiens. Les *inspirateurs* déterminant l'allongement de l'abdomen manquent chez les Acridiens et sont, par suite, ici des muscles nouveaux *1, 2.* Leur disposition et leur action, que j'ai décrites (page 145), sont fort caractéristiques. Situés par paires formées d'un faisceau dorsal et d'un faisceau sternal, très légèrement obliques et reliant chacun le bord postérieur d'un arceau à l'angle antérieur saillant de l'arceau suivant, ils produisent, par leur action simultanée, un léger recul des somites, les uns par rapport aux autres. (*Vespa germanica,* fig. 40; *Bombus terrestris,* fig. 41.)

VIII^e^ *Cas* (*Phryganiens*). — Plus ou moins analogue au précédent. On retrouve encore une partie des muscles généraux dorsaux et sternaux *D, e,* à l'état de faisceaux obliques expirateurs et on constate la présence de mus-

Digitized by Google

cles inspirateurs 1 et 2 homologues de ceux qui, chez les Hyménoptères, amènent l'allongement de l'abdomen. (*Phryganea striata*, fig. 44.)

12° Les diaphragmes supérieur (anciennement ailes du cœur) et inférieur des Hyménoptères porte-aiguillon n'ont pas, dans le mécanisme respiratoire, le rôle que Wolff leur attribue (fig. 43).

§ XCVIII.

MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ABDOMEN.

13° Un grand nombre d'insectes, peut-être tous, impriment à leur abdomen des mouvements généraux, tantôt faibles, tantôt très amples, qui ne coïncident pas avec les mouvements respiratoires proprement dits et qu'il importe d'en distinguer.

§ XCIX.

INFLUENCE DU SYSTÈME NERVEUX.

14° Les mouvements respiratoires abdominaux des insectes sont des mouvements purement *réflexes* [1]. Il résulte, en effet :

A. Des expériences de Straus-Durckheim sur la Mouche commune, de Faivre sur le Dytique, de Barlow sur les *Libellula vulgata, L. depressa* et sur le Grillon, de Baudelot sur des Libellules, de Langendorff sur des Libellules, sur des Hyménoptères et sur le Hanneton; enfin, de mes expériences personnelles sur les *Hydrophilus piceus, Dytiscus marginalis, Carabus auratus, Oryctes nasicornis, Geotrupes sylvaticus, Libellula quadrimaculata, Forficula auricularia* et *Panorpa vulgaris,* que les mouvements respiratoires persistent chez l'insecte décapité, ou, ce qui revient au même, chez l'insecte dont on a détruit soit les ganglions cérébroïdes, soit les connectifs reliant les ganglions céphaliques au reste de la chaîne;

[1] Des physiologistes préféreraient peut-être me voir employer l'expression de *mouvements automatiques*. Je n'ai point la compétence nécessaire pour entamer une discussion à cet égard. Si j'en juge par ce que disent les traités récents, la plupart des prétendus mouvements automatiques des Vertébrés, tels, par exemple, que les mouvements respiratoires, sont en réalité des mouvements réflexes.

Digitized by Google

B. Des expériences de Barlow, de Baudelot et de Langendorff sur les Libellules et des miennes sur les *Bombus terrestris, Stethophyma grossum, Stenobothrus variabilis, Libellula quadrimaculata, Aeschna grandis* que, chez les insectes dont le système nerveux est peu condensé, les mouvements de respiration continuent dans l'abdomen entièrement isolé, ou dans l'abdomen dont la chaîne nerveuse a été sectionnée au niveau de l'un des premiers somites;

C. Des expériences de Barlow, de celles de Langendorff et de celles effectuées par moi-même sur les Libellules que toutes les causes extérieures qui augmentent l'activité respiratoire chez l'insecte intact ont exactement la même influence, soit sur l'animal privé de ses centres nerveux antérieurs, soit sur l'abdomen isolé, soit même sur des tronçons de l'abdomen.

L'action de la chaleur est particulièrement facile à constater et je citerai, à cet égard, une de mes observations. La température de la portion de l'appareil à projection dans laquelle j'introduis les insectes est supérieure de 6° à la température de l'air de l'appartement. Je décapite une Libellule et je compte 34 mouvements respiratoires par minute (en moyenne); j'introduis l'animal dans l'appareil et le rhythme respiratoire s'accélère aussitôt; l'abdomen offre 55 mouvements par minute (en moyenne).

On me permettra d'extraire d'un travail récent de A. Guillebeau et L. Luchsinger [1] un passage qui confirme ce qui précède : Arnold a observé que si, après avoir engourdi complètement un insecte en élevant considérablement la température de l'air contenu dans le vase où il est renfermé, on cherche à ranimer l'animal par le refroidissement, on voit réapparaître successivement les réflexes des membres, les *mouvements respiratoires,* puis la possibilité de se retourner après une chute sur le dos, et enfin, tardivement, les manifestations plus élevées d'une volonté consciente.

15° Les ganglions métathoraciques ne sont point, comme le croyait Faivre, des centres respiratoires spéciaux.

1 Guillebeau und Luchsinger. *Fortgesetzte Studien zu einer allgemeinen Physiologie der irritabeln Substanzen. Ein Beitrag zur Kenntniss des Centralmarkes der Annulata Cuvieri.* (Archiv für die gesammte Physiologie von Pflüger, Bd. XXVIII, 1re et 2e partie, p. 1. Bonn, 1882.)

Digitized by Google

On peut avancer comme preuves :

A. Toutes les expériences que je viens de rappeler sous le numéro précédent, expériences qui montrent que les mouvements respiratoires abdominaux des insectes à système nerveux, peu condensé, ont lieu sans l'intervention des ganglions thoraciques;

B. La série des expériences que j'ai effectuées sur les Coléoptères à chaîne demi-condensée, *Hydrophilus piceus, Dytiscus marginalis,* chez lesquels la destruction ou la séparation de la masse métathoracique amène la suppression de quelques ganglions abdominaux antérieurs. Chez ces animaux, on observe alors l'abolition des mouvements respiratoires dans les somites antérieurs de l'abdomen et leur persistance dans les somites postérieurs.

L'arrêt partiel ou total des mouvements respiratoires à la suite de la destruction des centres métathoraciques des Coléoptères résulte simplement de la condensation du système nerveux de ces insectes. Mes expériences sur le Dytique, l'Hydrophile et, surtout, sur l'*Oryctes nasicornis,* tendent, de plus, à prouver que chez les Trachéates à système nerveux condensé, l'excitation d'un point ou la destruction partielle d'une masse nerveuse complexe provenant de la soudure de centres ganglionnaires successifs, produit ses effets sur tous les centres entrant dans la constitution de cette masse [1].

16° Il est presque inutile de rappeler que toutes les expériences sur le système nerveux des Arthropodes ont démontré que chaque ganglion nerveux de la chaîne ventrale est le centre moteur du somite auquel il appartient. C'est ce que Barlow appelle la *Self-sufficiency* des ganglions.

Les Myriapodes constituent, à cet égard, les sujets de recherches les plus intéressants et les plus démonstratifs. Les nombreuses expériences de Newport [2] sur les Jules et sur les Lithobies ont presque épuisé la question. Néanmoins, j'ai soumis moi-même le *Lithobius forficatus* à des essais variés dont

1 Ce résultat demanderait à être confirmé par des expériences nouvelles sur des Articulés de grande taille, des crustacés, par exemple.

2 Newport. *On the structure, relations and developpement of the nervous and circulatory systems and on the existence of a complete circulation of the Blood in Vessels, in Myriapoda and Macrourous Arachnida* (Philos. Transactions, part. II, p. 243, 1843).

Aristote et Dugès ont fait aussi quelques expériences incomplètes sur les Myriapodes.

Digitized by Google

les résultats, encore inédits, sont forts curieux. Je n'en citerai qu'un seul. Une Lithobie est divisée en trois tronçons, comprenant respectivement : le premier, la tête et trois paires de pattes vraies; le deuxième, six paires de pattes; le troisième, six paires également. Ces tronçons sont introduits dans un tube de verre à atmosphère humide. *Cinquante-deux heures* après l'installation de l'expérience, les pattes des trois tronçons présentent encore des mouvements réflexes parfaitement constatés.

17° Bien que les mouvements respiratoires des insectes soient des mouvements réflexes se produisant sans l'intervention des centres nerveux volontaires ou cérébroïdes, ils peuvent évidemment, chez les Articulés intacts, être constamment modifiés par des influences émanant des centres en question. En effet :

A. Toute excitation directe ou indirecte des ganglions cérébroïdes amène une accélération dans les mouvements respiratoires. On a vu que, chez l'*Oryctes*, j'ai obtenu l'excitation directe en piquant les ganglions. Je signalerai, en outre, un cas d'excitation indirecte observé chez un Hydrophile intact : l'insecte exécute 26 mouvements respiratoires par minute; on lui chatouille les antennes avec une aiguille; le nombre des mouvements respiratoires par minute augmente aussitôt; il s'élève à 29;

B. Chaque fois que l'on supprime l'action des ganglions cérébroïdes, soit par la destruction de ces centres seuls, soit par la décapitation, soit en sectionnant la chaine nerveuse ventrale dans sa région antérieure, on observe une modification plus ou moins profonde, tantôt dans le rhythme des mouvements de respiration, tantôt dans leur amplitude, tantôt quant à ces deux caractères à la fois.

L'influence des ganglions cérébroïdes est donc incontestable; malheureusement il est impossible, avec les éléments réunis jusqu'à présent, de décider posivement quelle est sa nature.

Le tableau suivant, sans résoudre la question, permet cependant de supposer que cette action est probablement accélératrice, qu'elle détermine un accroissement de vitesse et un accroissement d'amplitude. (Elle n'est certainement pas coordonnatrice, la suppression des ganglions céphaliques ne produisant pas d'irrégularités; la méthode graphique le prouve.)

Digitized by Google

TABLEAU VI.

OBSERVATEUR.	INSECTES.	OPÉRATION EFFECTUÉE.	EFFET SUR LES MOUVEMENTS RESPIRATOIRES.
Faivre. . . .	Dytique	Section des connectifs entre les ganglions sous-œsophagiens et prothoraciques.	Affaiblissement momentané.
Barlow . . .	Grillon.	Décapitation.	Affaiblissement et ralentissement.
—	Libellule. . . .	Décapitation.	Affaiblissement et ralentissement.
Plateau . . .	Hydrophile . .	Destruction des ganglions cérébroïdes. .	Diminution d'amplitude et ralentissement faible.
—	Dytique	Décapitation.	Diminution d'amplitude, accélération.
—	Dytique	Destruction des ganglions cérébroïdes. .	Diminution d'amplitude, accélération.
—	Carabe.	Décapitation.	Légère diminution d'amplitude.
—	Oryctes	Décapitation.	Diminution d'amplitude après 15 minutes seulement.
—	Oryctes.	Section de la chaîne entre les ganglions méso- et métathoraciques.	Affaiblissement général.
—	Géotrupe. . . .	Décapitation.	Accélération momentanée.
—	Libellule. . . .	Décapitation.	Léger ralentissement.
—	Aeschna	Section de la chaîne à la base de l'abdomen.	Diminution d'amplitude et ralentissement léger.
—	Stethophyma .	Section de la chaîne à la base de l'abdomen.	Ralentissement.
—	Stethophyma .	Destruction des ganglions métathoraciques.	Ralentissement.
—	Stenobothrus .	Section de la chaîne à la base de l'abdomen.	Ralentissement.
Langendorff.	Hanneton . .	Décapitation.	Ralentissement.
—	Libellule. . . .	Décapitation.	Ralentissement.

En terminant ces conclusions, je ferai remarquer que toute section de la chaîne ventrale ganglionnaire porte fatalement à la fois sur cette chaîne et sur les cordons nerveux qui, situés à sa face supérieure, constituent les

Digitized by Google

troncs d'origine du système auquel Émile Blanchard, Leydig, Cattie et bien d'autres donnent le nom de sympathique.

Ce fait serait très grave si, comme le supposaient Newport et ses successeurs, le soi-disant sympathique offrait réellement des ganglions de distance en distance et si, suivant une opinion ancienne aussi, les nerfs qui en émanent (nerfs transverses) animaient exclusivement des trachées et les muscles des orifices stigmatiques. Mais il résulte des observations intéressantes de Cattie [1] sur les Chenilles : 1° que le sympathique ne présente aucun ganglion; 2° que ses nerfs naissent en réalité des ganglions de la chaîne ventrale; 3° que les uns, parmi ces nerfs transverses, se rendent au système trachéen ou aux stigmates et d'autres aux muscles longitudinaux de l'abdomen; enfin 4° que certains stigmates sont animés par les nerfs en question, tandis que d'autres le sont par les nerfs ordinaires du système moteur.

[1] CATTIE. *Beiträge zur Kenntniss der Chorda supraspinalis*, etc., op. cit., pp. 308 et suiv.

Digitized by Google

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Les figures de cette planche et celles des planches II, III, IV, V, VI et VII sont la reproduction exacte de quelques-unes des nombreuses silhouettes obtenues par la méthode des projections. Afin de réduire l'espace occupé par les figures, j'ai supprimé généralement les silhouettes des têtes.

Dans tous ces dessins, la phase *expiratoire est noire*, la phase inspiratoire blanche. Les chiffres indiquent les numéros des somites abdominaux apparents; les flèches donnent des indications quant au sens des mouvements expiratoires.

Fig. 57. Silhouette du profil de l'*Hydrophilus piceus* (grossissement 6).
Des styles de papier sont fixés sur les arceaux tergaux 1, 2, 3, 4, 5 et sur l'extrémité de l'abdomen.
La pointe de l'abdomen est à peu près immobilisée par une épingle *EE*.

Fig. 58. Silhouette du profil de l'*Oryctes nasicornis* ♂ (grossissement 5).
Des styles de papier sont portés par les arceaux tergaux 2, 4, 6; l'abdomen est libre.

PLANCHE II.

Fig. 59. Silhouette fournie par un *Oryctes nasicornis* ♂ placé longitudinalement dans l'appareil. La silhouette répond à la coupe du somite 4 (grossissement 5).
Des styles de papier sont fixés sur le milieu et sur les parties déclives de l'arceau tergal, ainsi que sur le bord des régions épimériennes.

Fig. 60. Combinaison de deux silhouettes obtenues en plaçant un Hanneton longitudinalement dans l'appareil. Chacune des silhouettes répond à la coupe du troisième somite abdominal (grossissement 6).
Dans la moitié gauche de la figure un style de papier *i* est fixé sur l'emplacement même du stigmate; dans la moitié droite un style analogue *i'* est collé sur la région épimérienne.

Digitized by Google

PLANCHE III.

Fig. 61. Silhouette du profil du *Staphylinus caesareus;* l'abdomen est libre (grossissement 12).
Mth. Prothorax immobile;
Msth et Mtth. Méso- et métathorax participant aux mouvements respiratoires.

Fig. 62. Silhouette du profil de la *Coccinella septempunctata.* L'extrémité de l'abdomen repose librement sur une épingle coudée (grossissement 14).
La phase expiratoire est accompagnée ici d'une augmentation du diamètre vertical de l'abdomen (voyez fig. 8 page 103).

PLANCHE IV.

Fig. 63. Silhouette du profil de la *Nepa cinerea.* L'extrémité de l'abdomen repose librement sur une épingle coudée. Des styles de papier sont collés sur les parties latérales de deux arceaux sternaux (grossissement 11).

Fig. 64. Silhouette du profil de la Blatte (*Periplaneta orientalis*) (grossissement 11).
Msth, Mtth. Méso- et métathorax.

Fig. 65. Silhouette de la face sternale de l'abdomen de la *Libellula quadrimaculata* (grossissement 5).
L'allongement *apparent* en expiration résulte du mouvement oscillatoire de l'abdomen démontré par la figure suivante.

Fig. 66. Silhouette du profil de l'abdomen de la *Libellula quadrimaculata* (grossissement 5).

PLANCHE V.

Fig. 67. Silhouette du profil de la *Calliphora vomitoria* (grossissement 10). La ligne pointillée montre l'étendue des mouvements d'oscillation *non* respiratoires.

Fig. 68. Silhouette de la face inférieure de l'abdomen de la *Calliphora vomitoria* ♀ (grossissement 10).
L'oviscapte s'allonge en expiration.

Fig. 69. Silhouette du profil de l'abdomen de l'*Eristalis tenax* (grossissement 10).

Fig. 70. Silhouette du profil de l'abdomen de la *Vespa germanica.* Mouvements respiratoires chez un individu calme (grossissement 11).
Toute la partie de l'abdomen située au-dessus de la ligne pointillée *IM* reste immobile.

Digitized by Google

PLANCHE VI.

Fig. 71. Silhouette du profil de l'abdomen du *Bombus muscorum* ♀ (grossissement 11).
Toute la partie de l'abdomen située au-dessus de la ligne pointillée *IM* reste immobile.

Fig. 72. Silhouette du profil longitudinal de la *Phryganea striata* ♀.
L'abdomen repose, par le cinquième somite, sur une épingle coudée (grossissement 10).
Du côté dorsal de la figure, la ligne *noire* pointillée représente l'abaissement expiratoire dans les moments où celui-ci est faible.

Fig. 73. Silhouette du profil de l'abdomen du *Stenobothrus variabilis* (grossissement 5).

PLANCHE VII.

Fig. 74. Silhouette du profil longitudinal de l'abdomen du *Decticus verrucivorus* (grossissement 7).
L'animal est sur le dos, fixé par les organes du vol serrés entre les lames d'un support *S*. Le sixième somite abdominal repose librement, par sa face tergale, sur ce support.

Fig. 75. Silhouette du profil longitudinal de la *Pieris napi*. Les deux images sont destinées à faire comprendre l'onde respiratoire (grossissement 5).

Fig. 76. Silhouette du profil longitudinal de l'abdomen de la *Sialis lutaria* (grossissement 12).

Digitized by Google

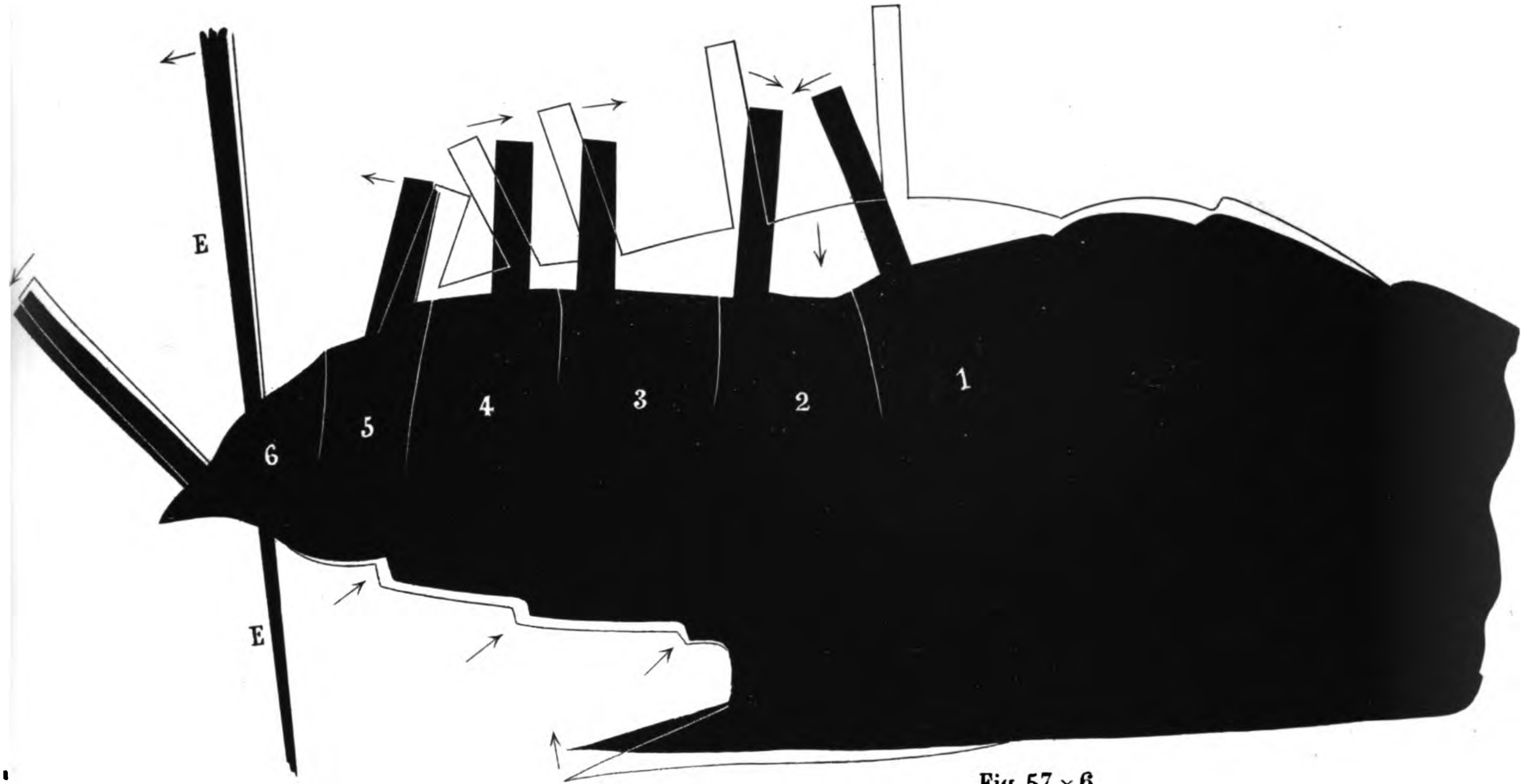


Fig. 57 × 6.

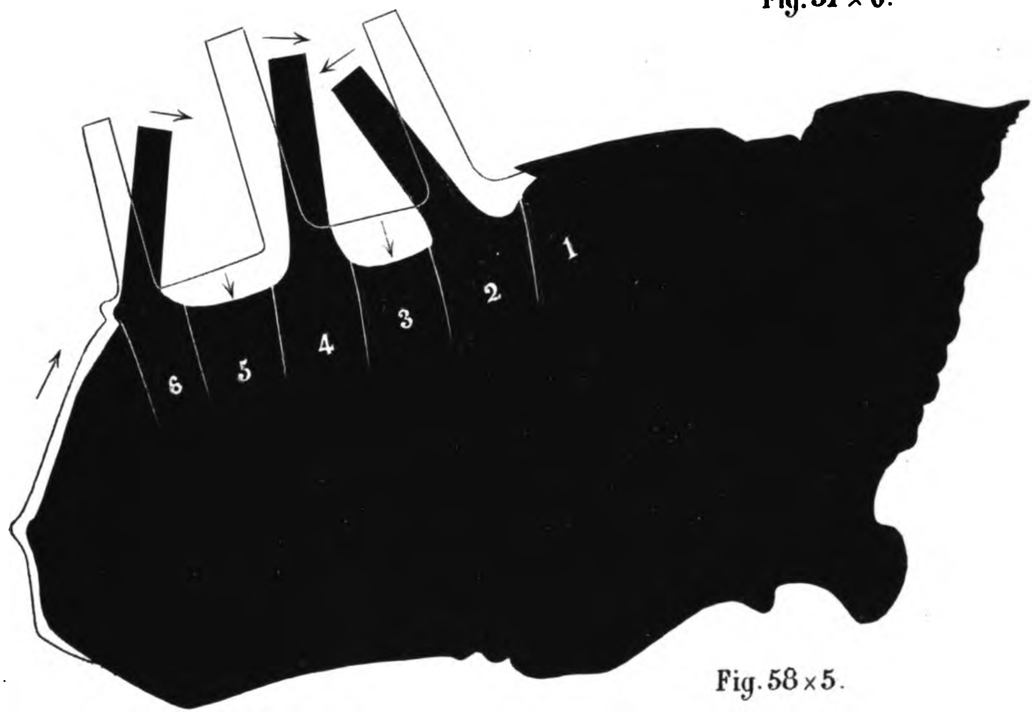


Fig. 58 × 5.

F. Plateau del. Lith. G. Severeyns

Digitized by Google

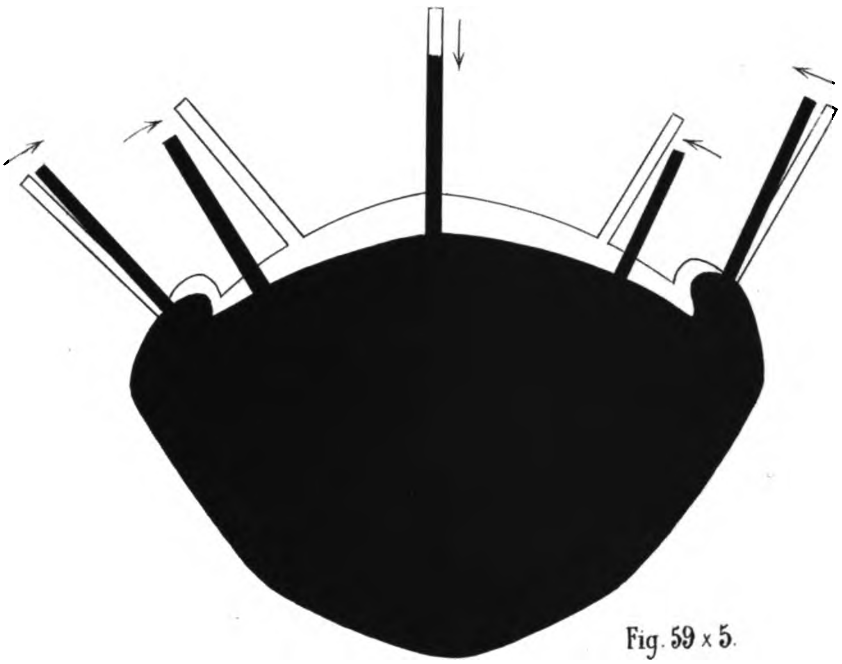


Fig. 59 x 5.

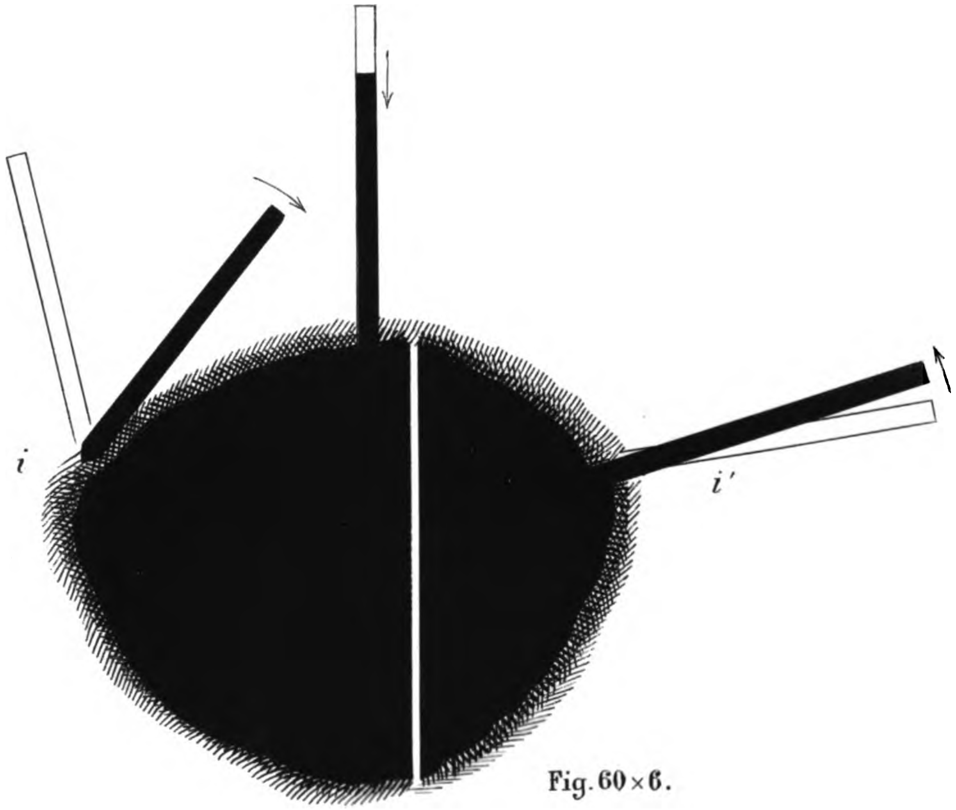


Fig. 60 x 6.

Digitized by Google

Digitized by Google

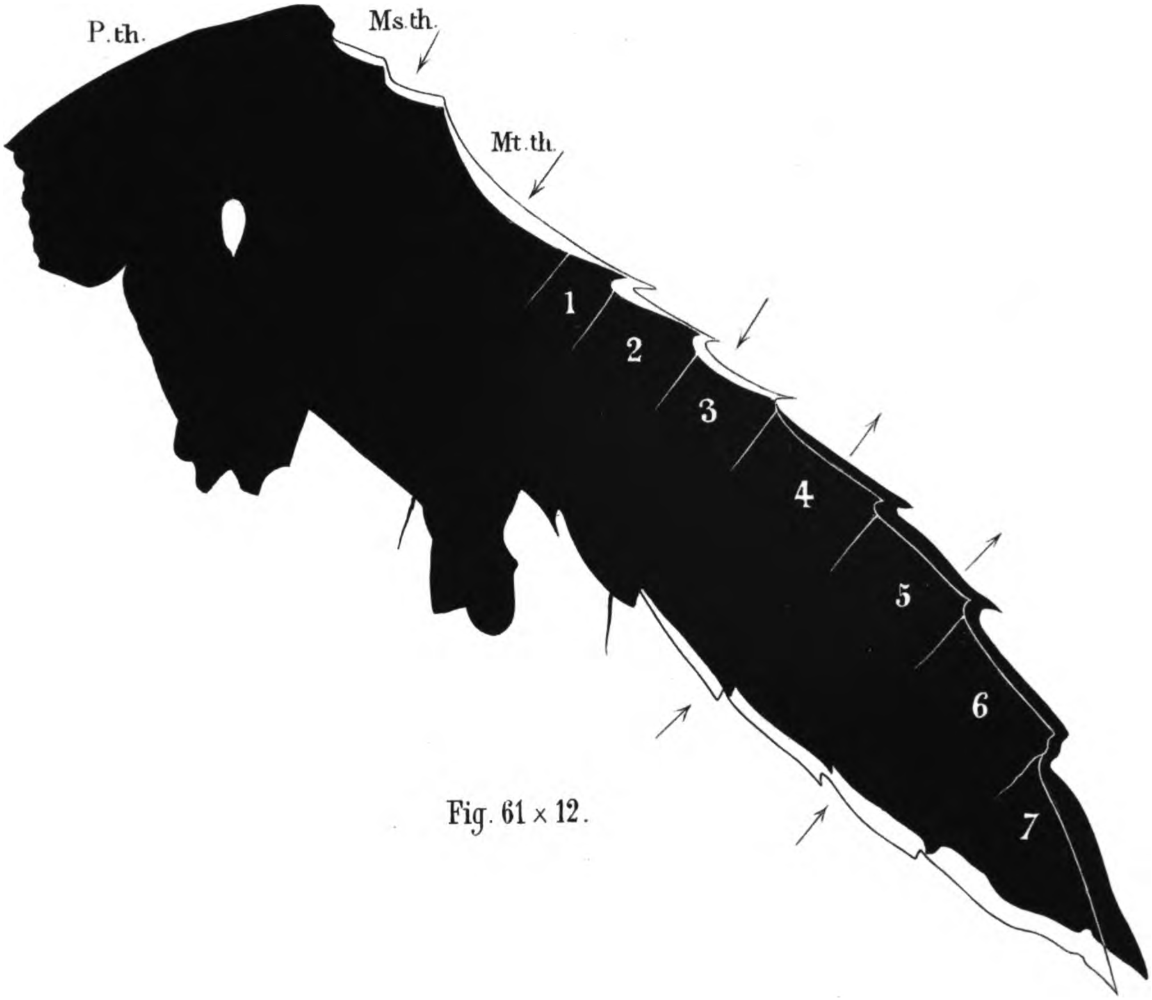


Fig. 61 × 12.

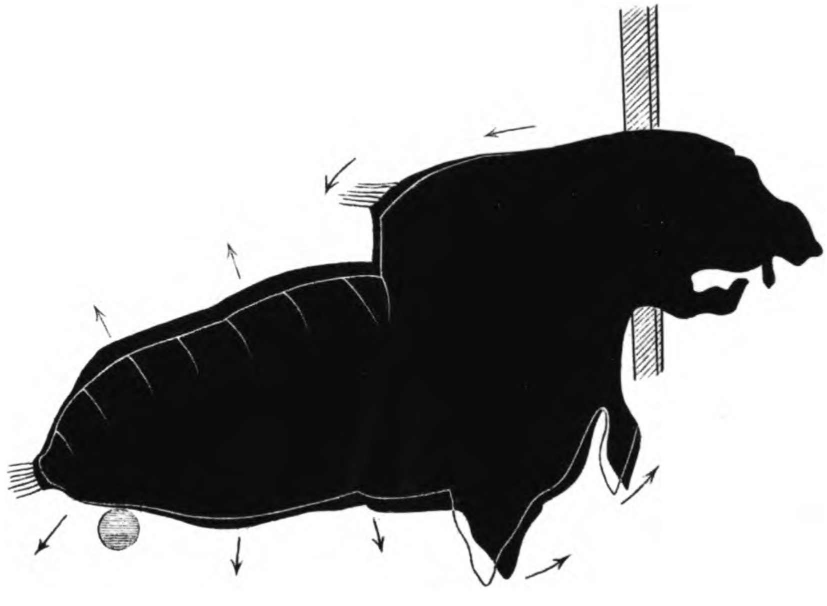


Fig. 62 × 14

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 63 × 11.

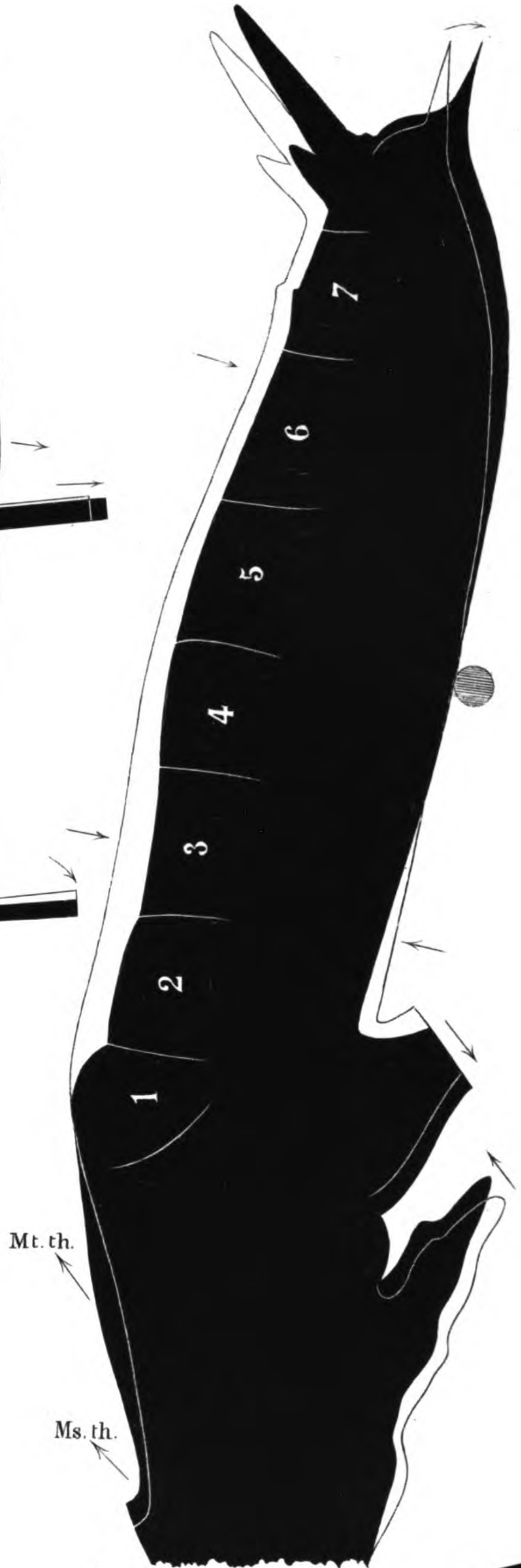


Fig. 64 × 11.

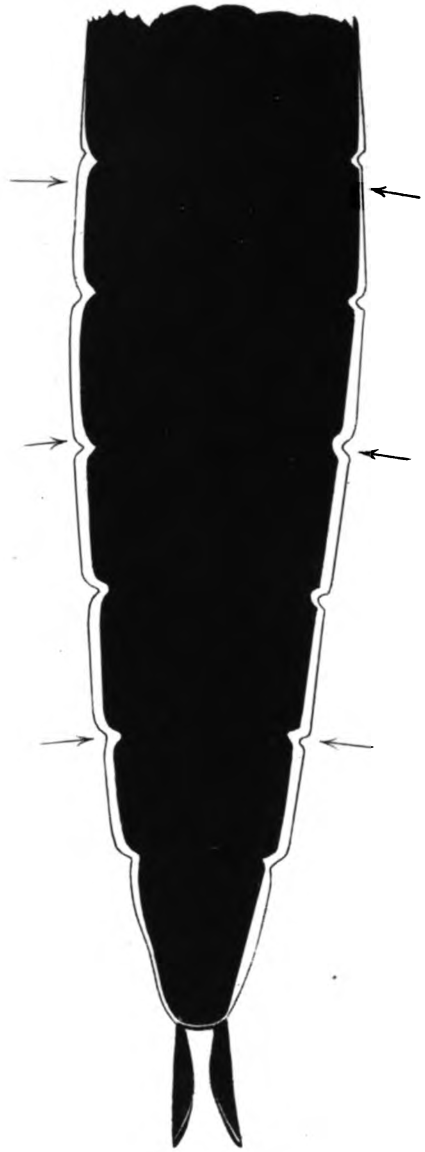


Fig. 65 × 5.

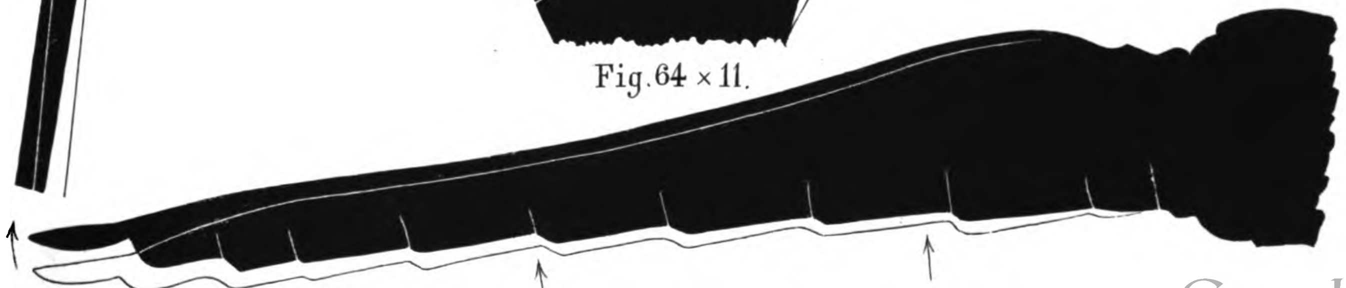


Fig. 66 × 5.

F. Plateau del.

Digitized by Google

Digitized by Google

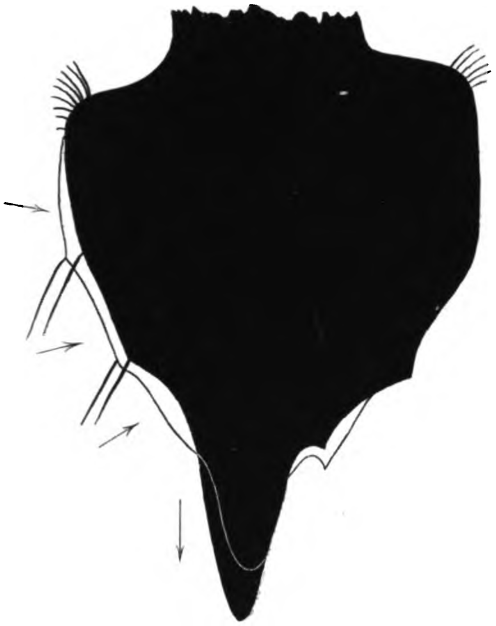


Fig. 68 × 10.

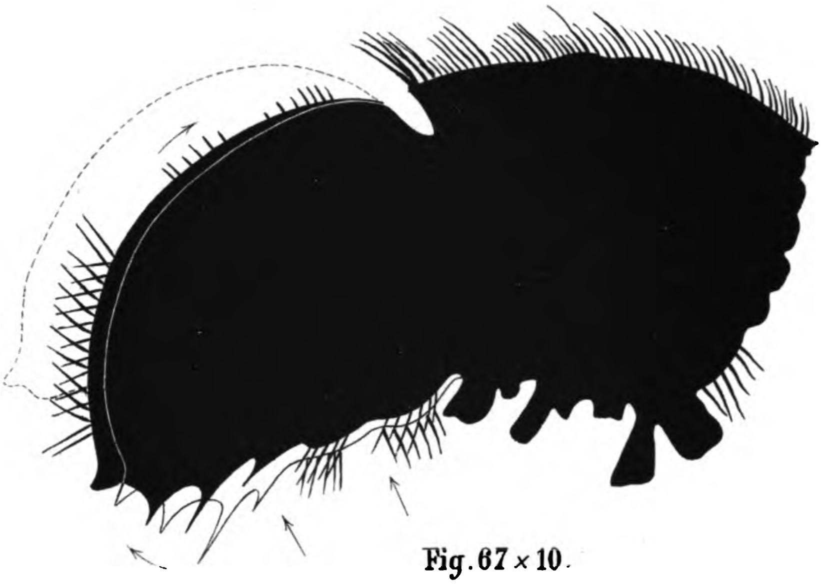


Fig. 67 × 10.

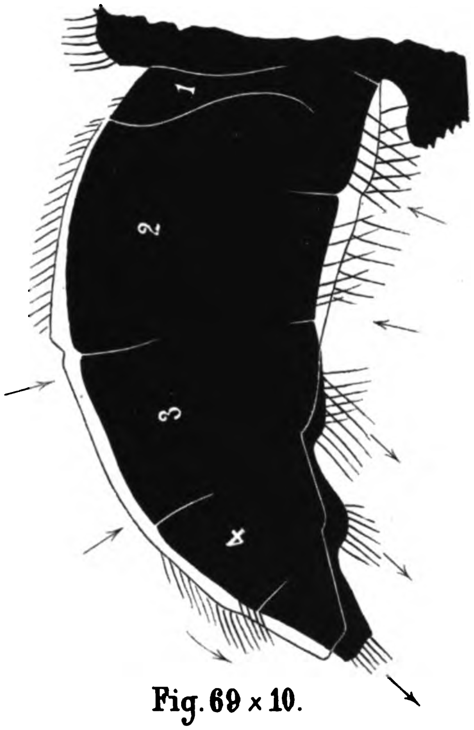


Fig. 69 × 10.

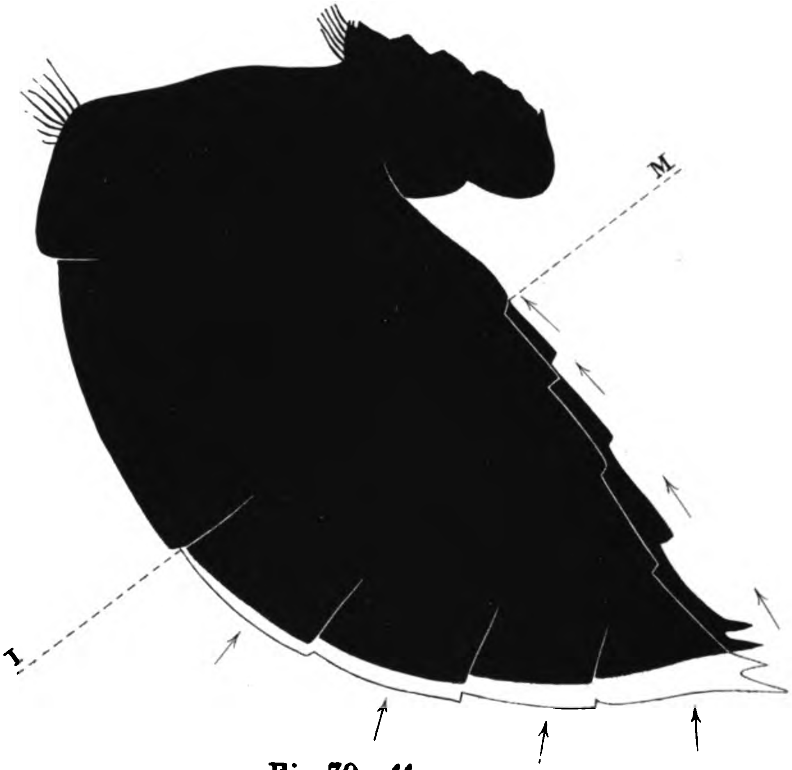


Fig. 70 × 11.

Digitized by Google

Digitized by Google

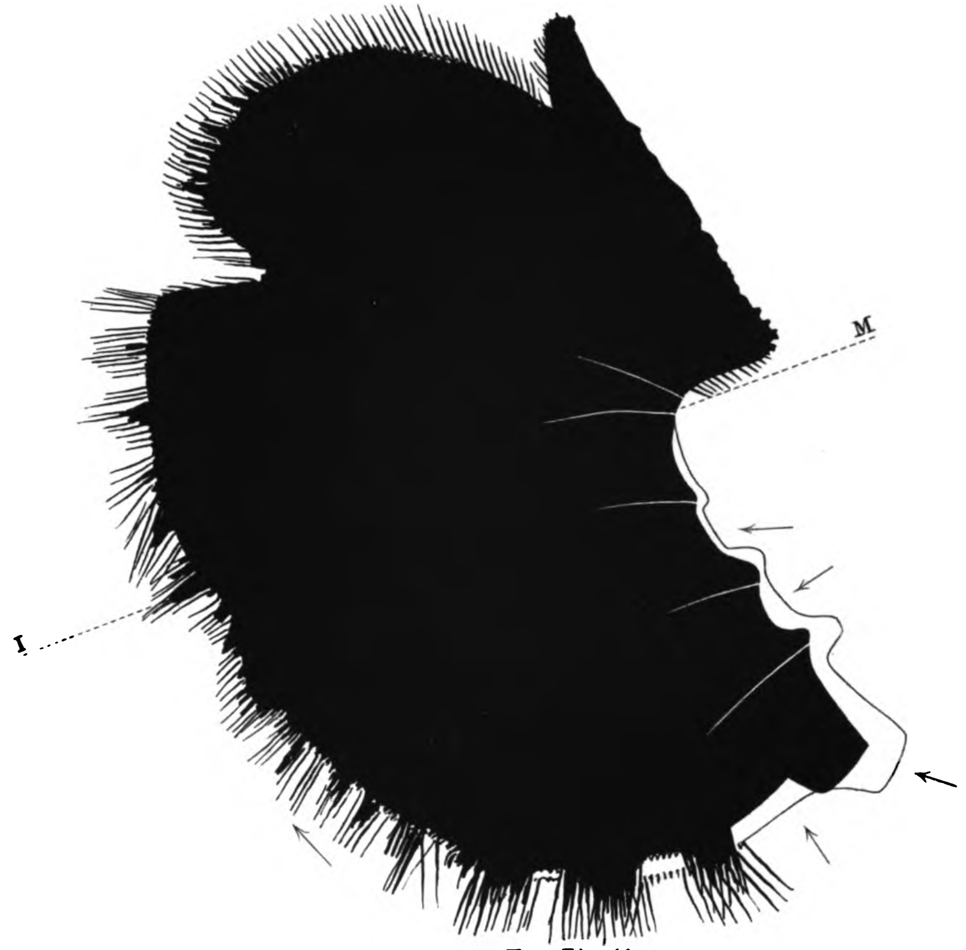


Fig. 71 × 11.

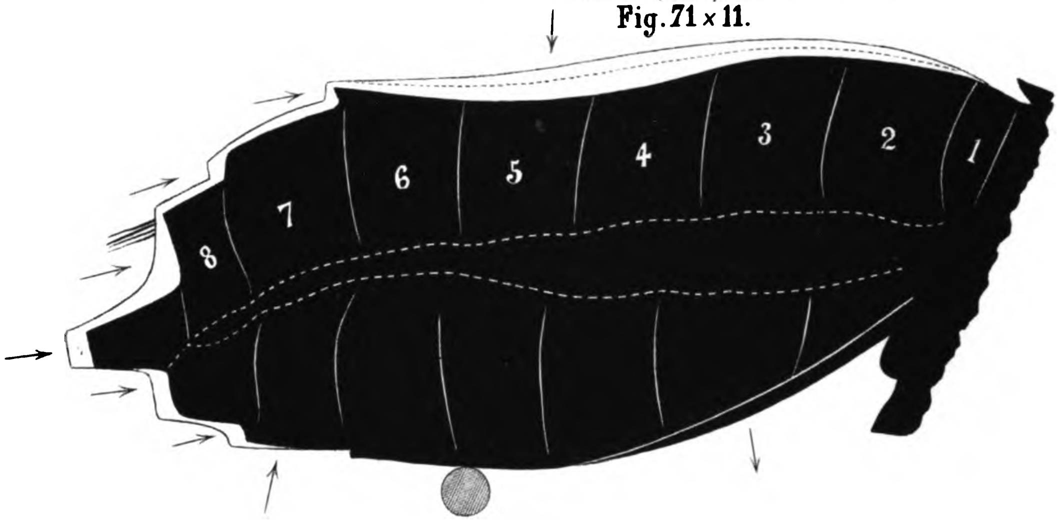


Fig. 72 × 10.

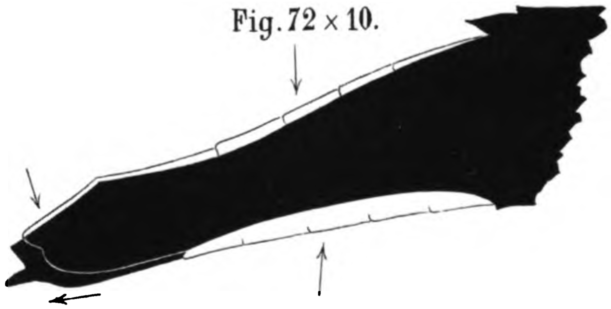


Fig. 73 × 5.

Digitized by Google

Digitized by Google

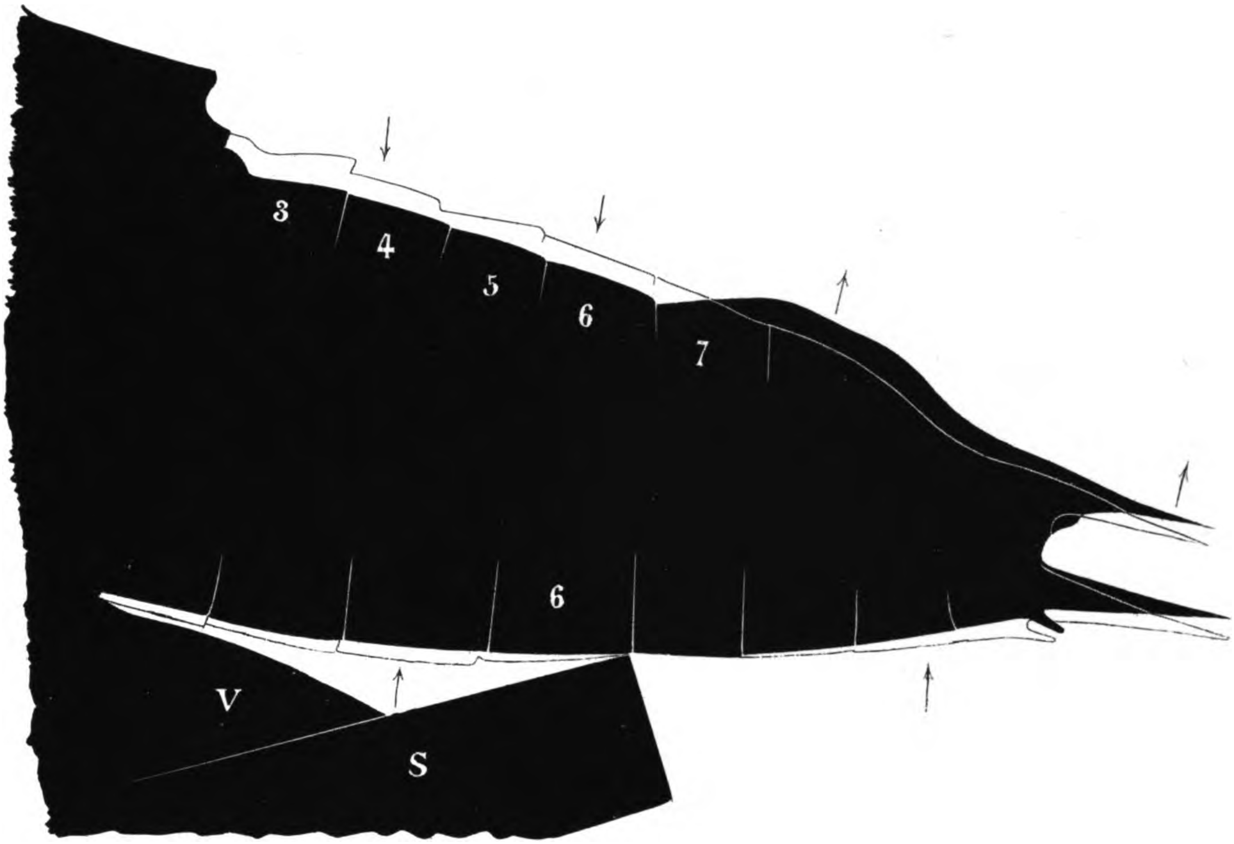


Fig. 74 × 7.

Fig. 75 × 5.

Fig. 76 × 12

Digitized by Google

Digitized by Google

LE RÉALISME

SON INFLUENCE SUR LA PEINTURE CONTEMPORAINE

PAR

Henri HYMANS

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Comme un bel arbre, aimons la colonne élancée;
L'Art vrai n'a-t-il donc pas la nature pour sœur!

BRIZEUX.

(Mémoire présenté à la Classe des beaux-arts dans la séance du 7 juin 1883.)

Digitized by Google

AVANT-PROPOS [1]

Au mois de mai 1882 s'ouvrait, à l'École des Beaux-Arts à Paris, une exposition générale de l'œuvre de Courbet. Elle s'était organisée sous le patronage officiel et, à peine close, plusieurs d'entre les toiles qu'on y avait fait figurer allèrent prendre place dans les musées français.

Il est difficile de ne pas envisager comme un revirement ce double et solennel hommage rendu à la mémoire de l'artiste en qui le réalisme trouvait naguère sa personnification la plus discutée.

N'en peut-on conclure que la théorie nouvelle a sorti ses effets, que dès maintenant elle appartient à l'histoire? On est sans peine généreux envers les morts.

« Les haines s'en vont, les rivalités s'effacent et la justice qui se taisait

[1] Ce mémoire portant la devise :

Comme un bel arbre, aimons la colonne élancée ;
L'Art vrai n'a-t-il donc pas la nature pour sœur?

Brizeux.

a été soumis au concours de la Classe des beaux-arts pour 1883, et renvoyé dans la séance du 7 juin à l'examen de MM. Slingeneyer, Stallaert et Fétis.

« La Classe, adoptant les conclusions des rapports de ses commissaires, lus dans la séance du 25 octobre (*Bulletin,* 3e série, t. VI, pp. 344, 346, 357), a jugé ce travail digne de la médaille d'or.

» L'enveloppe qui, d'après le règlement, devait contenir le nom de l'auteur, ayant été décachetée par M. le Directeur de la Classe, il a été constaté qu'elle ne renfermait qu'un billet blanc. Or le programme du concours porte la prescription suivante :

« Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage; ils n'y inscriront qu'une devise qu'ils reproduiront dans un billet cacheté, renfermant leur nom et leur adresse. Faute par eux de satisfaire à cette formalité, le prix ne pourra leur être accordé. »

» En présence de cette prescription formelle, la Classe, consultée par le Directeur, regrette de ne pouvoir accorder le prix. »

Digitized by Google

se lève pour formuler l'inéluctable jugement. » Ainsi s'exprime le plus constamment fidèle des partisans du novateur [1].

Peut-être, dans le cas présent, est-il permis de se demander, comme le faisait un éminent critique, si une justice de l'espèce ne marque pas autant de scepticisme et de lassitude que d'impartialité réelle [2]. S'il en était ainsi, nous n'en serions que mieux fondés, dans ce tourbillon rapide qui emporte les idées du jour, à arrêter un moment au passage, pour l'interroger sur son origine et ses œuvres, une théorie qui s'est affirmée avec tant d'éclat et dont les effets n'ont pas cessé d'être sensibles.

L'accord est loin d'être établi sur la signification du mouvement réaliste. De ce que la controverse a pu perdre de son ardeur en perdant de son actualité, ne résulte pas que de profondes divergences ne subsistent sur la légitimité d'une forme d'interprétation de la nature envisagée par les uns comme pouvant seule permettre à l'artiste d'accomplir sa tâche en pleine conscience, par d'autres, au contraire, comme une négation absolue des principes qui doivent présider à l'enfantement de son travail.

Entre ces opinions extrêmes il fallait prononcer. Si nous n'avons pas hésité à le faire, c'est moins, qu'on veuille le croire, en invoquant l'autorité de nos impressions personnelles que l'évidence des faits toujours utiles à remettre en mémoire, et trop facilement tombés dans l'oubli.

[1] Castagnary, *Préface au catalogue de l'œuvre de Courbet.* Paris, 1882, p. 28.
[2] Henri Delaborde, *Études sur les beaux-arts* Paris, 1864, t. II, p. 177.

I

C'est, de nos jours, une opinion courante que la splendeur des beaux-arts sera l'inévitable conséquence de la prospérité matérielle des nations. Il semble qu'à beaux écus sonnants, le particulier, l'État auront pouvoir de faire éclore les œuvres les plus parfaites, qu'en un mot, la perfection résulte à un degré moindre de la valeur de l'artiste qui crée, que de l'importance des sommes affectées à sa rémunération. Il n'est pas de théorie plus fausse, mieux faite pour égarer, non seulement la foule, mais l'artiste lui-même, sur la véritable signification d'une œuvre d'art.

« Celui, dit Quatremère de Quincy [1], qui veut, en payant le temps et les soins de l'ouvrier, lui commander un chef-d'œuvre, est presque toujours sûr de l'obtenir. C'est pourquoi les encouragements pécuniaires sont à peu près infaillibles pour obtenir la plus haute perfection des produits industriels, mais ils sont à peu près inutiles pour obtenir des arts du génie cette valeur morale dont on voudrait que résultât la valeur mercantile. Tel chef-d'œuvre a quelquefois coûté dix fois moins de temps et de peine que le plus mauvais ouvrage. »

Quelles que soient l'adresse et l'expérience de l'artiste, la partie matérielle de son travail est, en somme, chose accessoire, car le lien qui doit s'établir entre lui et nous est avant tout intellectuel. Chaque effort nouveau vers la perfection doit resserrer ce lien, sans en altérer la nature; plus l'œuvre d'art

[1] *Considérations morales sur la destination des ouvrages de l'art.* Paris, 1815, p. 10.

Digitized by Google

sera digne de ce nom, moins elle viendra répondre à un besoin matériel; elle pourra, si parfaite qu'elle soit, ne procurer qu'une satisfaction relative et, dans tous les cas, n'aura qu'une valeur de pure convention.

De là ces divergences profondes d'appréciation que l'on a vues de tout temps se produire en matière d'art. L'œuvre en sera-t-elle rabaissée? Nullement. Si Platon exclut les artistes de sa République, ce n'est point qu'il les frappe d'indignité; il constate simplement que leur travail ne pourvoit à aucune des nécessités matérielles de son gouvernement idéal.

En dehors des satisfactions morales ou intellectuelles il n'est réellement possible à personne d'assigner à l'art une direction immuable, et l'artiste, comme l'écrivain ou le poète, dispose en toute liberté du droit de nous transporter à sa suite dans le monde réel ou dans le monde idéal; comme nous tous, il subit l'influence d'un courant d'idées qui appartiennent à son temps et serviront, sans doute, à le caractériser dans l'histoire : le christianisme succédant au paganisme, la renaissance au moyen âge, etc.; mais l'artiste peut aspirer même à influer sur ce courant.

La religion a été non moins puissamment servie par les arts qu'elle ne les a inspirés; les statuaires de la Grèce créèrent l'image des dieux et ajoutèrent à leur majesté.

Les temps modernes n'ont rien enlevé de son importance au rôle de l'artiste; on peut dire que cette importance a grandi, par cela même que notre temps a donné plus largement satisfaction aux besoins matériels.

Winkelmann disait que l'art naît du besoin; un contemporain répond avec vérité qu'il ne commence, au contraire, qu'où cesse le besoin [1].

Moins que jamais il serait possible de proclamer que le beau c'est l'utile; car en adoptant cette définition, bien loin de pouvoir supposer, comme Proudhon, que l'art ne pouvant mourir, ne rétrograde jamais, nous verrions précisément se réduire à des proportions infimes sa place dans la société moderne.

On a pu croire, au premier examen, que chacune des conquêtes de la science, que tout nouveau progrès de l'industrie, que les multiples et merveil-

[1] Fétis, *L'Art dans la Société et dans l'État*. Bruxelles, 1870, p. 4.

Digitized by Google

leuses applications de la vapeur et de l'électricité doivent agir dans un sens défavorable à la création artistique, paralyser l'imagination de l'artiste, enchaîner davantage le monde moderne à la régularité méthodique des choses. On a pu dire que les différences autrefois caractéristiques de race et de physionomie des nations, le pittoresque des costumes, la ferveur des sentiments religieux, l'autorité des traditions locales et jusqu'à la libre expression des mouvements de l'âme, vont peu à peu s'atténuant, s'allanguissant pour ne laisser à l'artiste d'autres éléments possibles d'intérêt ou d'autre forme de supériorité qu'une technique plus ou moins adroite. Mais il n'y a là qu'une apparence. A mesure que l'homme entre en possession d'éléments nouveaux de bien-être matériel, il en aspire davantage à s'élever au-dessus de la réalité pure et simple et réclame précisément des arts la forme exquise de jouissance qu'eux seuls peuvent lui procurer.

Beaucoup d'œuvres contemporaines — on ne peut le nier — portent la marque évidente des influences que nous venons d'énumérer; mais pour qui ne s'arrête point à la surface des choses, il est impossible de ne pas constater que l'artiste, alors même qu'il cède à des tendances contraires à ses progrès, s'efforce de donner plus d'énergie à l'expression de son individualité. On dirait que, dominé par cette préoccupation de chercher une formule appropriée à son temps, il se croit à même de la trouver dans la poursuite d'un ensemble de procédés et d'effets aussi dissemblables que possible de la pratique de ses devanciers.

Le passé lui est devenu sans valeur; à quelque prix que ce soit, il s'efforce de faire montre d'originalité, et ce souci l'emporte sur toute autre considération, au point qu'il semble devoir être — les exceptions toujours réservées — la caractéristique de l'art de notre temps.

A nos yeux, la tendance n'a rien qui doive réjouir.

« C'est un des accidents qui ramènent à la barbarie, dit un écrivain, que cette confiance en elle-même d'une génération qui s'imagine que les productions des arts qu'elle voit éclore sont les plus fortes et les plus belles, par cela seul qu'elles sont venues les dernières [1]. »

[1] Delécluze, *De la barbarie de ce temps* (Livre des Cent et un, t. V, p. 63).

Digitized by Google

En comparant l'art d'aujourd'hui à celui d'autrefois, il serait insensé de croire que les qualités natives et l'habileté qui nous frappent dans les œuvres anciennes n'ont pas passé en très légitime héritage à nos contemporains; il y a cependant un point incontestable, c'est que les conditions dans lesquelles se produit le talent ont varié d'une manière trop absolue pour ne pas laisser à ses manifestations une profonde empreinte.

Quiconque étudie l'histoire des maîtres d'autrefois, est d'abord frappé de cette circonstance que leur faculté de créer trouvait presque toujours son emploi dans une direction précise. Libre, sans doute, de ses inspirations, l'artiste n'en était pas moins appelé d'ordinaire à répondre à des commandes qui sont devenues la source des œuvres les plus grandioses.

Michel-Ange pouvait dédaigner l'emploi de la peinture à l'huile et choisir le procédé qui s'adaptait le mieux aux nécessités des grandes pages qu'il avait non seulement le désir, mais l'obligation de créer; Titien, Paul Véronèse, Rubens, Albert Dürer lui-même, ont conçu peu d'œuvres dont ils ne prévoyaient au moins la destination.

Nous ne citons que les maîtres de premier ordre, mais ceux-là ne font pas exception à une règle presque générale, et, à défaut d'autres preuves, les œuvres elles-mêmes diraient les conditions particulières de leur enfantement, tant il est vrai que *l'application spéciale de l'ouvrage d'art à un emploi déterminé est pour l'artiste, ce qu'est la représentation scénique pour le poète dramatique* [1].

L'organisation du travail, pour sa part, exerçait une grande influence sur la nature des productions artistiques.

Quantité de peintres mettaient leurs aptitudes spéciales au service de maîtres en vogue. Les historiens de la peinture nous font connaître des artistes qui, pour plusieurs années, engagent leur pinceau à tant par an, pour compléter, soit par des architectures, soit par des paysages, les œuvres d'un confrère plus favorisé; au cours même de leurs pérégrinations, on voit des Flamands gagner par étapes la Péninsule italique, terre de promission des

[1] Quatremère de Quincy. Tout en ne partageant pas sur plusieurs points l'opinion de ce savant illustre, il nous est impossible de ne pas tenir compte de l'exposé si clair qu'il fait de la question de la destination de l'art, question très proche de celle que nous abordons ici.

Digitized by Google

Néerlandais, en s'associant au travail de quelque peintre étranger, puis, enfin, se produire, à leur tour, quand l'occasion leur en est fournie.

En Hollande, au XVII[e] siècle, le droit de signer son œuvre n'appartient qu'à l'artiste complètement affranchi de son stage auprès du maître qu'il s'est engagé à servir et, portant nos regards sur l'école flamande, nous voyons Rubens, un des peintres qui comptent les collaborateurs les plus nombreux et les plus habiles, tenir à peine compte de la personnalité de ces auxiliaires, tant il était, à ces époques, chose admise, que le véritable, l'unique auteur d'une œuvre était celui qui l'avait conçue et que l'exécution pouvait être, sans rien perdre de son importance, un travail collectif.

Et les règlements des corporations d'artistes le voulaient ainsi. Nul ne passait maître qu'après une certaine période de servage; nombre de fois le contrat d'engagement stipule que l'élève sera logé, nourri, vêtu et plus tard payé par le maître, auquel, en échange, reviendra tout le travail de l'élève. Personne n'ignore le singulier abus que Frans Hals est accusé d'avoir fait vis-à-vis d'Adrien Brauwer d'une pareille convention.

La Révolution française mit fin à ce qui restait debout de cette organisation ancienne. Depuis longtemps l'enseignement des beaux-arts avait pris, sous l'influence de l'Académie, une direction uniforme; les artistes, bien qu'ils fussent affranchis de toutes les autres entraves, restaient soumis à sa juridiction. L'Académie tenait à ses privilèges; nul ne participait aux expositions sans avoir obtenu d'elle sa licence. Devenue, selon David, « le refuge de toutes les tyrannies », elle se vit condamnée à disparaître. A sa place, on érigea la « commune de l'art », et le régime des expositions absolument libres fut inauguré.

Le décret de l'Assemblée nationale du 21 août 1791 était ainsi conçu :

« Considérant que, par la Constitution décrétée, il n'y a plus pour aucune partie de la nation ni pour aucun individu, aucun privilège ni exception aux droits communs des Français; qu'il n'y a plus ni jurandes, ni corporations de professions, arts et métiers; et se conformant aux dispositions du décret du vingt-six du mois dernier, qui consacre le Louvre à la réunion des Monuments des sciences et des arts,

« Décrète provisoirement, et en attendant qu'il soit statué sur les divers

Digitized by Google

établissements de l'instruction et de l'éducation publique, ce qui suit :

» ARTICLE PREMIER. — Tous les artistes français et étrangers, membres ou non de l'Académie de peinture et de sculpture, seront également admis à exposer leurs ouvrages dans la partie du Louvre destinée à cet objet. »

Le changement était plus radical qu'on ne pense. Les artistes, proclamés libres, étaient conviés à se produire. « L'empire de la liberté s'étend enfin sur les arts; elle brise leurs chaînes; le génie n'est plus condamné à l'obscurité, » disait le préambule du décret : bientôt les jurys d'artistes allaient faire place à ces jurys recrutés parmi les hommes étrangers à l'art, mais réputés *plus proches de la nature*.

Puis les pouvoirs publics s'imposaient des obligations d'une nature nouvelle. L'État entrait en scène, et avec lui un genre de protection et d'encouragement qui ne pouvait être qu'une barrière illusoire contre le flot des médiocrités qui se crurent appelées à s'illustrer par le pinceau : « hommes de génie trop longtemps condamnés à l'obscurité! »

Les œuvres affluèrent aux salons; leur nombre doubla dès la première exposition libre; au salon suivant il avait triplé [1].

Des voies imprévues s'étaient ouvertes, du même coup, à la compétition à outrance. Nous ne disons point que les œuvres importantes cessèrent de se produire, mais on peut affirmer que si les musées et les cabinets ont recueilli des travaux de mérite, nés sous l'empire du régime nouveau, le nombre de toiles tombées dans l'oubli avec ceux qui les ont signées a été infiniment plus considérable depuis le commencement du siècle actuel que pendant tout le cours des deux siècles qui l'ont précédé.

L'ordre des choses que nous venons d'exposer nous régit depuis cent ans. Les méthodes d'enseignement ont quelque peu varié par-ci par-là; mais, en dernière analyse, la production picturale, stimulée fort au delà du nécessaire, a pris des proportions telles que l'on en est venu à se demander, avec quelque raison, si l'intervention et les efforts officiels ne pourraient être légi-

[1] Au salon de 1789 il y avait eu 350 numéros dont 206 peintures; le salon de 1791 compta 794 numéros; le suivant 1050 œuvres dont 837 peintures.

Digitized by Google

timement employés à rétablir l'équilibre. Ce côté de la question est digne d'examen; nous l'abordons plus loin.

La direction nouvelle donnée aux beaux-arts par la Révolution n'intéressa que très accessoirement les bases de l'enseignement. L'introduction des principes académiques, qu'il est convenu d'attribuer d'une manière exclusive à David, n'était pas nouvelle. L'action du maître se borna à donner plus de force au courant; il y apporta toute l'opiniâtreté de sa nature.

Pour être l'objet d'une admiration devenue presque un culte, David ne vit pas pour cela ses principes si universellement acceptés que, même dans son entourage, il n'y eût des dissidents. Lui-même n'avait pas une foi inébranlable dans la durée de son école. Dans une promenade au salon de 1808, il disait à sa fille : « Dans dix ans, l'étude de l'antique sera délaissée. Tous ces dieux, ces héros seront remplacés par des chevaliers, des troubadours chantant sous les fenêtres de leurs dames, au pied d'un antique donjon. La direction que j'ai imprimée aux beaux-arts est trop sévère pour plaire longtemps en France... Quand je disparaîtrai, l'école disparaîtra avec moi [1]. »

Mais l'école de David ne devait pas périr par excès de sévérité; elle devait disparaître par l'infaillible et légitime accession d'idées nouvelles. Fort heureux déjà l'artiste à qui il est donné de laisser, par ses enseignements et son exemple, la profonde empreinte que le chef de l'école française devait laisser des siens. De telles influences n'appartiennent qu'aux hommes d'une trempe supérieure.

David, nous le répétons, ne fut pas le premier à tourner les regards du monde artiste vers l'antiquité. La France possédait en originaux et en copies les plus belles œuvres de la statuaire antique, et l'étude de ces modèles formait la base de l'enseignement des arts.

Diderot, lorsqu'il adresse à Grimm son analyse du salon de 1765, rappelle une conversation avec Chardin, laquelle donne une idée de la méthode adoptée dans les ateliers d'alors. « On nous met, disait Chardin, à l'âge de sept ou huit ans, le porte-crayon à la main. Nous commençons à dessiner d'après l'exemple, des yeux, des bouches, des nez, des oreilles,

[1] Jules David, *Le peintre Louis David.* Paris, 1880, p. 504.

Digitized by Google

ensuite des pieds, des mains. Nous avons eu longtemps le dos courbé sur le portefeuille lorsqu'on nous place devant le *Torse* ou l'*Hercule,* et vous n'avez pas été témoins des larmes que ce *Satyre,* ce *Gladiateur,* cette *Vénus de Médicis,* cet *Antinoüs* ont fait couler. »

En 1769, le jeune Carle Vernet écrit à son père : « Nous dessinons une semaine d'après nature et une semaine d'après la bosse ». On voit que tout cela ne diffère pas très sensiblement de l'enseignement d'aujourd'hui.

La véritable introduction de l'étude de l'antique dans les ateliers français remontait au Bernin, qui avait fait en France un assez long séjour sous Louis XIV. Il s'étonna beaucoup de voir négliger pour l'enseignement les belles copies des antiques que possédaient les galeries royales et qui sont encore exposées au Louvre, et conseilla les moulages des meilleurs morceaux des galeries italiennes [1].

David, quoi qu'on en dise, ne méconnaissait pas les droits de la nature à guider l'artiste [2]; nous l'avons appris de plus d'un de ses anciens élèves, et ses portraits fourniraient au besoin la preuve du fait. Mais, dans son enthousiasme pour l'antiquité, le chef de l'école française versait dans l'erreur de croire que ses personnages devaient avoir l'aspect de statues animées. « Raphaël, homme divin, c'est toi qui par degrés m'élèves jusqu'à l'antique! s'écriait-il... C'est toi-même qui m'as fait apercevoir que l'antique est encore au-dessus de toi! Quel grand maître tu m'as donné, aussi je ne le quitterai de ma vie [3]! »

Si la prédiction du maître sur la durée de son école devait se réaliser avant même que la mort eût glacé sa main, il lui était réservé ce titre d'honneur d'arriver, par des voies bien imprévues, à donner à l'art de son pays ce qu'aucun peintre n'avait réussi à lui donner : une école et une direction.

[1] « Cela gâte les jeunes gens, disait-il, de les faire dessiner trop tôt d'après nature, n'étant pas encore capables de choisir le beau dans le naturel et de laisser le laid. » (*Journal de voyage du cavalier Bernin en France*, publié par M. Ludovic LALANNE, *Gazette des Beaux-Arts*, t. XXIX, 2e période, p 263.)

[2] « David a ramené son siècle à la nature. »

(CASIMIR DELAVIGNE, *Seconde Messénienne*.)

[3] Jules DAVID, *Le peintre Louis David*, p. 10.

Digitized by Google

La période révolutionnaire a été jugée non moins sévèrement dans le domaine des arts que dans celui de la politique; mais, à tout considérer, et fixant nos regards sur les productions de la fin du XVIII[e] siècle, nous souscrivons de la manière la plus complète au jugement d'un des historiens d'art les plus éclairés de notre temps : Que dans cette crise « l'art se renouvelle, acquiert un idéal inconnu, des types de beauté rajeunis, des réalités plus saisissantes et des conceptions plus vastes [1] ». A David revient une part considérable de cet honneur.

Que de chemin parcouru ensuite, à grands pas, des *Sabines* à la *Bataille d'Aboukir* et au *Radeau de la Méduse!* Delacroix créera des scènes plus animées encore en ne s'inspirant que des maîtres de la couleur, et lui-même, pourtant, subira l'influence de David, comme Ingres, Vernet et Delaroche.

Tout cela s'accomplit, notons-le, moins d'un quart de siècle après la mort du chef d'École.

La faveur acquise, de nos jours, par les œuvres du XVIII[e] siècle, faveur à bien des égards justifiée, ne doit se fonder que très accessoirement sur les principes qu'elles représentent.

On a pu dire que « tout ce qui exige du goût, jusqu'au mobilier, jusqu'à la mode, devint pétrifiant d'ennui sous l'influence de David [2] », il n'en est pas moins évident que l'époque des prédécesseurs du maître est précisément celle où, selon l'expression d'Eugène Delacroix, « la pauvre peinture se traînait énervée sur les traces de Van Loo et de quelques génies de même force [3] ».

Qu'à un certain moment la queue des fanatiques de David ait été jugée avec une sévérité très légitime, nous n'y contredisons pas; ce qu'il faut avant tout, c'est rendre hommage à des principes de dignité et de grandeur dont l'influence ne pouvait être que salutaire et qui, certainement, ont excité l'admiration des hommes sérieux en présence de plus d'un travail du chef de l'École et de ses élèves.

[1] Jules Renouvier, *Histoire de l'art pendant la Révolution.* Paris, 1865, p. 5.
[2] E. Chesneau, *L'Art,* t. XXIX, p. 68.
[3] *Revue de Paris,* 1829.

Digitized by Google

Dans un livre où Proudhon condamne, sans autre réserve que le *Marat,* l'œuvre de David, il avoue que la contemplation du *Léonidas* faisait couler ses larmes, chaque fois que, dans sa jeunesse, il allait au Louvre. « Je regardais avec une émotion religieuse ces guerriers si beaux, si pleins d'un enthousiasme sacré, gravant de la pointe de leurs épées, sur le rocher au pied duquel ils allaient faire le sacrifice de leur vie, cette simple et sublime épitaphe : Passant, va dire à Lacédémone que nous sommes morts ici pour obéir à ses lois [1]. »

Peu d'artistes, sans doute, pourraient se vanter d'avoir vu leurs œuvres produire une impression plus profonde, et, à choisir, aucun d'eux n'hésiterait à préférer le suffrage d'un homme intelligent et lettré à celui de l'artisan inculte, jugeant tout au plus, comme le cordonnier d'Apelle, de l'imitation plus ou moins correcte de certains détails de sa profession.

De nos jours l'opinion prend une direction nouvelle. Il n'est point d'époque où l'on ait donné plus d'importance à la question si grave, et d'ailleurs si digne d'examen, de l'imitation matérielle par la peinture et peut-être au grand détriment de celle-ci.

Qu'en dernière analyse la peinture demeure le moyen d'imiter d'une manière aussi exacte que possible tout ce qui frappe le regard humain, personne, sans doute, ne songe à le nier; quel désaccord, pourtant, sur la forme à donner à cette imitation, sur le point où elle peut s'arrêter, et la nécessité de sa poursuite elle-même, preuve évidente que la tâche du peintre ne se borne pas aux trompe-l'œil, si grande que soit, d'ailleurs, l'habileté de ceux qui les produisent.

« Si l'art est un écolier servile, il est condamné à n'être jamais qu'un écolier impuissant », dit Victor Cousin [2]. Parole profonde et bien lointaine déjà. Que de courants ont entraîné l'opinion des foules depuis le jour où l'illustre philosophe exposait en des pages d'une simplicité si noble, la haute et civilisatrice mission de l'art !

La lutte des classiques et des romantiques appartient à l'histoire; la con-

[1] *Du principe de l'art et de sa destination sociale,* p. 109.
[2] *Du Vrai, du Bien et du Beau,* édition de 1854, p. 176.

Digitized by Google

troverse s'est portée sur d'autres champs plus ardente encore. On n'avait discuté jusqu'alors que l'interprétation des données ; ce fut la pensée elle-même qui, maintenant, allait être mise en question.

Le romantisme avait triomphé; il avait pour lui d'incontestables séductions. Au théâtre, comme dans les arts plastiques, ses représentants avaient mérité de légitimes succès et vengé les dédains de la génération précédente pour les nobles créations du moyen âge et de la renaissance. Ingres, lui-même, n'avait pas dédaigné de puiser aux sources de la poésie italienne ; il avait emprunté à Dante [1], à l'Arioste [2], des sujets de composition. Delaroche, élève de Gros, Scheffer, Géricault et d'autres, plus contenus que Delacroix, mais sortis comme lui de l'atelier de Guérin, avaient entrepris d'allier les droits de la couleur à ceux de la forme dans des pages historiques longuement méditées.

L'influence de Walter Scott dans le roman était égalée par celle des portraitistes anglais dans le domaine pictural, et Delacroix s'inclinait respectueusement devant les travaux de Reynolds qu'il proclamait « un vrai génie et le continuateur le plus sérieux des anciens maîtres. »

Sans nous occuper ici du mérite relatif ou intrinsèque des diverses tendances, il importe de faire remarquer que, dans presque toutes les directions, la théorie préoccupait alors les artistes à un degré bien moindre que le droit pour chacun de revêtir sa pensée de la forme la mieux faite pour lui donner sa pleine expression ; s'il ne manquait pas d'artistes fidèles aux traditions classiques, on ne voit pas qu'il ait été en leur pouvoir d'empêcher des confrères plus jeunes de rencontrer le succès en s'appliquant à l'étude des mœurs et de la physionomie populaires, à la représentation du pittoresque dans le costume, à la reproduction des monuments, ou simplement à la traduction des aspects de la nature. Ne suffit-il pas de citer Decamps, Isabey, Meissonier, Diaz, pour prouver que l'époque était féconde en individualités d'un rare mérite, pouvant ranger leurs œuvres à côté des grandes pages de ceux auxquels appartenait, sinon le droit, toujours discutable, de

[1] *Françoise de Rimini.*
[2] *Roger et Angélique.*

Digitized by Google

diriger une école, tout au moins la prétention légitime de la caractériser dans les plus vastes conceptions?

La peinture française put arriver ainsi en moins d'un demi-siècle, et par des étapes assez régulières, à la pleine possession des ressources les plus puissantes [1].

Mieux protégée qu'on n'a voulu l'admettre, par la dignité des traditions classiques, contre les extrêmes du romantisme, elle avait vu renaître peu à peu, au contact des maîtres de la vie et de la couleur, la grâce native de son tempérament, dégagé de toute contrainte. Les tendances les plus diverses avaient pu se produire, à des titres égaux, sous l'égide d'une tolérance féconde, et l'Exposition Universelle de 1855 vint donner au monde ébloui le spectacle d'une école tout à la fois originale, variée et une.

Qui veut reprendre le catalogue de la section française des beaux-arts y verra en présence, dans la grande peinture: Benouville, Bouguereau, Louis Boulanger, Cabanel, Chenavard, L. Cogniet, Couder, Couture, E. Delacroix, Flandrin, Gérôme, Hébert, Ingres, Jacquand, Jalabert, Landelle, Lehmann, Muller, Philippoteaux, Pils, Ricard, Robert-Fleury, Horace Vernet, Yvon, auxquels il faut ajouter Delaroche, E. Deveria et Scheffer qui s'étaient abstenus d'exposer, mais dont le talent était encore dans toute sa vigueur.

Dans les genres secondaires on rencontre Bellangé, Belly, Bida, Rosa Bonheur, Brascassat, Jules Breton, Cabat, Court, Corot, Courbet, Daubigny, Decamps, Diaz, Français, Gudin, Hamon, Paul Huet, Isabey, Lami, Meissonier, Millet, Morel Fatio, Justin Ouvrié, Th. et Ph. Rousseau, Roqueplan, Saint-Jean, Troyon et Ziem.

On remarquera que nous ne relevons ici que les noms des artistes dans toute l'activité de leur puissance créatrice, ceux dont l'opinion publique avait sanctionné les succès. Courbet et Daubigny, par exemple, étaient déjà médaillés. Voilà ce qu'avait produit l'école.

« La France a grandi, écrivait Gautier, dans un de ses élans d'enthousiasme. Sans doute, dans son passé, elle compte Poussin, Eustache Lesueur,

[1] On ne s'étonnera pas de voir cette étude tenir compte dans la mesure la plus large, du mouvement des arts en France, les peintres comme les écrivains de ce pays occupant la première place parmi les représentants du réalisme.

Digitized by Google

Lebrun, Watteau, et, plus tard, quelques peintres aimables; mais ce n'est guère que depuis un demi-siècle, et surtout dans ces dernières années, qu'elle est devenue une école où tout le monde peut apprendre. On va maintenant à Paris comme autrefois on allait à Rome; c'est, personne ne le conteste, la métropole de l'art...

« A l'esprit qui l'a toujours caractérisée la France a su joindre la couleur qui lui manquait; sans perdre son originalité, elle s'est approprié les procédés des écoles de Venise et d'Anvers... Nul crayon ne dessine mieux que le sien, nulle brosse ne peint mieux que sa brosse... Elle peut opposer Ingres à Delacroix, Decamps à Meissonnier, Flandrin à Couture, Aligny à Rousseau, réunissant tous les contrastes, conciliant les originalités les plus diverses [1]. »

Et cela était absolument vrai. Si d'autres écoles, comme celles de la Belgique et de l'Angleterre, furent appréciées avec faveur, elles se présentaient, dans leur ensemble, avec une supériorité moindre, et beaucoup de peintres belges trahissaient une influence évidente de la France. Celle-ci, on peut le dire, était devenue l'expression éloquente, la représentation de l'art contemporain dans ce qu'il avait de plus complet, de plus élevé, de plus vigoureux.

On se doutait à peine, en face d'un spectacle si propre à donner aux connaisseurs les joies les plus vives, que, pareille à ces tourmentes dont l'œil du marin le plus expérimenté est impuissant à discerner les avant-coureurs, déjà se préparait une réaction dont il serait difficile de trouver l'analogue dans les annales artistiques d'aucun peuple ou d'aucun temps.

En réalité, l'Exposition universelle de 1855 clôt d'une manière très précise une des périodes les plus importantes de l'histoire de la peinture moderne.

[1] *Les beaux-arts en Europe.* Paris, 1855, 1re période, p. 5.

Digitized by Google

II

Le mouvement que nous voulons étudier dans ces pages est si proche de nous, ses influences nous environnent d'une manière si complète, qu'il ne faut rien moins que ses frappants effets pour permettre d'en saisir la portée.

Les critiques de l'avenir ne verront peut-être pas sans surprise combien faibles, pour ne pas dire artificielles, furent les sources du courant qui a influé sur l'art de notre époque — on ne peut le nier, — avec une puissance suffisante pour opérer des merveilles dans une direction plus vraiment conforme à ses progrès.

Mais il s'agit moins, à la vérité, d'une direction précise, de l'expression motivée et pour ainsi dire prévue d'un état de l'opinion se faisant jour à la faveur d'une circonstance favorable et s'imposant par sa logique même, que d'un oubli complaisant du passé, d'une négation systématique de l'ensemble des théories formant la base même des arts plastiques, en faveur d'une esthétique nouvelle ne tendant à rien moins qu'à libérer l'artiste de toute recherche d'intérêt en dehors de ce qui l'environne, comme de tout effort vers la perfection, par l'élévation de la pensée ou simplement le choix raisonné du type ou de la forme.

Le nom même que l'on adopta pour caractériser la tendance nouvelle resta vide de sens pour ceux qui l'inscrivirent sur leur drapeau. « Inventée par les critiques comme une machine de guerre pour exciter à la haine contre une génération nouvelle, disait Champfleury, l'arme est de celles qui blessent ceux qui l'emploient. Le mot réalisme, un mot de transition qui ne durera guère plus de trente ans, est un de ces termes équivoques qui se prêtent à toutes sortes d'emplois et peuvent servir à la fois de couronne de lauriers et de couronne de choux [1]. »

[1] *Le réalisme*, 1857, p. 5.

Digitized by Google

A l'époque où paraissaient ces lignes, l'ardeur de beaucoup de néophytes commençait à se refroidir, et nous devons remonter de quelques années dans l'histoire de l'art pour rencontrer les premières manifestations du système. On les vit se produire au Salon de Paris de 1850-1851.

En même temps que l'on apprenait à connaître la *Jane Shore* de Robert Fleury, le *Tintoret peignant sa fille morte* de Léon Cogniet, l'*Appel des condamnés* de C. Muller, le *Souvenir de la guerre civile* (la Barricade), de Meissonier, vinrent se produire également, sous le nom d'artistes alors à leurs débuts, des pages rustiques créées, certainement, sous l'impression des nouvelles pastorales de George Sand et des études de mœurs bourgeoises de Champfleury.

Les noms des auteurs n'évoquent pas le souvenir d'œuvres assez marquantes de l'époque, pour qu'il faille s'arrêter à l'analyse des créations auxquelles ils se rattachent. Un seul, parmi les novateurs, absorbait du reste l'attention unanime, et la grandeur de ses toiles mettait en relief, dès l'abord, une hardiesse d'affirmation qui devait conduire rapidement à la notoriété.

Le peintre Gustave Courbet, né à Ornans (département du Doubs), en 1819, n'était pas un inconnu. Au Salon de 1849 il avait figuré avec un grand tableau auquel le Jury accorda une médaille d'or et que le Gouvernement français envoya bientôt au Musée de Lille. Ce tableau, qui portait pour titre *Une après-dînée à Ornans* [1], se signalait par une vigueur peu commune d'exécution. D'une conception totalement nulle, car il s'agissait d'un intérieur de cabaret où les personnages rassemblés autour d'une table, fument, boivent et s'assoupissent près d'un joueur de violon, l'œuvre révélait un robuste tempérament de peintre et s'écartait, non moins par son exécution que par sa conception, des divers courants de l'époque.

Le fait de choisir pour l'exhibition d'un sujet d'une telle insignifiance la grandeur naturelle des figures, disait assez que le peintre visait à rompre en visière aux théories académiques; mais il avait fallu une incontestable virtuosité de pinceau pour triompher des difficultés de l'entre-

[1] Musée de Lille, n° 139. Le tableau de Courbet a perdu aujourd'hui tout son éclat.

Digitized by Google

prise; on envisagea surtout l'œuvre à ce point de vue, et l'artiste fit une moisson d'éloges nullement imméritée.

D'autres créations suivirent : le *Violoncelliste,* le *Retour de la foire de Flagey,* les *Casseurs de pierres,* et surtout l'*Enterrement à Ornans,* dessinèrent plus nettement, au Salon de 1850-1851, l'intention du peintre de persévérer dans sa voie novatrice. L'*Enterrement* mesurait jusqu'à 7 mètres de long, presque la longueur de la *Cène* de Léonard de Vinci, et les *Casseurs de pierres,* deux simples personnages cassant des cailloux au bord d'une route, occupaient une toile large de 3 mètres.

Ces œuvres appelaient trop naturellement la discussion, pour qu'il faille s'étonner des orages qu'elles provoquèrent. Leur auteur, dont on ne calomnie pas la mémoire en disant que rien ne répondait mieux à ses aspirations, « fit bientôt plus de bruit par la ville que vingt célébrités et leurs coteries [1] ».

Pour rester dans la vérité des choses, il nous faut dire que les fervents du novateur ne formaient point légion, et si l'on a beaucoup exalté la peinture de Courbet dans le cours des dernières années, il est certain que les *Casseurs de pierres* et l'*Enterrement à Ornans,* pas plus que les *Paysans de Flagey,* ne provoquèrent un bien vif enthousiasme au temps de leur apparition. La grande faveur devait leur venir un peu plus tard, grâce surtout à l'appui de Proudhon.

Ce publiciste célèbre, qui fut l'ami de Courbet et l'inspirateur probable de plus d'une de ses toiles, n'hésitait pas lui-même à proclamer que quoi qu'en pussent dire les hérauts et les vulgarisateurs de l'idée nouvelle, de longtemps le public ne pourrait comprendre et supporter une leçon pareille à l'*Enterrement,* ni l'artiste, compter pour de telles œuvres sur le suffrage des masses [2].

Mais le philosophe, tout en s'avouant médiocre juge en matière d'art, voyait, pour son propre compte, des beautés jusque dans les choses les plus malencontreuses de son artiste de prédilection. Il s'exaltait devant les *Casseurs de pierres,* au point de transformer en qualités des défauts manifestes.

[1] Th. SILVESTRE, *Les artistes français.* Bruxelles, 1861, p. 59.
[2] P.-J PROUDHON, *Du principe de l'art et de sa destination sociale,* p. 205.

Digitized by Google

Le garçon qui porte les pierres à l'ouvrier, est d'un dessin médiocre. C'est que, « enchaîné avant le temps à la corvée, il se découd; son épaule se déjette, sa démarche est affaissée, son pantalon tombe; l'insoucieuse misère lui a fait perdre le soin de sa personne et la prestesse de ses dix-huit ans; broyé dans sa puberté, il ne vivra pas ». Bref, Proudhon l'assure, les *Casseurs de pierres* valent une parabole de l'Évangile! Il ne semble pas que cet avis ait prévalu. Qualifiés de « laids mannequins porteurs d'affreuses loques [1] », à leur première apparition, les *Casseurs de pierres*, dont on a pu apprécier depuis les incontestables qualités picturales, ont désarmé la sévérité de bien des connaisseurs. En 1882, pourtant, nous les trouvons toujours qualifiés de « mannequins », par un grand organe artistique [2] et, peu avant, M. Paul Mantz, avec l'autorité qui s'attache aux appréciations d'un juge si compétent, déclarait encore préférer de beaucoup le paysage aux figures [3].

Pour l'*Enterrement*, de l'avis même de Théophile Silvestre, l'ami, et de plus le biographe de Courbet, « la composition violait toutes les règles [4] » et le mépris des convenances esthétiques était ici d'autant plus regrettable qu'aucun sujet n'eût été plus propre à émouvoir le spectateur.

Si le peintre ne recule pas devant la tâche de représenter cinquante personnages de grandeur naturelle, pour les réunir autour d'une tombe, on peut être assuré que sans se mettre en frais excessifs d'imagination, il pourra faire jaillir de là une émotion suffisante pour atténuer des détails parfois choquants, et qui se mêlent inévitablement à toute scène prise sur le vif. Le plus grand artiste sera alors celui qui rendra le mieux le côté poignant de la funèbre cérémonie.

« Le même sentiment, disait Proudhon, a de tout temps inspiré les artistes qui, dans ce cas, peut-être le seul, ont su tout à la fois obéir à l'idéal de leur époque, et rester dans la vérité éternelle de leur mission. Il semble qu'en effet aucune aberration de l'art ne soit possible dans cette solennité déchi-

[1] Correspondance parisienne de l'*Indépendance belge;* 22 janvier 1851.
[2] *L'Art,* article de M. Véron, t. XXIX, p. 225.
[3] *Gazette des beaux-arts,* t. XVII, 2e série (1878), p. 514.
[4] *Les artistes français.* Bruxelles, 1861, p. 56.

Digitized by Google

rante, où une famille, entourée des amis et des proches, assistée du clergé, va mettre le sceau à la grande séparation, en rendant à la terre le cadavre d'un époux, d'un père. Comment donc Courbet s'est-il complu à envelopper une pareille scène de ridicule, à en rendre grotesques les acteurs? » Inutile de dire que c'est par une transfiguration du peintre que l'auteur répond à cette question, et sa pensée se traduirait assez bien par ce vers du poëte de 1830 :

« Le cynisme des mœurs doit salir la parole... »

Toutefois, l'opinion contraire s'était fait jour avec une énergie non équivoque, au Salon de 1851.

On eut beau expliquer que Courbet n'avait fait que copier servilement une scène fréquente; désigner par leurs noms les principaux acteurs : la mère du peintre, un parent de Proudhon, une sacristine, mademoiselle Brûleport, etc., « si ce sont des portraits de famille, laissez-les à Ornans, s'écrie le critique de la *Revue des Deux Mondes*. Pour nous, qui ne sommes pas d'Ornans, nous avons besoin de quelque chose de plus qui nous attache. Ce qu'il fallait éveiller chez le spectateur, c'était le sentiment naturel qui accompagne une pareille scène; or, ce n'est pas précisément l'effet obtenu par vos grotesques caricatures. On ne pleure guère devant cet enterrement, et cela prouve bien que la vérité n'est pas toujours vraie [1]. »

L'*Enterrement,* d'après son auteur, devait être l'enfouissement du romantisme. Ne fallait-il pas, dès lors, lui être supérieur en simplicité, en correction, en émotion véritable, se garder surtout de la charge et ne pas rendre choquante, jusque par les dimensions de l'œuvre, l'indifférence du peintre devant une pareille scène?

Théophile Silvestre a laissé de ce tableau une description singulièrement expressive et peu propre, quoique tracée par une plume bienveillante, à faire admettre les écarts de l'artiste [2]. Pour quiconque a présentes à la mémoire les toiles où Knaus et Vautier ont voulu représenter, eux aussi,

[1] DE GEOFFROY, *Revue des Deux Mondes,* 1851, t. I, p. 881.
[2] Théophile SILVESTRE, *Les artistes français,* pp. 53 et suiv.

Digitized by Google

l'enterrement à la campagne, sous l'empire de l'émotion discrète d'une scène de deuil, l'œuvre de Courbet sera plus brutale encore.

N'est-il pas permis de qualifier de non-sens l'idée d'un peintre de choisir pour sujet d'un vaste tableau, un épisode lugubre, précisément pour écarter de sa représentation ce qui peut légitimer un tel choix : une émotion perçue et transmise? Tout n'est pas nécessairement grotesque dans une assemblée aussi nombreuse que celle reproduite par Courbet, et dont le but n'est pas sans doute l'amusement, à l'instar des *Scènes populaires* de Monnier.

L'*Enterrement* appartient aujourd'hui au gouvernement français, avec d'autres toiles de son auteur. Le temps, et peut-être même la majesté du lieu où elle figure, atténueront petit à petit, aux yeux de la foule, ce que la peinture avait de répulsif à sa première apparition. On y cherche aujourd'hui des qualités propres à justifier l'honneur d'avoir pénétré dans les musées de l'État, et déjà M. Jules Claretie voyait en imagination Courbet et Vélasquez converser nuitamment dans les galeries du Louvre [1]. N'est-ce pas beaucoup se hâter?

Si peu constante que soit, de nos jours, l'opinion, il nous paraît difficile de croire qu'on en arrive bientôt à faire de Courbet, surtout en faveur de sa vaste page du Louvre, un émule du plus grand des peintres espagnols, d'un des maîtres les plus illustres de tous les temps.

Dans ce milieu de bonne compagnie, l'*Enterrement* apparaît comme une gageure. Sans composition, sans relief, d'une gaucherie enfantine de dessin et d'une vulgarité de type allant jusqu'à la charge, on ne peut que s'étonner du bruit qui s'est fait autour d'une œuvre si incomplète, et tout homme de goût souscrira à cette appréciation de M. Alfred de Lostalot sur le peintre franc-comtois : « Il ne saurait frayer avec les gros bonnets de l'Olympe ; c'est une nature par trop rustique. S'il est vrai qu'il pourrait donner à certains une leçon de peinture — on sait avec quelle bonne grâce il s'offrait à rendre ce service, — il s'exposerait, de son côté, à recevoir de l'interpellé de précieux enseignements, accompagnés peut-être d'observations peu flat-

[1] *Le Temps*, décembre 1881.

Digitized by Google

teuses, comme celle-ci : Ce n'est décidément pas pour vous qu'a été inventé le dicton : *Mens agitat molem* [1]. »

L'année 1855 est une date importante dans l'histoire du réalisme. Le jury de l'Exposition universelle n'ayant consenti à exposer que onze toiles du « maître peintre d'Ornans » — tel était le titre que s'était attribué Courbet, — le novateur entreprit de réunir le surplus de son œuvre dans un local indépendant, qu'il décora d'une enseigne portant le mot *réalisme*. Ce fut alors que parut la profession de foi que tout le monde a lue : « Le titre de réaliste m'a été imposé [2] comme on a imposé aux hommes de 1830 celui de romantique. Les titres n'ont donné en aucun temps une idée juste des choses; s'il en était autrement, les œuvres seraient superflues.

» Sans m'expliquer sur la justesse plus ou moins grande d'une qualification que nul, il faut l'espérer, n'est tenu de bien comprendre [3], je me bornerai à quelques mots de développements pour couper court aux malentendus.

» J'ai étudié, en dehors de tout système, et sans parti pris, l'art des anciens et l'art des modernes. Je n'ai pas plus voulu imiter les uns que copier les autres; ma pensée n'a pas été davantage d'arriver au but oiseux de l'art pour l'art. Non! j'ai voulu tout simplement puiser dans l'entière connaissance de la tradition le sentiment raisonné et indépendant de ma propre individualité.

» Savoir pour pouvoir, telle fut ma pensée. Être à même de traduire les mœurs, les idées, l'aspect de mon époque, selon mon appréciation, être non seulement un peintre, mais encore un homme, en un mot, faire de l'art vivant, tel est mon but. »

Cette expression de principes dans laquelle il est difficile de ne pas trouver, une fois de plus, l'intervention de quelqu'un de ces enthousiastes, peu compétents en matière d'art, et qui prennent volontiers pour des traits de génie

[1] *Gazette des beaux-arts*, t. XXV (1882), p. 582.
[2] Courbet s'était *proclamé* réaliste dès l'année 1851. Voir à ce sujet : Paul Mantz, *Gazette des beaux-arts*, 1878.
[3] On verra plus loin la définition du réalisme, donnée par Courbet lui-même.

Digitized by Google

jusqu'aux imperfections de l'artiste préféré, cette expression de principes n'aboutissait pas nécessairement au triomphe du disgracieux et du vulgaire. Malheureusement, entendue à la façon de son auteur, elle venait légitimer toutes les appréhensions qu'avaient données ses premières œuvres aux esprits soucieux de l'avenir de la peinture.

« Depuis Jean Cousin jusqu'à Proudhon, disait M. H. Delaborde, depuis Watteau jusqu'à Granet, tous, selon la mesure de leurs forces et le genre de leur talent, se proposaient avant tout de traduire avec le pinceau, soit une pensée profonde, soit une idée ingénieuse. L'esprit, sinon la poésie, était l'élément principal de leurs travaux, et les tableaux produits pendant plus de trois siècles attestent, sauf la dissemblance des moyens employés, ce caractère essentiel de la peinture dans notre pays. Jamais, avant le temps où nous sommes, on n'aurait consenti à montrer ou à voir dans une œuvre d'art la vérité sans l'idéal; jamais on ne se serait avisé de substituer à cette « haute délectation de l'intelligence », dont parle Poussin, je ne sais quelle sensation superficielle et fugitive résultant de l'imitation brute de la réalité ou des artifices de la brosse. Un si mince plaisir nous suffit aujourd'hui, et lorsqu'un tableau, quel qu'il soit, a éveillé en nous cette sensation, nous faisons bon marché du reste [1]. »

Les partisans de Courbet, eux-mêmes, ne se sentaient pas absolument rassurés sur l'avenir d'une théorie qui n'allait à rien moins qu'à nier l'idéal. Passe encore pour quelques peintres en quête de notoriété; mais évidemment, aucun écrivain sérieux n'était disposé à transférer du domaine artistique au domaine littéraire, un système où l'imagination perdait tous ses droits. « Je n'aime pas les écoles, je n'aime pas les drapeaux, je n'aime pas les systèmes, je n'aime pas les dogmes, s'écriait Champfleury. Il m'est impossible de me parquer dans la petite église du *réalisme,* dussé-je en être le dieu... J'ai peut-être prononcé quelquefois le mot de réalisme, et j'en ai menacé mes adversaires comme d'une machine de guerre formidable, mais je l'ai fait dans un moment d'emportement, abasourdi par les cris de la critique qui s'obstinait à voir en moi un être systématique, une sorte de mathéma-

[1] Henri Delaborde, *Mélanges sur l'art contemporain : Le Salon de 1853,* p. 69

Digitized by Google

ticien calculant des effets de réalité, et s'entêtant à restreindre ses facultés. »

Puis, en allant, il s'exalte, et trouve des accents d'une véritable éloquence à opposer aux théories les plus vantées des fanatiques de la nouvelle école.

« Comment se fait-il qu'Aristophane, Cervantès, Shakespeare, l'Arioste, Gœthe, Byron aient pu être admirés en France et nous aient paru de grands génies forts et vivaces, quoique garrottés par les traducteurs et dépouillés de leurs riches vêtements nationaux?

» Un tel exemple ne prouve-t-il pas l'infériorité de la forme et la puissance de l'idée? De l'idée il restera toujours quelque chose [1]. »

Et de la même plume tombe cette phrase superbe : « Va, esprit rapetissé, étroit, tu es incapable de sentir et de comprendre les belles imaginations sorties de l'idéalisation! Il te faut une plate réalité mesquine, qui se voie, qui se touche, et tu nies les efforts de ces plongeurs qui se jettent résolûment au fond de la mer pour y chercher des perles précieuses afin d'en parer leurs créations. »

L'apostrophe pouvait ne pas viser directement Courbet, mais il faut reconnaître qu'elle trahissait peu d'enthousiasme pour sa méthode, car le jour, hélas! n'était pas éloigné où le peintre lui-même allait proclamer, *urbi et orbi*, que la base du réalisme est la négation de l'idéal, « ce qu'aucun artiste (on se l'explique sans peine) n'avait osé affirmer avant lui [2] ».

Nous avons cité l'avis de Proudhon. Le livre *Du principe de l'art et de sa destination sociale* est conçu presque entièrement pour exalter la tendance du peintre franc-comtois. D'une forme entraînante, cette étude, pour qui la considère au point de vue de l'art, est un mélange de sophismes et de contradictions. Pour être un joûteur d'une rare souplesse, Proudhon érige sur un fond d'idées nullement vulgaires, les aperçus d'un esprit impénétrable au charme de la peinture, toute acception de système étant mise à part. Lorsque son examen porte sur une création artistique, il l'envisage à la façon de l'anatomiste que la composition, l'expression, le coloris, le modelé,

[1] *Le réalisme*, p. 16.

[2] Eugène Gressin-Dumoulin, *Compte rendu des travaux du Congrès artistique d'Anvers*. Anvers, 1862, p. 173.

Digitized by Google

la perspective d'une œuvre laisseraient indifférent, et qui s'arrêterait à démontrer le côté défectueux d'une attache ou le vice d'insertion d'un muscle.

Et, cependant, Proudhon non plus ne se montre à l'aise devant le réalisme envisagé comme théorie esthétique. Il peut juger sévèrement les anciens et les modernes, trouver David, Delacroix, Ingres, Rude ou Vernet également absurdes, cela ne l'empêche pas de poser cette question : « Le but de l'artiste est-il de reproduire simplement les objets sans s'occuper d'autre chose, de ne songer qu'à la réalité visible et de laisser l'idéal à la volonté du spectateur? En d'autres termes, la tendance de l'art est-elle au développement de l'idéal, ou bien à l'imitation purement matérielle dont la photographie serait le dernier effort? » Et voici la réponse de ce promoteur du réalisme : « Il suffit de poser la question ainsi pour que tout le monde la résolve : l'art n'est rien que par l'idéal, ne vaut que par l'idéal; s'il se borne à une simple imitation, copie ou contrefaçon de la nature, il fera mieux de s'abstenir; il ne ferait qu'étaler sa propre insignifiance en déshonorant les objets mêmes qu'il aurait imités. Le plus grand artiste sera donc le plus grand idéalisateur; soutenir le contraire serait renverser toutes les notions, mentir à notre nature, nier la beauté et ramener la civilisation à la sauvagerie. »

Cependant, contradiction étrange! ce fut en Proudhon et Champfleury que Courbet trouva ses plus énergiques champions. Du reste, ils avaient les plus généreuses illusions sur ce qu'ils croyaient être les débuts d'une réforme féconde. A leurs yeux, et peut-être ne se trompaient-ils pas complètement, la direction nouvelle n'était qu'une conséquence de la révolution de 1848 [1], quelque chose comme une libération : l'art démocratique et égalitaire triomphant de l'art aristocratique ou bourgeois. « Logiquement (le hasard est souvent logique), dit Champfleury, mieux valait peindre d'abord les basses classes où la sincérité des sentiments, des actions, des paroles est plus en évidence que dans la haute société. »

[1] Dans une notice sur de Reiffenberg, insérée dans l'*Indépendance belge* du 11 mai 1850, M. É. Fétis nous apprend que ce savant était persuadé que la décadence des lettres et des arts serait la conséquence inévitable de la révolution de 1848. Le chagrin que lui causait cette pensée contribua beaucoup à hâter sa mort.

Digitized by Google

Proudhon voulait que la nouvelle tendance prît le nom de *peinture critique,* et il frappait le romantisme d'estoc et de taille, comme un agent de corruption. « A quoi, bon Dieu! tout ce barbouillage peut-il servir, s'écriait-il, passant en revue l'œuvre de Delacroix : suis-je même sûr qu'un artiste qui passe sa vie à regarder dans son imagination les figures de Jacob, de Sardanapale, de Marc-Aurèle, celles de Lazare et de Méphistophélès, aura bien vu les personnes vivantes qu'il aura observées dans les circonstances les plus intéressantes de leur vie? Mais, encore une fois, cet homme qui voit au delà des siècles, qui fréquente le monde invisible, qui habite le surnaturel, qui fait poser devant lui les héros de Shakespeare, est-il capable de bien observer et de comprendre ce qui se passe autour de lui? Les quatre cinquièmes de l'œuvre de Delacroix sont niaiserie pure, l'autre cinquième reste douteux et suspect! » Et si, enfin, l'on veut connaître à quoi aboutissait cette esthétique nouvelle, voici le dernier échantillon des erreurs où peut conduire l'esprit de système :

« Les tableaux du peintre d'Ornans sont des miroirs de vérité, dont le mérite, jusqu'à présent hors ligne, abstraction faite des qualités et des défauts de l'exécution, est dans la profondeur de l'idée, la fidélité des types, la pureté de la glace et la puissance du réfléchissement.

» Cette peinture-là vise plus haut que l'art lui-même; sa devise est l'inscription du temple de Delphes : Homme, connaissez-vous vous-même, concluant sous forme de sous-entendu, avec Jean le Baptiseur, et amendez-vous si vous tenez à la vie et à l'honneur [1]. »

[1] *Du principe de l'art,* etc., p. 228.

Digitized by Google

III

Le réalisme, selon quelques critiques, n'aurait fait que poursuivre, à vingt-cinq années d'intervalle, un mouvement commencé par le romantisme. Il fallait réagir contre l'esprit de système, le faux goût et tout l'ensemble de solennelles doctrines tenues en honneur par l'école académique. Les *Casseurs de pierres* et le *Dante et Virgile* ne seraient, dès lors, que des formes différentes d'une même réaction.

Nous avons montré déjà que c'était particulièrement au romantisme qu'en voulaient Proudhon [1] et ceux dont il personnifiait les tendances.

En effet, le mouvement réaliste, par son dogmatisme même, n'était pas sans avoir des points de contact avec l'esprit qui animait les partisans de David. La très grande différence résultait beaucoup moins des principes que des hommes qui se prétendaient appelés à les personnifier.

David autoritaire et Courbet sans gêne et bon enfant, expliquent toute la distance qui sépare les travaux des deux artistes.

Il y avait sans doute aussi, dans les premiers succès remportés par les œuvres de Courbet, une part importante à faire à certaines préoccupations politiques. L'artisan, représenté de grandeur naturelle, dans ses habits de travail, aspirait à prendre la place du grand seigneur ou du bourgeois en gilet de satin, comme la veille on avait vu des hommes du peuple se prélasser sur le trône du roi des Français et se griser de ses vins.

Assurément, ce n'était pas donner une plus grande somme d'intérêt à l'ouvrier, de le transporter sur la toile que de lui donner les grands rôles dans des drames à sensation [2], des romans à tendances humanitaires, comme ceux de Gastineau [3], ou des vaudevilles aux visées démocratiques [4], alors

[1] *Du principe de l'art*, etc., p. 228.
[2] *Le chiffonnier de Paris; Marie-Jeanne, ou la femme du peuple*, etc.
[3] *Le règne de Satan, ou les riches et les pauvres; Comment finissent les pauvres*, etc.
[4] *Le gamin de Paris.*

Digitized by Google

qu'il occupait sa place dans le gouvernement et que des voix éloquentes réclamaient pour lui l'organisation des ateliers nationaux.

Envisagé de la sorte, le réalisme, devenu peinture à tendance, ne serait, en somme, qu'un mouvement transitoire, valant ce qu'il pouvait valoir au point de vue esthétique. Une certaine rudesse de forme, jointe à l'assourdissement des couleurs, était, en quelque sorte, une profession de foi, au même titre que les solennelles images de David avaient prétendu traduire l'austérité républicaine.

Mais que devait avoir de commun avec le progrès indéfini de l'art un mouvement de l'espèce? Est-ce que toutes les conditions exigées précédemment, non pas depuis vingt ans mais depuis des siècles, pour constituer une création vraiment belle, cessaient de prévaloir, parce qu'il avait plu à certain peintre parisien de représenter des *Paysans de Flagey* et des *Casseurs de pierres* au bord d'une route?

Comment se persuader qu'il n'y eût pas au fond de cette peinture, d'un genre nouveau, une certaine recherche de popularité? Car le peuple aussi a ses courtisans, ceux que Barbier flétrissait dans sa vigoureuse langue poétique :

> Oui, c'est pitié à voir, avec sa tête rase,
> Son corps sans pourpre et sans atour,
> Ce peuple demi-nu, comme ceux qu'il écrase,
> Comme les rois avoir sa cour!

Champfleury avait déclaré le réalisme un mot vide de sens; Courbet n'était pas du tout de cet avis. Pour lui, la définition était des plus faciles; voici comment il s'exprimait, à cet égard, au Congrès artistique d'Anvers : « Le réalisme n'est bien connu d'aucun de ses adversaires; il n'est pas aussi ancien qu'on veut bien le dire et n'a rien de commun avec les querelles des réaux et des nominaux; le fond du réalisme, c'est la négation de l'idéal, à laquelle j'ai été amené depuis quinze ans par mes études et qu'aucun artiste n'avait jamais jusqu'à ce jour osé affirmer catégoriquement... En concluant à la négation de l'idéal et de tout ce qui s'ensuit, j'arrive en plein à l'émancipation de la raison, à l'émancipation de l'individu et finalement à la

Digitized by Google

démocratie [1]!... » On voit que nous n'étions pas si loin de la vérité.

Les incartades de Courbet n'étaient pas faites pour plaire à ses amis. Proudhon, qui voulait bien que la *Baigneuse* et le *Retour de la conférence* fussent « des œuvres de grand style, les seules dignes de notre temps », partait précisément de ce principe que le peintre devait être un idéaliste. Aussi s'empressait-il de le déclarer : « Courbet n'a inventé ni réalisme, ni idéalisme, pas plus que la nature. Ce qu'il fait a été fait avant lui; il l'est aujourd'hui par d'autres que lui, souvent ses rivaux, quelquefois ses vainqueurs. Tout ce qu'on a dit à son occasion et qu'il a débité lui-même est dépourvu de bon sens [2]. »

Le rapprochement de ces diverses opinions ne démontre-t-il pas à toute évidence, et abstraction faite des œuvres elles-mêmes, que le mouvement réaliste ne se fondait nullement sur la préoccupation d'un progrès indéfini, précisément parce que l'on entendait qu'il fût en harmonie avec un état de l'opinion essentiellement éphémère? Nous montrerons plus loin à quel concours de circonstances, assez peu prévu, il fut redevable de s'étendre au delà des limites rationnelles.

Il est des hommes que l'on n'aborde qu'avec réserve; leur haine du bruit donne presque la portée de l'indiscrétion à tout détail sur une existence volontairement dérobée à l'avide curiosité des foules. Si d'autres n'ont été que trop bien servis dans leur désir de notoriété par leur propre amour de la mise en scène et l'empressement des biographes, on ne peut méconnaître que l'histoire de l'art n'ait dérivé un intérêt considérable de l'étude des particularités de la vie des artistes. Une œuvre s'est présentée sous un aspect nouveau le jour où les circonstances de son enfantement se sont révélées.

Le désir de s'éclairer sur la pensée intime d'un auteur se légitime complètement lorsque, dans ses travaux, il s'éloigne avec éclat de la voie commune. Courbet fut de ceux-là.

Delacroix, très jeune encore, écrivait à son camarade Pierret : « Apprends-

[1] Eugène Gressin-Dumoulin, *Compte rendu des travaux du Congrès artistique d'Anvers.* Anvers, 1862, p. 173. — « La démocratie ne prend conseil que de la nature à laquelle sans cesse elle ramène les hommes », disait David à la Convention nationale.

[2] *Du principe de l'art*, p. 284.

Digitized by Google

moi à étouffer les élans ambitieux, et quand j'aurai le bonheur de te revoir, retiens-moi dans la route ferme et humble que je me suis tracée [1]. »

J.-F. Millet, le paysagiste, que Gautier disait « bien différent des maniéristes en laid qui, sous prétexte de réalisme, substituent le hideux au vrai », écrivait ceci : « Mes critiques sont gens instruits et de goût j'imagine, mais je ne peux me mettre dans leur peau, et comme je n'ai jamais de ma vie vu autre chose que les champs, je tâche de dire comme je peux ce que j'ai vu et éprouvé quand j'y travaillais. Ceux qui veulent faire mieux ont certes la part belle [2]. »

Beaucoup plus sûr de lui, Courbet ne connut pas les hésitations si fréquentes dans la carrière des initiateurs.

« Il se fait l'apologiste de l'orgueil, dit Proudhon; en cela il se montre tout à fait artiste, mais artiste de second ordre; car s'il avait la sensibilité supérieure, il sentirait esthétiquement que la modestie a son prix; que si elle est quelquefois une hypocrisie, elle ne l'est pas toujours. La modestie est une des choses les plus délicates qu'il soit donné à l'homme de goûter; celui en qui le sophisme a étouffé ce sentiment n'est plus un homme : c'est une brute [3]... »

Paroles sévères dans la bouche d'un ami!

Sans doute, la confiance en soi a engendré bien des œuvres glorieuses, mais elle ne tolère point de relâche dans la poursuite du mieux. Se proclamer satisfait, dire que l'on a « achevé ses études », n'est pas seulement un non sens dans la bouche d'un artiste, mais le présage d'une immutabilité d'ailleurs très frappante chez Courbet.

Silvestre est plus affirmatif encore que Proudhon en ce qui concerne le jugement de l'artiste sur son œuvre. « Personne, dit-il, n'est capable de lui faire le dixième des compliments qu'il s'adresse à lui-même, du matin au soir, d'un cœur naïf, et il vous répondra, si vous lui demandez son opinion : « Je suis courbetiste, voilà tout; ma peinture est la seule vraie; je suis le

[1] Philippe Burty, *Lettres d'Eugène Delacroix*, p. 18.
[2] Piedagniel, *J.-F. Millet*.
[3] *Loc. cit.*, p. 282.

Digitized by Google

premier et l'unique artiste de ce siècle; les autres sont des étudiants ou des radoteurs. »

On voit qu'ayant à rechercher les origines du réalisme, à apprécier ses tendances, il n'était pas superflu de nous détourner un moment des œuvres pour nous enquérir des vues du représentant le plus notoire de la nouvelle école. Nous n'avons pas à pousser plus loin cet examen.

Une chose demeure acquise : la préoccupation de beaucoup sacrifier à la notoriété obtenue à tout prix. Point de laborieuse recherche de l'expression manifestée par le contraste des types; plus d'indifférence encore pour la disposition plus ou moins favorable du groupe, la justesse ou la grâce du mouvement, pour la véritable donnée pittoresque, enfin. L'*Enterrement* et le *Retour de la conférence,* les deux seules « conceptions » dans tout l'œuvre de Courbet, dissipent la dernière illusion que l'on pourrait conserver sur l'impuissance du chef de l'école réaliste à rencontrer le succès autrement que par l'abandon des règles consacrées du bon goût et des convenances esthétiques, que tant de personnes en sont venues à envisager comme une des nécessités d'un art nouveau.

Des journaux parisiens rapportaient naguère que M. Robert-Fleury, le doyen de l'Académie des beaux-arts, avait désigné à l'exposition de l'œuvre de Courbet un portrait de l'artiste, en le proclamant une œuvre digne du pinceau de Rembrandt. Les portraits qu'il fit de lui-même furent, effectivement, les études les plus châtiées du peintre. Gautier l'avait depuis longtemps constaté. « M. Courbet, disait-il, a une fort belle tête qu'il aime à reproduire en ayant soin de ne pas s'appliquer les procédés du réalisme; il réserve pour lui seul les tons frais et purs, et caresse sa barbe d'un pinceau délicat. »

Que l'on ne s'y trompe pas, d'ailleurs : nous ne voulons pas contester à Courbet un ordre de qualités picturales très méritantes et que nul homme familiarisé avec la technique de l'art ne peut méconnaître sans injustice. Aux critiques les plus acerbes se mêle presque toujours l'hommage d'une admiration, excessive aux yeux de bien des gens, rendu aux facultés peu communes du peintre : mais le temps n'a pas donné tort à ceux qui pensaient que l'avenir de l'art n'était pas, il y a trente ans, dans la voie où s'engageait le novateur et où prétendaient le pousser quelques enthousiastes.

Digitized by Google

Il n'y a pas longtemps, appréciant dans l'*Art* les œuvres du chef d'école, M. Eugène Véron n'hésitait pas à exprimer ce jugement : « En somme, Courbet a été un « maître peintre », mais en dehors du paysage il ne faut pas chercher en lui un artiste. Pour composer des scènes humaines, il lui manquait l'imagination, et ce tour particulier et supérieur de l'intelligence qui est nécessaire pour comprendre la poésie et le sens intime de la vie [1]. »

Quoi de plus juste? La peinture, si vigoureuse qu'elle soit, n'importe-t-elle que comme expression d'une virtuosité qui devra nous faire tenir pour suffisante cette qualité à l'exclusion de toute autre? Acceptons, si l'on veut, comme un progrès acquis, toute manifestation de talent se faisant jour avec la vigueur déployée quelquefois par un Courbet, mais gardons-nous de l'envisager comme autre chose qu'un moyen purement matériel. Il y a tant d'autres exigences à satisfaire, que le grand art doit pousser très au delà pour répondre à sa destination sociale.

IV

Il nous presse de faire abstraction des personnalités. Allons aux œuvres, et demandons-nous si les défauts et les côtés faibles du réalisme étant établis, il est permis d'attribuer au système une conception nouvelle de la nature, appelant les regards de nos contemporains et de nos successeurs vers une forme d'expression inaperçue ou jusqu'alors incomprise. En toute conscience nous hésitons à répondre affirmativement.

On nous citera telle page admirée, à juste titre, pour sa sincérité; mais aussitôt se présenteront en foule à notre souvenir des maîtres de premier ordre, qui en Espagne, en Flandre, en France, en Angleterre, en Hollande, surtout, ont laissé des chefs-d'œuvre exclusivement inspirés des scènes les plus insignifiantes de la vie journalière.

[1] *L'Art*, t XXVIII, p. 234.

Digitized by Google

Frans Hals, Rembrandt, Jean Steen, Ostade, Pierre de Hooghe, Teniers, Velasquez, Le Nain, Chardin, Gainsborough, Wilkie, ne sont évidemment pas moins sincères que les représentants de l'école réaliste, ni moins poétiques dans leur interprétation de la nature; nous disons même qu'ils le sont davantage.

En Hollande, une nombreuse école d'écrivains épanche en des poèmes naturalistes ce puissant amour du simple et du vrai qui se révèle dans les œuvres des peintres du XVII[e] siècle, et contribue à nous les faire comprendre.

Le réalisme hollandais, si réalisme il y a, avait sa raison d'être. Sous peine de n'exister pas, quelle autre forme pouvait revêtir l'art, chez un peuple libéré par la plus héroïque des résistances du joug de l'Espagne et, du même coup, des traditions espagnoles, et dont les artistes voyaient tarie pour eux une source deux fois séculaire d'inspirations : la peinture religieuse? « Un peuple nouveau et qui a su s'affranchir du pape, du roi et de la tradition, naît à la vie. Un tel milieu est seul capable de faire éclore un tel art, un art radicalement indépendant, naturel, humain, et tiré des entrailles mêmes de la nation.

» Vous cherchez le fauteur premier, le principe; il est là. Le peuple s'est élevé au rang de nation, l'homme a conquis son individualité. La conscience d'un bien si précieux et si chèrement acheté imprime à ses actes, comme à sa pensée, un caractère inouï d'audace et de virilité. Voulez-vous un écho des sentiments qui dominent à cette époque? Lisez l'hymne par lequel Daniel Heinsius salue la victoire de Gibraltar; lisez cette strophe où le poète, s'adressant aux Espagnols, s'écrie : « Enlevez-nous les champs où nous vivons — nous nous confierons sans crainte à l'océan. — Partout où vous n'êtes pas, là pour nous est la patrie. — L'oiseau est né pour fendre l'air — d'une aile rapide; le cheval pour obéir au frein; — le mulet pour porter de lourds fardeaux — ou haler nos barques sur les canaux; nous, nous naissons pour être libres! » Fières et nobles paroles où éclate dans toute sa force la haine de l'oppression, le culte de la liberté, passionné, exclusif et préparé à tous les sacrifices! « Partout où vous n'êtes pas, là est notre patrie! » Quelle protestation vaut ce cri sorti du cœur, et quel peuple que celui qui

Digitized by Google

applaudissait à de tels accents et qui s'inspirait d'un patriotisme si ardent [1]! »

Exalter la patrie, ses hommes illustres par la valeur guerrière et la science; faire revivre sur la toile les traditions locales; retracer jusqu'aux habitudes du peuple, ses fêtes, ses joies; rendre les lointains horizons, l'aspect des campagnes verdoyantes peuplées d'innombrables troupeaux — cette richesse de la Hollande, — les villes pittoresques; rappeler en des marines, sans rivales, les aspects changeants de la mer, et jusqu'à la puissance des flottes néerlandaises, quoi de plus conforme, en vérité, au rôle de l'artiste, et quoi de plus patriotique à ce moment de l'histoire?

Et combien merveilleusement s'accomplit la tâche? Frans Hals, Rembrandt, Ostade, Jean Steen ne sont pas des raffinés, bien moins, sans doute, des théoriciens. Que de charme pourtant, de profondeur, de pénétrante émotion dans les scènes inspirées de ce qui les environne, et combien ici l'exécution rehausse, par sa conscience et sa simplicité, l'amour fervent du vrai!

Mais les peintres de la Hollande procèdent avec un tact exquis de convenances esthétiques. Ostade ne s'avise point de nous donner ses tabagies dans le format pompeux des toiles religieuses, et s'il prend fantaisie à Rembrandt de nous montrer un échaudoir, il saura dire à merveille sa pensée sans faire de la carcasse d'un bœuf ou d'un porc, le pendant de la *Ronde de nuit*.

Que l'on ne s'y trompe pas cependant : ce mouvement si plein d'intérêt fut de courte durée, et le grand Rembrandt lui-même mourut pauvre et obscur, délaissé en faveur d'une école dont les chefs, tant considérés, attirent à peine aujourd'hui l'attention. Certains de ses élèves eux-mêmes en vinrent à se travestir au point d'être méconnaissables dans leur nouvelle manière.

Si nous avons montré à quelles causes l'école hollandaise dut sa plus vive splendeur, nous aurons fait comprendre aussi qu'un mouvement analogue ne s'improvise pas. — On l'a dit avec raison : « L'action de faire fleurir les arts dans un pays se combine de deux éléments : des bons ouvrages que l'on fait et de l'intérêt que la nation y porte [2] »; ils sont inséparables.

[1] C. Vosmaer, *Frans Hals*. Leyde, 1873.
[2] Delécluze, *loc. cit.*, p. 56.

Analysant le mouvement artistique contemporain, un critique allemand dit, avec infiniment de raison, que si la peinture n'a pas pour objet unique de traduire la beauté régulière, que l'ordinaire et même le laid peuvent ajouter à la force expressive d'une œuvre, il faut pourtant se garder de croire que le bourbier possède seul des charmes et que le pur cristal de la source offense le regard.

« Au point de vue matériel, ajoute ce critique, la nouvelle théorie ne constituait pas un progrès bien marquant, car le fait de peindre une trogne de buveur avec une vérité telle que l'on croit percevoir jusqu'à l'odeur d'absinthe qu'elle exhale, ne fournit pas la preuve d'un talent supérieur à celui qu'il faut pour rendre d'une manière parfaite un profil régulier [1]. »

En effet, talent pour talent, le connaisseur préférera toujours une conception élevée à une conception vulgaire, et la véritable supériorité de l'artiste ne peut se manifester que par le choix heureux des types et des situations que son pinceau doit exposer à nos regards. Quant à bien peindre, à notre sens c'est son premier devoir, comme le premier devoir d'un écrivain est de connaître sa langue. Que dirait-on d'une école qui trouverait que tout écrivain, digne du nom, doit puiser dans les jargons populaires pour être de son temps et être compris de ses lecteurs?

Le réalisme se fit toutefois accepter comme théorie; il avait, selon l'expression de Champfleury, « fait son trou dans le dictionnaire », il eut ses partisans énergiques et d'une entière bonne foi, mais que la somme de leurs connaissances artistiques n'appelait pas à faire autorité; il devait avoir aussi ses flatteurs, comme les a toute puissance.

A les entendre, cette condition essentielle de toute œuvre peinte : la sincérité, ne pouvait résider que dans les motifs de la plus franche insignifiance, aisément saisissables pour la foule, au même titre que l'imagerie populaire. La rudesse, souvent ainsi, se confond avec la franchise. « Ils ont cru, les malheureux, faisant injure à ce peuple auquel ils prétendaient s'adresser, que l'art vulgaire pouvait être l'art populaire [2]! » s'écrie Chesneau.

[1] Seemann, *Geschichte der Kunst im XIX. Jahrhundert*. Leipzig. 1881, p. 127.
[2] *L'Éducation de l'artiste*, p. 19.

Digitized by Google

Non moins altérés de notoriété que les critiques l'étaient d'influence, de jeunes artistes crurent voir s'ouvrir pour eux les voies du succès par un ordre de travaux certainement très abrégés, puisqu'il allait être permis — mieux encore, exigé, — de ranger parmi les choses secondaires, la conception, le choix raisonné du type et, comme conséquence inévitable, l'étude de la forme elle-même.

L'imprévu, en toutes choses, a cet avantage indéniable de frapper l'attention des foules. Toute forme nouvelle d'expression, sans constituer nécessairement un progrès, implique pourtant l'initiative et suppose un effort. Être discuté n'est pas le lot du premier venu et, d'ailleurs, la confiance qu'on possède en ses propres jugements est rarement si robuste qu'une voix secrète ne vienne, à certaines heures, rappeler à l'homme sa faillibilité. L'artiste, le jeune artiste surtout, est sujet à ces moments de doute qui donneront à la formule nouvelle l'apparence d'un progrès, et plus d'un a payé cher l'illusion.

D'autres causes allaient contribuer à la diffusion rapide des théories du réalisme. En premier lieu vint la fréquence des expositions.

Appelés à choisir entre l'exhibition d'une œuvre hâtive et l'abstention, peu d'artistes croient devoir préférer celle-ci. Le besoin de notoriété, l'espoir des récompenses, les chances de la vente, la crainte de l'oubli : autant de motifs qui les poussent.

« ... Le temps ne fait rien à l'affaire »,

dit Alceste, et c'est aussi notre opinion; mais par cela même on doit déplorer de voir le peintre travailler sous l'empire de la crainte d'être surpris par le temps, travailler, enfin, en vue d'un délai fatal et rapproché. C'est, au regard de certains articles de revues, longuement médités et soigneusement écrits, la chronique hebdomadaire, paraissant à l'heure dite. Pour émaner d'un écrivain de valeur, cette dernière ne cessera pas de se ressentir des circonstances de sa production.

Les effets fâcheux de la fréquence des expositions ont été maintes fois établis; ils étaient appréciés, dès l'année 1852, lorsque les salons devinrent annuels, par Gustave Planche, avec une incontestable hauteur de vues. « Je pense, écrivait ce critique, que les expositions annuelles sont très loin de servir au développement de l'art; envisagée comme industrie, assimilée

Digitized by Google

aux toiles peintes de Mulhouse, aux indiennes de Rouen, la peinture peut s'en réjouir, en tirer parti. Considérée comme l'une des formes de l'imagination humaine, elle ne peut que s'en attrister.

» Quand les salons se succédaient à des époques irrégulières, les peintres, les statuaires travaillaient pour lutter; l'exposition devenait un champ de bataille. Aujourd'hui que les salons sont loin d'avoir la même importance, la lutte s'engage à peine entre quelques sujets d'élite, la plupart des artistes ne voient dans les expositions annuelles qu'une occasion de placer les produits de leur industrie : l'activité mercantile a remplacé l'émulation.

» Assurément le travail de la pensée ne saurait se contenter des applaudissements, il est juste que la renommée se traduise en bien-être; malheureusement, les expositions annuelles suppriment la renommée et ne laissent debout que la soif du gain : le plus grand nombre se hâte de produire et prend en pitié les âmes assez ingénues pour rêver la gloire; le désir de bien faire s'attiédit de jour en jour, les ateliers se transforment en usines, et pour peu que cette fièvre continue, il sera bientôt impossible de distinguer l'art de l'industrie. »

On soupçonnait à peine, à l'époque où paraissaient ces lignes, à quel point la prédiction devait se réaliser, et quiconque a suivi d'un œil attentif la marche des beaux-arts depuis vingt-cinq ans a dû être frappé de l'influence fâcheuse exercée par la succession rapide des expositions.

C'est la poursuite du neuf à tout prix, la préférence donnée à des sujets d'une mise en scène facile, la multiplication des tableaux d'accessoires, des paysages, des portraits; le triomphe, en un mot, de toutes les adresses sur la méditation.

Non moins en Belgique qu'en France on a ressenti les effets regrettables des expositions trop rapprochées.

M. É. Fétis n'hésite pas à voir dans leur fréquence « une des causes de l'infériorité de l'art moderne, une de celles dont l'influence est la plus directe et la plus dangereuse [1] ».

[1] *L'Art dans la Société et dans l'État*, p. 135. — Plus récemment, M. Fétis a eu l'occasion de revenir sur cette question dans le discours qu'il a prononcé, comme président de l'Académie, à la séance publique de la Classe des beaux-arts, le 28 octobre 1883.

Digitized by Google

Grâce aux salons annuels de peinture, les théories mises en honneur par Courbet purent arriver assez tôt à se faire accepter.

Le public, à force d'entendre prononcer un nom et souvent proclamer un mérite, peut croire que notoriété et valeur sont synonymes : il ne discute plus et cesse d'être choqué de certaines choses contre lesquelles il protesterait, laissé à la libre manifestation de ses préférences.

A cette phase de l'histoire de l'art contemporain, une circonstance des moins prévues vint donner tout à coup au réalisme une apparence nouvelle de légitimité : ce fut l'invention de la photographie.

La chose était, vraiment, trop merveilleuse pour ne pas justifier tous les enthousiasmes.

Comment croire que désormais l'imitation ne serait pas le but exclusif de l'art, quand la simple action chimique des rayons solaires arrivait à rendre l'image exacte de tout ce qui nous environne, avec une perfection à désespérer l'artiste le plus patient? La meilleure preuve que cette croyance existait, c'est qu'on alla jusqu'à insinuer que des œuvres comme celles de Meissonier, par exemple, devaient leur supériorité au concours de la photographie, et des critiques prouvèrent toute l'étendue de leur incompétence en se faisant les échos de pareilles absurdités.

Mais, incontestablement, la peinture devait se ressentir d'une manière très directe de l'influence de la photographie.

Tout d'abord, il faut le constater, la faculté de perception des peintres était sortie victorieuse d'une épreuve qu'on pouvait voir tourner à la confusion complète de quiconque tenait le pinceau. L'effet de la lumière et des ombres, la projection des objets dans l'espace se montraient tels que nos regards étaient accoutumés à les percevoir; la photographie les rendait sans en retrancher aucune chose aperçue jusqu'alors, et donnait, en outre, à ses images, une précision de détail propre à contenter l'œil le plus scrupuleux. Pour beaucoup d'artistes et pour le public lui-même, la nature allait se présenter sous un aspect nouveau. Jusqu'alors on était allé vers elle, pénétré d'un respect religieux, d'une curiosité jamais satisfaite, certain de rester toujours bien loin d'une réalité que nul n'était sûr d'avoir bien aperçue et toujours

Digitized by Google

dans l'espoir de lui dérober quelque secret; voici l'épreuve photographique se présentant comme un moyen de contrôle à la portée de tous et, précisément, ce qui plaidait en faveur de la supériorité du peintre sur l'inerte machine allait, pour un nombre infini de personnes, être interprété comme un élément d'infériorité.

Chose digne de remarque et bien faite pour démontrer cette influence de la photographie sur la peinture, il est impossible de n'être pas frappé de la manière dont chaque étape nouvelle du procédé trouva son équivalent dans l'effet des tableaux à cette époque d'investigation.

La réalité avait triomphé de l'image; l'image allait vouloir, à son tour, triompher de la réalité.

Imparfaite d'abord en ses tentatives, la photographie n'arriva pas d'un jet à sa netteté présente. Les demi-teintes ne furent rendues qu'après une longue période d'essai, et la grande puissance des lumières ne se produisit que sous l'influence du perfectionnement des lentilles joint à l'expérimentation de certaines matières nouvelles. Les premières images apparaissent comme environnées de vapeurs.

On vit des artistes se passionner pour cette indécision des contours, et si ce ne fut là qu'une époque transitoire, on ne peut nier que la science des effets ne souffrît de l'innovation.

On crut un instant devoir prêter à la nature des apparences de grisaille, et le résultat fut plus grave encore en ce qui touchait l'étude de la forme.

Dire que la poursuite de l'idéal, que l'étude des effets eût cessé d'être tenue en honneur serait inexact; comment nier, pourtant, l'influence toute-puissante et presque tyrannique de l'habitude en toute matière régie par le goût? L'artiste put croire que, réellement, une ère nouvelle s'ouvrait pour lui et que certains droits nouveaux, non dissemblables de ceux que la Révolution avait conférés au citoyen, lui étaient échus. Fallait-il s'appliquer encore avec la même ardeur à l'analyse de la forme, à l'étude des proportions si laborieusement poursuivie à travers les âges depuis Polyctète jusqu'au Poussin?

La beauté gardait ses droits, mais à la condition de résider, non pas dans l'imagination de l'artiste, mais de se renfermer dans l'ordre des réalités banales issues de la photographie, à la condition, enfin, de se plier à ce

Digitized by Google

niveau bourgeois qui nous rend tous égaux devant l'appareil [1]. La distinction des mouvements, la noblesse des attitudes cessaient dès lors de prévaloir sur la réalité pure et simple; tant mieux où elles résidaient, tant pis où elles faisaient défaut, et, à force de se le persuader, l'on se crut admis à rejeter, sans autre examen, parmi les conventions, toute recherche entreprise dans le domaine de l'idéal.

Une cause d'autre nature et non moins puissante, devait exercer son influence sur la marche des beaux-arts : l'accroissement rapide des fortunes.

La somptuosité des intérieurs en vint à exiger comme complément naturel et obligé la présence des tableaux, des sculptures. On voulut des œuvres appropriées à la décoration des appartements, et s'il était loisible à la richesse de s'entourer de productions de première valeur, les fortunes plus modestes crurent pouvoir, à un moindre prix, se contenter de la perfection relative, de l'apparence des toiles signées des plus grands noms. On eut ainsi des œuvres de reflet, chacun trouvant à s'accommoder à sa guise, et si l'œuvre de réelle valeur devait hausser de prix par le voisinage de la médiocrité, celle-ci n'en restait pas moins tolérable, tout au moins tolérée, étant donné qu'on la jugeait conforme aux ressources de son acquéreur. Au lieu de se contenter de reproductions bien faites, d'estampes de mérite, on préféra des originaux de bas aloi. La conception nulle et l'exécution lâchée purent avoir leurs prôneurs.

Préoccupés du placement de leurs produits, nombre d'artistes en vinrent à tout sacrifier au goût d'acheteurs peu éclairés, et l'esprit de spéculation des marchands tira grandement parti de ce courant. L'œuvre d'art tendait à se dénaturer, elle cessait d'être une création de l'esprit pour se rapprocher du

[1] « La photographie, ne procédant que du fait, commence et finit avec lui; elle l'accepte tel qu'il se présente, se l'approprie sans contrôle, sans développement, sans restriction d'aucune sorte; elle ne peut rien au delà de cette fidélité aveugle. En dehors de cette assimilation à outrance elle n'existe pas. De là l'expression négative, l'aspect inerte de ses produits d'après les objets que la vie anime, de là ces portraits sans physionomie et ces tristes effigies du corps humain qui suffiraient pour dégoûter du réalisme, si tant est que le réalisme et ses œuvres puissent séduire sérieusement personne : images ressemblantes si l'on veut, mais d'une ressemblance figée; images vulgaires et mortes, bonnes tout au plus à être consultées à titre de renseignements sur la lettre de la nature. » H. Delaborde, *La photographie et la gravure.* (Revue des Deux Mondes, 1856, p. 619.)

Digitized by Google

produit mercantile, régulièrement « coté sur la place », et des talents de premier ordre n'échappèrent pas à la contagion.

Lancé dans la voie de produire vite et beaucoup, on s'autorisa de toutes les méprises et de tous les sophismes, et l'a peu près, « l'impression », en plus d'une circonstance, fut érigé en système.

Nous parlons de choses du passé; le bon goût et l'expérience ont fait justice dans une large mesure de ces erreurs. « Où manque l'âme, la sensibilité, il n'y a point d'art, il n'y a que du métier », disait Proudhon lui-même [1]; l'on se persuade de plus en plus de la vérité de cette parole.

Affirmer, d'autre part, que l'équilibre rompu soit rétabli complètement serait chose hasardeuse, autant que de prédire qu'il doive l'être de si tôt.

En effet, aujourd'hui même, la peinture ne s'est pas libérée des influences qui semblent plutôt devoir l'éloigner que la rapprocher du rôle que lui marque logiquement une succession de forces acquises depuis des siècles.

« Nous visions haut, jadis, écrivait Delacroix en 1859; heureux qui y pouvait atteindre! Je crains que la taille des lutteurs d'aujourd'hui ne leur permette pas même d'en avoir la pensée; leur petite vérité étroite n'est pas celle des maîtres : ils la cherchent terre à terre avec un microscope! »

Le grand artiste n'eut pas la joie de voir les choses beaucoup se modifier, et lui, tant calomnié et jamais satisfait de son œuvre, parlait encore avec une amertume profonde, dans un des derniers écrits que l'on ait de sa main, « de cette génération qui supprime les principales difficultés de la peinture ». Nous craignons qu'elle n'ait encore ses représentants.

[1] *Du principe de l'art*, etc., p. 21.

Digitized by Google

V

Si le réalisme ne peut être admis comme expression logique et légitime des préoccupations de notre temps, c'est moins encore par sa tendance à vouloir substituer certaines qualités purement matérielles à l'expression puissante des mouvements de l'âme, que par l'influence, extrêmement fâcheuse, que l'acceptation de ses théories menacerait d'exercer sur le grand art.

Le grand art! déjà le mot provoquera plus d'un sourire. Que de fois, en effet, les critiques l'ont dit, et que de fois la foule l'a répété après eux, « la grande peinture est morte », et gaiement on porte le deuil de la défunte.

Si vraiment la grande peinture est morte, — et le ciel nous garde de le croire, — il est une chose certaine, c'est qu'elle n'est pas morte de mort naturelle et que tout ce que l'on a pu faire pour hâter sa fin on l'a fait.

« En peinture, disait l'autre jour un critique écouté, le sujet est chose secondaire : la vie, le mouvement, la ligne, la magie de la couleur, le dessin, la touche caractéristique, voilà l'art véritable! »

« En art, comme en littérature, dit un autre, tout consiste dans le tour de main, l'exécution ou le style [1]. »

Faut-il s'étonner, après cela, de ce que le grand art soit supposé n'exister pas, par ceux, du moins, qui se laissent persuader que le sujet n'est pour rien dans la splendeur des conceptions de Michel-Ange à la Sixtine, de Raphaël au Vatican, de Véronèse à Saint-Marc, de Rubens un peu partout?

S'arrêter à démontrer l'importance des qualités techniques dans les arts serait en réalité, selon l'expression vulgaire, enfoncer une porte ouverte; mais l'erreur serait plus considérable encore de supposer que la forme, si parfaite qu'elle soit, puisse servir à autre chose qu'à habiller une idée [2].

[1] Castagnary, *L'œuvre de Courbet*, p. 8.

[2] « Une œuvre d'art ne saurait être autre chose qu'une pensée rendue sensible par une image. » (H. Delaborde, *Études sur l'art*, etc., p. 83.)

Digitized by Google

Il y a eu de tout temps des écrivains, et même des orateurs, soucieux de la forme au point de se préoccuper moins de l'idée que d'une manière frappante de s'adresser au public.

Le principe réaliste nous semble donc inconciliable avec l'art envisagé au point de vue des préoccupations de notre temps qui, sans doute, a plus qu'un autre remué des idées.

Que l'artiste puise dans la réalité, ou simplement dans son imagination, toute scène représentée est susceptible de se revêtir, sous son pinceau, d'une forme saisissante et complète, d'un effet puissant, et l'on est en droit de se demander ce que seraient les œuvres d'un Rembrandt, si le maître n'avait trouvé dans sa féconde imagination les effets si admirablement adaptés aux scènes qu'il tire de l'Évangile, comme le *Christ guérissant les malades*, l'*Annonciation aux bergers*, les *Disciples d'Emmaüs*. « L'âme se proportionne insensiblement aux objets qui l'occupent et ce sont les grandes occasions qui font les grands hommes », dit Jean-Jacques Rousseau.

Voilà la vraie définition.

Le grand art ne sera donc pas celui qui aura le plus profondément exercé en l'artiste la faculté de rendre, avec la somme d'adresse, même la plus grande, les objets qui l'environnent, mais avant tout, celui qui exercera sa faculté de concevoir, faculté de médiocre avantage, nous nous plaisons à le reconnaître, s'il ne possède encore celle de revêtir sa pensée d'une forme qui soit pleinement en rapport avec elle. « Le but de l'art, on l'a trop oublié de nos jours, dit Théophile Gautier, n'est pas la reproduction exacte de la nature, mais bien la création, au moyen des formes et des couleurs qu'elle nous livre, d'un microcosme où puissent habiter et se produire les rêves, les sensations et les idées que nous inspire l'aspect du monde. »

Le réalisme ne l'admet point ainsi. Aucune œuvre ne vaut, à en croire ses apôtres, qu'autant qu'elle se renferme dans le cercle des choses vues et effectivement perçues par l'œil du peintre, comme par celui du spectateur.

« Quand le *divin* Raphaël conçut la représentation de la *science*, dit Burger, au lieu de prendre ses contemporains — l'Italie et le monde ne manquaient pas alors de savants et de philosophes, — il alla chercher à dix-huit siècles en arrière et chez un autre peuple l'*École d'Athènes*. Il en

Digitized by Google

fait de même pour représenter toutes les qualités humaines et toutes les manifestations sociales.

« Cet art symbolique n'est pas très difficile, sous réserve du génie qui a créé l'*École d'Athènes;* on apprend tout de suite que pour faire l'*Astronomie,* on pose une femme le nez en l'air et on sème d'étoiles sa robe : c'est tout simplement la substitution d'hiéroglyphes, de logogriphes et d'énigmes, à l'homme même. C'est le sacrifice de l'humanité rayonnante et expressive, à des signes extérieurs, matériels et conventionnels [1]. »

Combien est plus élevée la parole de Cicéron sur l'état de l'âme de Phidias créant le Jupiter olympien, l'artiste devant toujours trouver au fond de son cœur un idéal d'expression qu'aucun modèle existant ne peut lui fournir.

« Phidias, quand il faisait une statue de Jupiter ou de Minerve, n'avait pas sous les yeux un modèle particulier dont il s'appliquait à exprimer la ressemblance; mais au fond de son âme résidait un certain type accompli de beauté sur lequel il tenait ses regards attachés et qui conduisait son art et sa main [2]. »

La forme, du reste, et ceci s'applique non moins à la forme littéraire qu'à la forme plastique, la forme ne saurait demeurer toujours la même. Il appartient à l'artiste de l'adapter à la nature de sa conception, et nous mettons au défi aucun maître de se procurer un modèle dont il soit pleinement satisfait.

S'imagine-t-on les figures de l'*Aurore* et de la *Nuit* de Michel-Ange, copiées sur nature? « Ni dans un village, ni dans une fête, ni dans les ateliers, en Italie ou ailleurs, aujourd'hui ou au XVIe siècle, dit M. Taine [3], aucun homme et aucune femme réelle n'ont ressemblé aux héros indignés, aux vierges colossales et désespérées, que le grand homme a étalés dans la chapelle funéraire. C'est dans son propre génie que Michel-Ange a trouvé ces types. »

Se figure-t-on, d'autre part, Rubens créant les bourreaux de son *Martyre de saint Liévin* ou de *saint Thomas,* par la simple copie d'un modèle fourni par le basard?

Quatremère de Quincy démontre avec une singulière puissance de per-

[1] *Les musées de la Hollande,* 1858, t. I, p. 203.
[2] QUATREMÈRE DE QUINCY, *Essai sur l'idéal dans ses applications pratiques.*
[3] *Philosophie de l'art,* p. 47.

Digitized by Google

suasion l'erreur de ceux qui oublient l'influence exercée par son sujet sur l'inspiration de l'homme qui crée. « Je demande, dit-il, si le genre du sujet ne détermine pas les qualités de l'éloquence. Je demande si le discours de l'orateur, qui n'est autre chose que l'expression des sensations qu'il éprouve, ne reçoit pas des circonstances des modifications variées; et je le demande encore, y a-t-il pour l'orateur quelque moyen de supposer, de suppléer ou de feindre une disposition dont l'influence détermine et l'ordre de ses pensées, et la forme de son style, et le caractère de ses mouvements? »

Ainsi de l'artiste. Croira-t-on à l'existence du bas-relief du *Départ* de Rude, sans cet état de l'âme de l'illustre statuaire qui le créa?

Sans doute, lorsque nous parlons du grand art et de sa féconde influence, nous ne saurions un seul instant nous arrêter à l'idée d'imposer à la peinture des formes préarrêtées, ni même un rôle que la nature de ses moyens rend impossible. Et pourtant, il faut le reconnaître, l'artiste ne jouit pas d'une liberté entière. Il n'entre certainement à l'esprit de personne de prétendre que le seul fait de représenter, sur une grande toile, le premier objet venu, constitue le grand art. L'*Enterrement d'Ornans* ne gagnait en aucune sorte à revêtir les proportions héroïques d'une page d'histoire, et Rubens, qui s'y entendait et avouait, d'ailleurs, que les grandes toiles allaient le mieux à son tempérament, Rubens s'est bien gardé de donner à sa *Kermesse* ou à son *Jardin d'amour* les proportions solennelles de sa *Descente de croix* ou du *Triomphe d'Henri IV*.

Rien ne prouve, du reste, que l'impression ressentie par le spectateur doive être moins profonde devant une œuvre de petites dimensions que devant une toile de plusieurs mètres; seulement, l'impression que l'artiste a voulu produire est d'autre nature dans les deux cas, et il est donc évident que nombre de sujets s'accommodent mieux des proportions réduites que de la grandeur naturelle. L'avantage de cette dernière réside beaucoup moins dans le moyen qu'elle fournit à l'artiste de mieux produire l'*illusion* que d'augmenter, aux yeux du spectateur, l'intensité de l'*expression*, encore un des côtés de l'art que le réaliste envisage comme secondaires.

Nous sommes donc en droit de dire que la grande peinture est en majeure partie redevable de son abandon à la doctrine nouvelle.

Digitized by Google

Est-ce un bien? Est-ce un mal?

Les plus récents critiques français et belges envisagent comme un progrès réel l'application des efforts de l'artiste à la traduction des épisodes de la plus extrême simplicité, sans autre préoccupation que de « faire vrai » [1]. Ils nous rappellent combien la Hollande a su, dans la sphère des plus humbles données, trouver matière à des chefs-d'œuvre et toucher juste, en traduisant ce qu'elle sentait le plus profondément, ce qu'elle aimait le mieux.

Nous souscrivons de la manière la plus absolue aux éloges attribués à ces maîtres consciencieux d'une des plus délicieuses écoles qui fût jamais; mais cela même nous donne le droit de croire que notre époque demeurera dans son esprit véritable, tout en obéissant à d'autres préoccupations.

Être « vrai » n'est point un but; c'est un moyen, un moyen même entre plusieurs; l'on ne saurait, par exemple, faire à un peintre de plus cruelle injure que de supposer qu'il vise à placer ses œuvres au niveau de la photographie.

Sans doute il n'y a aucune espèce de rapport entre un portrait du Titien, de Rembrandt, de Frans Hals ou de Van Dyck, et le genre de vérité d'un portrait issu de la presse photographique?

Tout homme doué du plus léger sentiment de l'art se révolte à l'idée de voir mettre en parallèle un portrait gravé à l'eau-forte par Rembrandt ou par Van Dyck, avec une photographie d'une vérité matérielle assurément supérieure.

La théorie du « faire vrai » ne peut donc être absolue, car notre raisonnement est applicable à toute création artistique, au même titre qu'au portrait, dans lequel, incontestablement, il y a un degré de ressemblance matérielle à poursuivre.

On peut être plus vrai dans un sujet de pure imagination que dans une scène copiée sur nature.

On a cru, de bonne foi, que l'importance donnée au paysage, comme d'ailleurs à tous les genres accessoires : marine, nature morte, etc., et la forme particulière d'interprétation revêtue par ces sujets, sous le pinceau des

[1] Lucien SOLVAY, *L'art et la liberté*. Bruxelles, 1881, p. 38.

Digitized by Google

peintres de nos jours, méritait d'être envisagée comme un progrès. Ici encore, nous regrettons de différer d'avis avec plusieurs représentants considérés de la critique contemporaine.

Loin de nous la pensée de méconnaître le talent de nombre de paysagistes de l'école moderne. Il est incontestable que le paysage comme on l'entendait il y a quelque cinquante ans, tout au moins en Belgique ou en France, ne possédait pas la saveur de beaucoup d'œuvres contemporaines. N'oublions pas, cependant, que c'est aux Gainsborough, aux Wilson, aux Creswick, à Constable, surtout, que revient le mérite d'avoir ouvert les yeux de l'école française sur la possibilité d'être un vrai paysagiste en transportant sur la toile l'aspect des champs, des bois aux diverses saisons, de la mer calme ou agitée.

On l'a constaté avant nous, la France ne possédait même pas la tradition du paysage, malgré les chefs-d'œuvre de Claude, du Poussin et du Guaspre, lui, aussi, dans son genre, un maître de premier ordre.

C'était chose neuve de voir des peintres comme Huet, Michel et après eux Cabat, Rousseau, Français, Troyon et quelques autres entrer dans cette voie frayée par les Hollandais, d'abord, et poursuivie en Angleterre avec tant de succès.

Delacroix qui, tout jeune, avait visité ce pays, sous les auspices de Fielding, avait été profondément remué de ce qu'il y avait vu. On connaît les pages émues qu'il écrivait à Bürger sur ses souvenirs d'outre-Manche et l'impression qu'il avait ressentie en voyant les premières aquarelles de Bonnington, car la France ne connaissait non plus l'aquarelle.

Mais si aucun éloge n'est trop élevé pour certains maîtres français, il n'en résulte pas que la compréhension plus juste, ou le rendu plus séduisant des sites champêtres, réalise pour l'art un progrès absolu ni même définitif; c'est plutôt le contraire qui est vrai.

A proprement parler, ni le paysage, ni la peinture d'animaux, ni la marine ne constituent des genres spéciaux.

Se figure-t-on vraiment un artiste se détournant absolument de la figure humaine — source éternelle d'observations psychiques et d'études matérielles, — pour ne voir dans la nature que les bœufs, les moutons, les chiens

Digitized by Google

et les volatiles; tel autre, dédaignant la végétation pour ne voir que la mer; un troisième, au contraire, indifférent en apparence au spectacle grandiose de l'océan et ne comprenant le beau que sous la forme d'un chêne majestueux? Évidemment cela serait absurde.

Et le paysagiste lui-même s'en tiendra-t-il à un seul genre de sites? Devra-t-il perpétuellement reproduire les vastes horizons et délaisser l'intérieur des bois, ou l'inverse? Chaque saison n'a-t-elle pas son charme? Et de quel droit en arrivera-t-on à proclamer que les sites grandioses des pays accidentés ne sont pas de ceux qui puissent être rendus par le pinceau?

Disons qu'ils charment moins certains hommes et que, d'ordinaire, l'artiste préfère rendre ce qui le touche plus vivement.

Il a été suffisamment prouvé que, de même que les poètes qui ont célébré la vie champêtre avec le plus d'émotion étaient des citadins, les meilleurs paysagistes ne sont pas ceux qui ont fixé leur demeure au milieu des champs. Tant il est vrai qu'ici même l'imagination conserve ses droits, et que le charme du souvenir, le voile d'idéal qui enveloppe les choses lointaines sont des facteurs d'une puissance infinie dans toute création artistique.

Quoi qu'on veuille, ce n'est pas un progrès que le nombre grandissant des paysagistes, fussent-ils tous excellents. L'art est un, et il ne s'agit nullement en peinture, comme en musique, de s'adonner à l'étude exclusive d'un seul instrument, le même homme pouvant difficilement aspirer à une supériorité égale sur un instrument à cordes et un instrument à vent. On a vu des maîtres dont, certainement, personne ne songe à contester la supériorité comme peintres : Orcagna, Verrocchio, Léonard de Vinci, Michel-Ange, être à la fois des peintres, des statuaires et des architectes de premier ordre. D'autres, plus rapprochés de nous, ont été non moins bons graveurs que peintres éminents, Rembrandt, par exemple. Et tandis que ce nom respecté repasse sous notre plume, nous citons ici encore un paysagiste incomparable et un portraitiste qui fera l'étonnement des siècles.

Est-ce que le Titien n'a pas été un des peintres de paysage les plus admirables de tous les temps? Est-ce que les chevaux et les chiens de Van Dyck ne sont pas des modèles du genre? Est-ce que Rubens n'a pas laissé des paysages tour à tour de la plus extrême simplicité et de la plus sauvage

Digitized by Google

grandeur? C'est en haut qu'il faut viser, en somme, et nous osons croire que beaucoup de critiques auraient applaudi avec plus de réserve à des tentatives à peine couronnées de succès, s'ils avaient mieux tenu compte du passé de l'art. Beaucoup le renient, il est vrai, au grand dommage de ses progrès bien entendus.

Rien, sans doute, n'est plus haïssable que le pédantisme, mais rien, non plus, n'est grotesque comme ces pygmées que l'on hausse à la taille des géants.

> Soyez plutôt maçon si c'est votre talent,

dit le poète, et, précisément, l'impuissance du plus grand nombre devrait ici nous ramener à la notion juste des proportions.

Malheureux serait le jeune homme, au début d'une carrière quelconque, s'il devait croire son avenir fatalement borné; celui qui, se sentant artiste, se consumerait de rage impuissante de ne pouvoir traduire toute sa pensée.

Au nom même de cette liberté de l'art, un mot dont il a été fait de si étranges emplois, ne faut-il pas qu'il puisse suivre jusqu'au bout son inspiration, ne relever que d'elle seule et de son talent, peu importe la forme qu'il adopte pour en faire montre? Aspirons donc à voir l'artiste capable d'aborder tous les genres avec supériorité.

« La grande peinture est morte », dit-on à chaque tentative avortée; ne serait-il pas plus juste de dire que les grands peintres sont rares? Qu'il s'en montre un seul, qu'il surgisse un homme d'un vrai génie, et l'on verra si le grand art est mort, l'on verra si, de nos jours, comme dans l'antiquité, comme au temps de la Renaissance, les villes ne se disputeront pas à l'envi les œuvres de son pinceau?

Prétendra-t-on que tout ce que les siècles ont vu s'accomplir de grand, de généreux, parfois de surhumain, ne puisse trouver sa traduction par la peinture?

L'art religieux est mort avec la foi, c'est chose admise; et l'amour de la liberté, le culte de la science, le respect de la foi jurée, le saint dévouement à une noble cause, a-t-on cessé d'y croire? Et si quelque artiste s'avise de vouloir exalter par un épisode une de ces vertus, il devra passer pour

Digitized by Google

absurde, dès l'instant où la scène elle-même ne se sera pas déroulée sous ses yeux?

Nous croyons, pour notre part, que, loin d'avoir à repousser comme un élément de faiblesse le souvenir du passé, notre époque a le privilège de trouver devant elle une source d'inspirations plus vaste que ses devancières, en même temps qu'elle s'adresse à un public plus éclairé. Un jour nos successeurs trouveront dans les journaux l'histoire de notre temps par le menu; n'y aura-t-il plus de place alors pour l'historien? A ce titre, comme le dit très bien Taine, la meilleure tragédie, la meilleure comédie, le meilleur drame devraient être la sténographie des procès en cour d'assises. Et, ajoute l'auteur, si l'on y trouve parfois un trait naturel, une explosion de sentiment, c'est un grain de bon métal dans une gangue pâteuse et grossière. Elle peut fournir des matériaux à l'écrivain, mais elle n'est pas une œuvre d'art.

« Le but de l'art, dit Chesneau, de son côté, est de manifester l'âme humaine, toutes ses émotions, tous ses sentiments, ses troubles, ses joies, ses passions et ses adorations, ses amours et ses haines, ses défaillances et ses espérances, sa connaissance du réel et ses aspirations vers l'au delà; l'âme tout entière, aussi complètement que le permettent les possibilités d'expression propres à chacun des arts particuliers et sans autres limites que celles de ces propriétés [1]. »

En vérité, c'est, par soi-même, une caractéristique de notre temps qu'il faille s'arrêter à le dire!

Volontiers on exalte les conquêtes modernes; ont-elles trouvé, jusqu'à ce jour, leur expression légitime dans les arts? Notre interprétation du passé, cesse-t-elle de traduire les hommes du présent, l'état de leur âme, leurs convictions? Et, tandis que l'horizon de la pensée humaine va s'élargissant, que l'investigation historique et scientifique unies viennent refaire à nos yeux les sociétés éteintes, nous dirons à l'artiste : « Côtoie le rivage, aux autres la pleine mer.

» Paix aux sentiments impétueux de ton âme; dérobe-toi aux émotions de tes contemporains; le mouvement, la vie, la lutte ne sont pas faits pour toi;

[1] *L'éducation de l'artiste*, p. 29.

Digitized by Google

ne lis point. Cours les champs; absorbe-toi dans la contemplation de la mer et du ciel; écoute le murmure du vent dans les arbres, le bouillonnement de la source; suis le laboureur dans le sillon, le pêcheur sur la plage; voilà ton domaine, il est assez vaste. — Les héros ne sont plus de ton temps, et les historiens d'ailleurs ont tant exagéré! Assez de toges, de chlamydes, de cuirasses, de panaches, de pourpoints; assez de ces défroques, bonnes tout au plus au théâtre, et encore!... Si tu veux qu'on te comprenne, de grâce, parle-nous la langue de tous les jours; que tous puissent te comprendre. »

« Ce qui caractérise les animaux, dit Delécluze [1], c'est que le moment présent et tous les besoins grossiers qui s'y rattachent les occupent sans cesse. L'homme, au contraire, a cela qui le distingue, que, du présent où il est placé, comme sur un point élevé, il jette sans cesse ses regards sur le passé et vers l'avenir. La vie véritable de l'intelligence humaine réside dans les souvenirs et dans l'espoir; entre ces deux infinis, le présent n'est qu'un point pour une âme élevée. Tout homme donc qui, dédaigneux de ce qui a été et de ce qui sera, n'est constamment préoccupé que de ce qui est et de ce dont il a besoin, se rapproche de la nature de l'animal. Il devient barbare; il n'a d'autres pensées, il n'a d'autres goûts que ceux qui le ramènent à ce qui est matériellement utile. »

Et, pour parler ainsi, se range-t-on parmi ceux que le présent attriste ou effraye : *laudator temporis acti?* Non, sans doute.

« L'abandon de l'art historique, dit Chesneau, même par ceux qui sont pleinement libres, qui ne sont retenus ni par les attaches de l'école de Rome ni par la vénalité commerciale, a deux causes : — Chez les uns, l'ignorance, l'horreur du livre, l'inexpérience de la pensée : ceux-là sont des gens de métier; — chez les autres, lettrés, eux, l'influence désolante d'un courant récent qui les porte à ériger en système une des infirmités intellectuelles de ce temps, l'absence d'imagination. Leur théorie, d'un rationalisme aride et sec, est celle-ci : « On ne peut, on ne doit peindre que ce qu'on peut voir ». Et ceci encore : « Nous sommes les témoins de notre temps, nous ne devons témoignage que sur notre temps ».

[1] Ouvrage cité.

Digitized by Google

» Quelle hérésie! — Sans doute, c'est une noble ambition, chez l'artiste, que de penser aux générations qui viendront après nous et qui seront curieuses de nous, comme nous le sommes de celles qui nous ont précédés. Mais ne devez-vous donc à l'avenir d'autre témoignage sur nous que celui de la façon dont nous portons la barbe et le chignon et de la coupe de nos habits? Ne devez-vous pas lui dire aussi nos interprétations du passé, comment les actes antérieurs de l'humanité ont su nous affecter? Et ne devez-vous rien à votre temps lui-même? Ne vous êtes-vous donc pas rendu compte de ce fait si grand que vous, moi, l'homme que vous coudoyez dans la rue, que toute vie intellectuelle est un abrégé de l'humanité tout entière; qu'en tout homme siègent, à l'état latent, toutes les passions, toutes les grandeurs et toutes les abjections de la nature humaine; que l'histoire est le miroir où toutes ces passions sont écrites en actions éclatantes, et que vous avez le devoir de mettre, par votre art, les formes sensibles de ces actions sous les yeux de chacun, de façon qu'en ce miroir sa propre conscience se réfléchisse, qu'il voie et apprenne à se connaître? »

N'est-ce point là le langage d'un homme de progrès?

Remarque importante, au surplus, et bien digne qu'on s'y arrête, en proscrivant toute représentation des choses non actuelles, comment attendre de l'artiste ces études d'un ordre élevé qui pourront seules donner à ses œuvres une valeur certaine et durable, lui permettre, enfin, d'être à la fois de son temps et de tous les temps?

Il plaisait à nos ancêtres d'orner leurs églises, leurs hôtels de ville, leurs lieux de réunion, de pages où se déroulaient les grands exemples de charité ou de justice, les grandes leçons de l'histoire, en un mot; lorsqu'une de ces peintures passe sous nos yeux, ne nous intéresse-t-elle qu'au seul point de vue archéologique? Et si demain tâche pareille devait être remplie encore, pourrait-elle être dignement accomplie par des hommes habitués à ne peindre que leur temps?

Nous persistons à croire que l'artiste ne cessera de considérer comme un de ses plus précieux privilèges de pouvoir trouver dans sa puissance imaginative la source véritable de l'expression sans acception de temps ou de milieu.

Digitized by Google

Cette idée n'a pas, que nous sachions, été exprimée avec plus d'éloquence que par un écrivain franchement réaliste, M. Théophile Silvestre.

« La peinture n'est pas seulement un portrait isolé ou collectif, dit cet auteur [1], mais encore un rêve de l'imagination. Le peintre agrandit la vie, sans en altérer la forme, l'essence premières; l'historien n'a pas le droit d'inventer un caractère, de créer un tempérament; mais en méprisant les traditions infidèles, en choisissant avec méfiance et lucidité les points incontestables pris d'après nature par des écrivains antérieurs, et en s'armant de ses propres intuitions, il réveille et ramène sous nos yeux les générations endormies.

» Il n'est donc pas indispensable, sous peine de lèse-vérité, de se parquer dans le présent et de regarder le monde par un trou de taupe, que l'on appelle le *réalisme* ou la réalité. Un homme d'esprit aimera mieux s'entretenir en esprit avec les supériorités éteintes que de passer sa vie dans un champ avec le laboureur, dans une échoppe avec le savetier, dans un poêle avec le fumiste, ou même dans un salon avec un noble, un prêtre ou un bourgeois qui disent des sottises.

» Pourquoi fermer aux artistes l'histoire qui a versé dans l'intelligence des grands maîtres les plus généreuses inspirations? Véronèse, Rembrandt, Velazquez, dont notre ami Courbet reconnaît la valeur et l'autorité, ne se sont pas bornés à peindre des scènes de leur temps; ils ont fouillé dans la Bible, les annales et les épopées. Jésus-Christ, César, Charlemagne, Napoléon ne sont pas des portraits de famille bourgeoise d'une ressemblance à garantir, mais des figures imposantes que l'artiste évoquera de siècle en siècle et que les générations jugeront tour à tour selon leur génie et leurs passions.

» Quel spectateur ira s'informer des modèles qui ont posé devant Michel-Ange et rechercher dans le *Jugement dernier* l'exactitude matérielle, le *réalisme?* Pourtant Michel-Ange était un réaliste, et un fameux réaliste, qui avait étudié quatorze ans l'anatomie, le scalpel à la main! Allons, pas de ruses, pas de logomachies! Ce n'est point la critique qui impose à Courbet le titre de RÉALISTE, c'est lui-même qui l'inscrit sur son drapeau, pour avoir un dra-

[1] *Les artistes français*. Bruxelles, 1861, p. 71.

Digitized by Google

peau à lui seul et qui vient rallumer une querelle esthétique éteinte. Les Caravagesques et les Raphaélesques, les disciples de Rubens et du Poussin, se disaient aussi réalistes et idéalistes. De nos jours les classiques et les romantiques ont tiré trente ans leurs arguments opposés de la réalité et de l'invention. Est-il possible pour faire de l'art vivant, de l'art nouveau, de l'art libre, de revenir à ces vieilleries? Dites : « Je suis le plus grand peintre de tous les temps », et prouvez-le!

» La profession de foi de Courbet, rédigée par une main amie, ne tient pas : si le mot *réalisme* avait un sens (et Courbet lui-même reconnaît qu'il n'en a pas) [1], il voudrait dire : négation de l'imagination. Alors l'homme, dépouillé de la plus haute de ses facultés, devient un être inférieur; ou bien : prééminence de la vérité palpable sur la fiction poétique. Dans ce second cas l'artiste, réduit à l'état de scribe sans idée, n'a plus qu'à dresser le procès-verbal de tout ce qu'il voit et de tout ce qu'il touche.

» L'Imagination, maître peintre d'Ornans, est le principe des chefs-d'œuvre qui ont illuminé le monde. Elle traverse la vérité brutale pour saisir les derniers secrets de la création, fouille les replis du cœur humain, allume les passions qui se trahissent au dehors par la noblesse, la force, la majesté, la tendresse, la douceur ou la folie du geste, ce télégraphe rapide qui traduit avec tant d'énergie nos sentiments et nos pensées. C'est elle qui donne l'audace à l'écrivain, l'enthousiasme à l'artiste et la grandeur d'âme au héros. Sans imagination, tout est, dans cette vie, étroit, plat et morne; il faut mourir! Si quelquefois elle produit en nous des ravages, ces ravages ont toujours quelque chose de grand et de sacré. L'amour exclusif de l'exactitude est le fond du caractère des paysans et des bourgeois boursicotiers, réalistes, dans la force du mot, qui comptent juste, ne regardant pas les nuages, et ramassent dans la boue les sols tombés de la poche percée des rêveurs. »

C'en est assez, sans doute, pour prouver l'erreur des critiques qui ont cru de bonne foi pouvoir attribuer aux vues obstinées de quelques hommes

[1] On doit remarquer que Silvestre écrivait avant la profession de foi de Courbet au congrès artistique d'Anvers : « Le fond du réalisme, c'est la négation de l'idéal, etc. »

Digitized by Google

impénétrables au charme de ce qu'ils appellent « l'art rajeuni », la diffusion, trop lente à leur gré, des principes qu'ils proclament.

Plus on y regarde, et plus on se convainct que l'artiste ne peut, sans amoindrir l'importance de son rôle, se borner aux exigences de la forme, et que l'art vivant, l'art actuel qu'on lui demande, n'aura de représentants que parmi ceux qui, formés par les études les plus sérieuses, se sentiront le courage d'engager la lutte avec leurs devanciers sur le terrain des conceptions élevées.

Thiers disait de Delacroix à ses débuts : « Je ne sais quel souvenir des grands artistes me saisit à l'aspect de ce tableau » [1]; nous voudrions qu'on en pût dire autant de toute œuvre moderne.

Restreindre l'horizon de la pensée humaine ne saurait être, en aucun cas, le point de départ d'un progrès quelconque.

VI

L'influence du réalisme ne devait pas se traduire seulement dans la conception des œuvres d'art; elle allait, avec non moins d'évidence, se manifester dans la technique. Fatalement il en devait être ainsi, la forme et la couleur restant, nous l'avons dit, sous la dépendance perpétuelle de l'idée, étant soumises, par conséquent, elles-mêmes à l'empire de l'idéal. Nier celui-ci, c'est exiger du même coup la transcription des choses vues, avec toute l'exactitude matérielle dont l'artiste sera capable, et donner une importance excessive à des accessoires dont la reproduction, même la plus parfaite, ne saurait rien ajouter à l'intérêt d'une œuvre.

Ce principe, non moins radical que le rejet de toute représentation d'un fait qui n'a pas eu le peintre pour témoin, contribuait trop à abréger la tâche

[1] Salon de 1822. Collection d'articles insérés au *Constitutionnel* sur l'exposition. Paris, Maradan, 1822, p. 57.

Digitized by Google

de l'artiste pour ne pas trouver une complaisante acceptation. Ce qui n'avait été jusqu'alors qu'un moyen sembla pouvoir devenir un but, et l'on put voir ainsi des travaux que, de tout temps, l'artiste avait envisagés comme secondaires, admis à se produire comme définitifs. On versa dans cette étrange et déplorable erreur d'établir les droits du peintre sur la négation des exigences les plus légitimes, en absolvant d'avance tous les manquements aux règles du bon goût, et cela au nom d'une prétendue originalité.

Le passé de l'art tout entier se levait pour protester contre cette libération apparente de l'artiste, aboutissant, en réalité, au pire des esclavages; car si le peintre a pour devoir essentiel de s'inspirer de la nature, c'est surtout à condition de procéder avec raisonnement et avec choix, à condition de pouvoir repousser toute forme qui ne s'adapte point à sa conception.

Ce qui fera le charme éternel de certaines œuvres admises par tous les connaisseurs comme dignes d'admiration, c'est l'accord intelligent du naturel et de l'idéal.

L'œuvre des plus grands maîtres contient des pages où se trahit le souvenir de quelque impression rapidement notée et plus tard développée. La théorie contemporaine proclame de telles notes comme donnant, à elles seules, une satisfaction complète à nos exigences, et dénie à l'artiste le droit d'en faire l'application où bon lui semble.

Velazquez et Van Dyck nous donnent l'exemple d'une compréhension plus saine des convenances esthétiques. Quoique surtout portraitistes, ils ne laisseront pas croire que la ressemblance résulte d'abord de la transcription des irrégularités physiques d'un modèle; ils sauront la trouver, au contraire, dans un ensemble de conditions qui mettent en relief une personnalité avec infiniment plus de puissance que la plus minutieuse copie des traits d'un visage par le pinceau d'un Denner. « En un temps comme le nôtre, où les préoccupations de métier ont pris dans l'art tant de place, au grand détriment des recherches et des opérations de l'esprit, il ne paraîtra peut-être pas inutile de remarquer que, même dans ses improvisations les plus hâtives, Velazquez ne se borne pas seulement à se montrer beau peintre, un praticien incomparable, mais encore qu'il ne croit pas avoir tout dit parce qu'il aura obtenu l'illusion parfaite dans le rendu de la forme, dans l'expression de la vie.

Digitized by Google

Il veut mieux et davantage. Doué de cette puissance de pénétration qui lui permet d'amener à l'extérieur l'âme de ses modèles, il peint aussi l'être intime, et nous livre, avec leurs traits physionomiques et leurs habitudes de corps, toute leur ressemblance morale [1]. »

L'application des préceptes du réalisme peut, sans doute, fournir à l'artiste l'occasion de faire montre d'habileté, mais nul ne soutiendra, croyons-nous, que telle doive être l'aspiration d'un peintre. L'art est essentiellement subjectif; l'habileté plus ou moins grande en peinture entre en ligne de compte au même titre que la mémoire, l'érudition, si l'on préfère, dans le domaine de l'histoire ou de la jurisprudence. Le fait qu'un homme sera le répertoire vivant des connaissances historiques ou juridiques les plus vastes ne prouve en aucune sorte qu'il doive rien produire, à son tour, qui ait quelque valeur [2]. Il est admis, et comme sous-entendu, quelle que soit la carrière que l'on embrasse, qu'il faut savoir son métier; cette exigence s'impose au peintre comme à tout autre individu.

L'apprentissage peut être plus ou moins long, plus ou moins ingénieusement dirigé, l'élève plus ou moins bien doué; mais il importe de ne pas perdre de vue que l'acquisition d'un certain ordre de qualités matérielles constitue l'apprentissage même; une des plus fâcheuses erreurs consisterait à en faire le but unique des efforts d'une carrière. C'est à la faveur de cette méprise que l'on voit aujourd'hui tant d'amateurs venir se mesurer avec les artistes et ne pas leur rester toujours inférieurs. Rien de plus naturel ni de plus légitime, si la conception est envisagée comme chose accessoire.

Être artiste implique toute autre chose qu'une somme d'adresse plus ou moins grande.

Il est à peine possible de se figurer un ingénieur arrivé au terme de ses études et incapable de calculer la force de résistance des matériaux dont il fait emploi; un médecin dans l'ignorance de la valeur des formules qu'il prescrit; pourtant la capacité de l'un et de l'autre ne s'établit que par l'usage qu'ils font de leurs connaissances premières.

[1] Paul Lefort, *Velazquez* (Gazette des beaux-arts, t. XXVI, p. 165).

[2] « Le magasin de la mémoire est volontiers plus fourny de matière que n'est celui de l'invention. » (Montaigne, *Essais*, liv. I, chap. IX.)

Digitized by Google

Ainsi du peintre. Les plus grands succès remportés dans les écoles n'ont jamais suffi à faire un artiste accompli.

Or, si tout cela est vrai, et d'ailleurs incontesté, l'éducation artistique a pour obligation de diriger les regards du jeune homme vers un but bien supérieur aux simples connaissances techniques, éléments nécessaires, mais très insuffisants de son rôle à venir. « En sortant des écoles, l'artiste n'est encore qu'un élève. Il connaît les règles, il a la notion des procédés techniques, mais l'art est encore pour lui plein de mystère [1]. » A ce point de vue, les réflexions que l'on est amené à faire sur la situation contemporaine de l'art ne sont pas d'une nature bien rassurante.

Doit-on vraiment s'étonner de la proclamation dégagée et de l'acceptation facile des théories esthétiques les plus fausses, alors que ceux-là mêmes qui devraient être les plus jaloux de défendre leur domaine contre les influences dissolvantes, n'opposent aucune résistance? Les artistes accusent volontiers le public d'exiger d'eux des capitulations de conscience, comme si, précisément, il ne leur appartenait pas de donner aux vues de la foule une direction élevée en pareille matière.

Ce sont les mœurs, a-t-on dit, qui dictent les lois; mais songe-t-on à contester l'influence salutaire que l'application des lois exerce sur les mœurs? Si l'art a sa place marquée dans la société moderne, — et qui le niera? — nous disons que c'est aux artistes de veiller à ce qu'il conserve aussi sa véritable destination.

Émeric David, dont il est permis de ne pas accepter les idées sur l'art envisagé comme élément de richesse, et qui, d'ailleurs, écrivait en un temps où il pouvait être nécessaire d'insister sur ce point de vue, Émeric David opérait une distinction radicale entre l'effet que les arts doivent exercer. Ils corrompent et dégradent le peuple qui en reçoit les produits du dehors, dit-il, et développent puissamment, au contraire, les facultés intellectuelles de celui qui les cultive.

Idée funeste, en effet, que l'assimilation de l'œuvre d'art à l'objet de luxe. L'auteur que nous venons de citer constate lui-même que les peuples aux-

[1] Édouard Fétis, *L'Art dans la Société et dans l'État*, p. 152.

Digitized by Google

quels leurs prédécesseurs n'ont laissé acquérir, dans les arts, d'autres connaissances que celles qui étaient nécessaires pour produire des objets de luxe, n'ont jamais pu progresser, et il cite un passage de Sonnerat, duquel résulte que les merveilleux filigranes de l'Inde, par exemple, ne sont que des ouvrages de pure routine et de patience!

Dans la société moderne arrivée à un *summum* de jouissances et de luxe, le rôle de l'art est clairement indiqué : il doit répondre à un besoin intellectuel et établir une démarcation franche entre ses créations et les travaux, même parfaits, d'un ordre purement matériel [1]. Nous n'hésitons pas à croire que les subtilités de l'exécution, que l'habile maniement du pinceau, sans autre but que l'étalage de cette adresse même, contribuent davantage à éloigner qu'à rapprocher l'artiste du rang qu'il est en droit d'ambitionner. C'est ce que démontre avec la plus complète évidence M. E. Chesneau, dans ce passage de l'étude que nous avons fréquemment rappelée et qu'on ne saurait trop faire connaître :

« Dès que l'artiste expose une œuvre aux regards du public, j'estime que le public a le droit d'exiger de lui le talent comme une chose due. Est-ce qu'on ne demande pas de même à l'écrivain de savoir la langue qu'il parle? Avoir du talent, cette pensée occupera donc le premier rang dans les préoccupations de l'élève, qui ne doit pas avoir d'autre ambition. Au contraire, dès que l'artiste est formé, aussitôt qu'il a conquis, avec la certitude de traduire exactement sa pensée en exécution, le droit de communiquer aux foules cette pensée, son effort doit être réservé tout entier pour quelque chose de plus que le talent, cette science et cette patience de manouvrier. L'œuvre ne vaut plus alors par la façon dont elle dit les choses, mais par les choses qu'elle dit. Devenu secondaire, le talent n'est plus qu'un instrument. La valeur de l'œuvre est soumise à la condition *sine quâ non* de témoigner à la fois la valeur de l'instrument et la valeur de l'homme qui l'emploie, une force dirigeante et une force agissante dont l'accord produit cette force supérieure, l'artiste. Le beau, ai-je dit, n'est qu'une forme d'expression; je dirai de même du talent qu'il n'est qu'une forme d'expression. »

[1] On peut, en faveur de cette conviction, excuser l'enthousiasme de Proudhon pour les œuvres de Courbet.

Digitized by Google

C'est donc aux artistes qu'il appartient d'agir sur le goût du public en matière d'art. Et comment, en effet, pourraient-ils abandonner au public la direction, sans s'exposer à voir les produits de leur pinceau tomber au rang de tout autre objet de frivole fantaisie — objet fort bien payé, cela se peut, — mais ne pouvant prétendre à une autre durée que celle de la mode, dont il relèvera expressément et à laquelle il devra sa valeur? Nous ne voyons vraiment, pour ce genre d'œuvres, aucun autre criterium.

Mais le public, de son côté, n'est nullement exclu du droit de juger l'œuvre, laquelle, en dernière analyse, est créée pour lui. Il s'établit donc ici une corrélation étroite, et, très certainement, si l'autorité de l'artiste peut être insuffisante, la compétence du public doit être également mise en question. Nous avons vu dans quelles erreurs a pu verser un homme aussi lettré que Proudhon mis en présence des toiles de Courbet, et nous avons vu ce peintre croire, de bonne foi, qu'il s'élevait en disant : « Pourquoi chercherais-je à voir dans le monde ce qui n'y est pas et irais-je défigurer, par des efforts d'imagination, ce qui s'y trouve [1]? » De part et d'autre pareille méprise.

Il y a parmi les lettrés et les artistes, nous le savons, des hommes ayant sur l'art des idées plus conformes à sa vraie destination que Proudhon et Courbet; mais, sans doute, un peu moins de disproportion, sur le terrain intellectuel, entre le peintre et son juge, et le premier eût discuté avec l'autre, et l'eût peut-être converti à ses idées, au lieu d'accepter en aveugle des théories toutes faites.

A quelle conclusion aboutir, enfin, si ce n'est celle-ci? Instruire l'artiste et lui montrer le triomphe de ses efforts par d'autres voies que la simple habileté pratique dans son métier : lui répéter sans cesse que « *l'expression est la loi suprême de l'art;* que *l'expression s'adresse à l'âme, comme la forme s'adresse aux sens* » [2].

Tout ce qui précède proteste contre la pensée de mettre obstacle à la manifestation la plus indépendante des facultés que la nature a départies à

[1] Castagnary, *Exposition des œuvres de Courbet*, p. 22.
[2] Victor Cousin, *Du Vrai, du Bien et du Beau*, p. 189.

Digitized by Google

certains individus. Comment le pourrait-on, du reste? Et ceci nous amène à rechercher si la direction imprimée à l'enseignement des beaux-arts offre pour l'avenir des garanties suffisantes.

L'examen de cette question s'impose; on ne peut l'éluder.

Le sujet est de ceux que l'on n'aborde pas sans quelque répugnance. Personnalité très sympathique, doué d'une sensibilité extrême, d'une dose de pénétration peu commune, l'artiste a des côtés incontestablement séducteurs. Le rang qu'il occupe dans la société, et qu'il doit légitimement à ses travaux, est des plus honorables; on ne conteste pas la justice des honneurs qu'il moissonne.

Pourtant, il faut le reconnaître, le monde des artistes est un monde clos, et la fusion n'est jamais complète entre les éléments qui le composent et les classes de la société au milieu desquelles un peintre, un statuaire sont appelés à se mouvoir. « Vous pouvez, disait Proudhon, vous entendre avec un philosophe, un savant, un entrepreneur d'industrie, un militaire, un légiste, un économiste, avec tout ce qui calcule, raisonne, combine, suppute, avec un artiste c'est impossible. » Si tel est le cas, la cause n'en est assurément pas à la profession mais à l'homme qui l'exerce, surtout à la façon dont il l'exerce.

L'artiste a lui-même pris l'habitude de dire que sa profession n'a rien de commun avec les autres et s'en autorise pour faire bon marché des exigences qui s'imposent aux hommes voués à l'étude des autres branches des connaissances humaines, comme à la société dont il fait lui-même partie.

Dès lors, point de fixité dans les vues; la conception se fait au hasard, sans suite, sans conviction, sans forme prévue. Captiver l'attention devient une préoccupation constante et exclusive, et le confrère ayant l'analogue, il en résulte des esprits d'antagonisme touchant à la férocité. Courbet disait : « Je suis le premier et l'unique artiste de ce siècle », d'autres moins francs, ou plus avisés, ont pensé et pensent de même sans le dire, seule différence entre lui et eux [1].

[1] « Vous visez à l'effet, comme on vise à l'esprit. Ce n'est pas votre *art* qui vous possède, c'est votre *moi* : vous vous souciez bien moins d'*être* que de *paraître* : vous pensez à vous, et vous cherchez avec passion ce qui n'est que le cauchemar de votre propre succès. » GOUNOD, *Lecture à l'Académie des beaux-arts* (25 octobre 1882).

Digitized by Google

Or, cette confiance, non moins légitime que nécessaire quand elle se fonde sur le savoir, la méditation, l'expérience, sur un ensemble de connaissances primordiales, enfin, dégénère, si l'on n'y prend garde, en un système boiteux pour devenir, par degrés, cette présomption dont parle le poète :

L'ignorance toujours est prête à s'admirer.

Rivalisant d'efforts et de sacrifices, les villes et l'État contribuent de tous leurs moyens à la multiplication des artistes. Partout des académies, aux visées plus ambitieuses les unes que les autres, ouvrent leurs portes en des lieux où jamais artiste ne pourra vivre, où il semblerait devoir suffire de travailler à la diffusion du dessin comme d'une connaissance indispensable à tout le monde.

Et pourtant, gratuit à tous les degrés, l'enseignement des arts graphiques est dirigé de telle sorte que l'aspiration de quiconque entre à l'académie sera d'en sortir artiste. Subsides, médailles, prix de Rome, décorations, commandes officielles, musées toujours prêts à recueillir les œuvres : à quelle autre carrière offre-t-on de pareilles faveurs?

M. Charles Blanc, lors de son passage à la direction des beaux-arts en France, provoqua bien des colères pour avoir dit, dans un rapport au ministre, que la mission de l'État, en matière d'art, n'est pas plus de faire connaître au public tout ce qu'il plaît aux artistes de créer, qu'il ne lui incombe d'instituer des concerts où seront exécutées, aux frais de l'État, les romances, les valses et les polkas écrites par les musiciens. Et cela est de la plus absolue vérité.

On peut se demander sérieusement si l'État ne s'est pas exagéré l'importance de sa mission en ce qui concerne la formation d'artistes, et si la gratuité absolue de l'enseignement des beaux-arts, par exemple, a donné les résultats espérés.

L'étude du droit, de la médecine, de la philosophie, de « l'art » vétérinaire, de l'agriculture, exige non seulement une longue et persévérante application, des ouvrages d'un prix généralement élevé, des instruments, des répétitions; nul cependant n'est admis à professer sans un stage préalable de

Digitized by Google

plusieurs années. Si le jeune homme aspire à servir son pays par les armes, aliène sa liberté et, en dernière analyse, doit livrer sa vie aux hasards d'un champ de bataille, il est tenu de payer l'instruction nécessaire au métier de son choix pour pouvoir prétendre à un avancement indéfini; et la carrière artistique qui, même pour l'homme le mieux doué, exigera des loisirs, en d'autres termes, des ressources de tout genre, des voyages d'étude, mille accessoires coûteux, demeure ouverte à tout venant aux frais du Trésor et sans aucune garantie de la part de ceux qui l'embrassent, car en Belgique la somme requise d'instruction se borne à savoir lire et écrire l'une des langues parlées dans le pays, condition jugée insuffisante par les esprits les plus sérieux pour conférer le droit électoral dans ce même pays.

L'État serait donc moins intéressé à avoir des légistes, des ingénieurs, des militaires ou des agronomes instruits, que des peintres, des sculpteurs et des architectes médiocres? Erreur profonde, sans doute, et pourtant il est permis de se demander par quelle puissance de logique l'État devrait davantage à ceux qui veulent être artistes qu'à ceux qui veulent embrasser toute autre carrière. Il sera dès lors permis d'exiger de lui d'autant plus qu'il aura été plus loin dans la voie des largesses.

« O vous qui attendez que j'entreprenne de grands travaux, disait Périclès aux artistes, préparez-vous avec ardeur et n'ayez point une confiance inactive. Ceux d'entre vous qui seront jugés capables de bâtir, de sculpter ou de peindre des œuvres dignes d'admiration, auront une vie assurée et même des gains considérables; mais ceux dont la main est peu expérimentée et à qui Minerve n'a point souri, en vérité ils feraient mieux, dès aujourd'hui, de cultiver la terre ou de s'établir fabricants de poteries dans le Céramique.

» Jamais ils n'auront part aux travaux; jamais, par Jupiter! je ne leur livrerai, pour qu'ils les gâtent, les marbres du Pentélique et les matières précieuses que je fais venir de tous les pays pour orner la ville : non, quand même ils me seraient proches par le sang, quand le grand-prêtre de Neptune Erechtée les protégerait, quand Aspasie suppliante tendrait vers moi ses beaux bras. Un général ne place point au poste périlleux un soldat lâche et débile; je serais non moins blâmable si je confiais les richesses et la

Digitized by Google

renommée de notre patrie à des artistes sans habileté; les Lacédémoniens précipitent dans un gouffre les enfants difformes afin de ne point nourrir des citoyens inutiles. Ainsi je veux ôter l'espérance aux sculpteurs et aux peintres qui n'ont pas le sens de ce qui est beau, car si l'État les employait, ils n'apporteraient que du dommage [1]. »

Les Grecs, on le voit, se seraient montrés moins prompts que nous à « encourager » la médiocrité.

A moins qu'en matière d'art l'expérience soit sans valeur et sans autorité, il est impossible d'envisager autrement que comme une méprise le fait d'avoir rendu l'enseignement supérieur des beaux-arts inséparable de celui des éléments du dessin. Un point existe où cet enseignement premier s'arrête : ce point est à déterminer, mais, certainement, le dessin d'après le modèle vivant et la peinture exigent une application, une constance inconciliables avec l'exercice d'une profession étrangère à l'art.

N'est-il pas imprudent de convier à ces hautes études des jeunes gens que l'on détourne d'autres carrières, trop souvent pour leur malheur?

Qu'à l'origine de leur constitution, créées pour stimuler les beaux-arts et pour suppléer aux ateliers des maîtres, les académies dussent ouvrir leurs portes au plus grand nombre possible d'élèves, on se l'explique. Mais les choses ont bien marché depuis, et nul ne croira que la Belgique soit exposée à manquer d'artistes. Quantité de gens estiment, au contraire, que leur valeur plus que leur nombre intéresse la chose publique. « Le beau service à rendre aux gens que de les aider à s'engager dans le chemin qui conduit à la misère! Les mauvais artistes déconsidèrent l'art et ne font que végéter. Il vaudrait cent fois mieux qu'ils fussent de bons ouvriers.

» Voilà ce qu'il faut leur faire comprendre, en leur refusant nettement des secours qui contribuent à les affermir dans les illusions dangereuses [2]. »

Mais ne vaut-il pas mieux prévenir le mal qu'avoir à le combattre?

Nous ne serons sans doute pas seul à penser qu'il est aussi légitime de procéder avec sévérité au choix des aspirants à la carrière artistique qu'à

[1] Passage d'un ms. grec (?) cité par Beulé. Ouverture du cours d'archéologie, 1860.

[2] É. Fétis, *L'Art dans la Société et dans l'État.* Bruxelles, 1870, p. 89.

Digitized by Google

celui des jeunes gens qui se destinent à toute autre profession libérale.

N'abordent les hautes études scientifiques que les élèves possédant une somme de connaissances générales, destinée à leur permettre de profiter de l'enseignement supérieur; ne va pas à l'Université qui veut. Pareilles conditions pourraient être fort bien imposées à tout aspirant aux cours supérieurs d'art, apte, dès lors, à profiter d'un enseignement complet, non seulement technique mais littéraire et scientifique, dans ses applications variées.

Des cours approfondis d'histoire et d'antiquités pourraient être confiés à des professeurs spéciaux et rendus communs aux diverses branches des arts plastiques; d'autres cours viendraient s'y joindre : tel serait, par exemple, un cours supérieur d'histoire de l'art ornemental, embrassant la céramique, l'orfèvrerie et l'iconographie, — car on oublie trop volontiers que ce sont les grands artistes qui, de tout temps, ont imprimé une direction aux branches accessoires et influé sur la forme de produits aujourd'hui livrés à l'initiative des fabricants.

Des examens de sortie, portant sur l'ensemble des matières, permettraient aux élèves diplômés d'aspirer, à leur tour, au professorat, chose laissée elle-même au hasard. La carrière artistique, en un mot, serait mise au rang de toutes les carrières libérales et les sacrifices mêmes qu'elle exigerait seraient une garantie d'application de la part de quiconque aspirerait à se distinguer comme peintre, statuaire ou architecte, donnant enfin à tous des notions générales, indispensables à l'exercice d'une profession qui offre des faces infiniment variées.

Est-ce trop pour le rôle dévolu à l'artiste? Suffit-il vraiment, comme point de départ, pour être un jour en état de nous instruire ou de nous charmer, d'un savoir se limitant parfois à quelques vagues connaissances recueillies au hasard d'une conversation ou d'une lecture distraite [1]?

Possible, mais il serait permis de préférer alors un moindre optimisme,

[1] On ignore, en général, que lorsqu'un jeune homme se destine à être artiste, il est d'usage de négliger complètement son instruction. Courbet prétendait avoir connu Hogarth; il pouvait être de très bonne foi. Il n'y a pas longtemps, dans un examen pour l'obtention d'une place de professeur, un architecte faisait dater la Renaissance de la Révolution française, et un peintre rangeait Périclès parmi les statuaires!

Digitized by Google

dans les rapports officiels et dans la presse, sur le but de l'art, sur sa mission sociale, sur ses progrès, toutes choses qu'un nombre infiniment restreint des particuliers que la matière intéresse est en mesure de comprendre.

On nous objectera que de tout temps il fut possible d'être artiste par le seul maniement des outils du métier; qu'il est contraire même aux traditions d'exiger davantage, et que le fait d'entourer d'obstacles l'accession aux hautes études expose à paralyser des dispositions géniales allant parfois très au delà de tous les calculs; qu'enfin il y a des genres que l'étude préalable des sciences et de l'histoire servirait peu.

Nous ne le contestons en aucune façon; libre à chacun de devenir artiste comme il l'entend; il n'est question, dans notre pensée, que des formes de l'intervention officielle.

Au temps où l'élève allait de son plein gré choisir son maître, c'était à celui-ci qu'il appartenait de fixer les conditions de l'apprentissage. Et encore les corporations s'arrogeaient-elles le droit de contrôle.

Aujourd'hui que l'enseignement des académies s'est substitué à celui des ateliers, aujourd'hui que l'État assume une responsabilité totalement inconnue avant notre siècle; que par des subsides, des expositions, des musées, des commandes, il imprime la direction, des droits d'une nature spéciale lui sont acquis et des devoirs nouveaux lui incombent; il n'y peut renoncer qu'à la condition de s'abstenir [1].

La discussion est oiseuse, peut-être, pour qui se place au point de vue des doctrines réalistes; mais, à part que ces doctrines n'ont point encore prévalu dans l'enseignement, aucune raison plausible ne nous paraît exister à l'appui du fait que la société moderne doive trouver indignes de son attention, dès l'instant où elles se présentent en peinture, des choses avec lesquelles le public s'identifie sans peine au théâtre et dans le roman, car ce n'est jamais le côté technique seul qui l'intéresse ici, mais la peinture des caractères et la puissance dramatique des situations.

[1] Des idées fort proches des nôtres ont été exprimées, sur cette question, par un écrivain belge occupant une position officielle, M. É. Leclercq, dans une *Étude sur l'École française moderne*, 1882.

Digitized by Google

Nous avons vu des pièces du répertoire classique faire couler autant de larmes ou provoquer autant de rires que n'importe quel drame ou quelle comédie du répertoire moderne.

Il est doux de se reposer, dans le calme des choses agrestes, des excitations de la vie fébrile des grands centres : de là le puissant attrait de certains paysages, de certains épisodes rustiques; mais gardons-nous de croire que le sentiment de l'art ne trouve que cette seule forme d'expression.

Ne proscrivons aucun genre, disons que tous ont des droits égaux à se produire, s'ils font vibrer les cordes de notre sensibilité.

Dans l'antiquité même il y eut des peintres de sujets secondaires, notamment un Pyréicus dont parle Pline [1]; on payait les œuvres fort cher, mais on n'éleva jamais les auteurs au rang des maîtres.

Au surplus, nous pensons avoir établi que, quoi qu'on dise, tous les genres n'ont pas et ne peuvent avoir une importance égale.

Il nous est agréable, en arrivant au terme de cette étude, de constater que les erreurs du réalisme, que les radicales conséquences de ses théories ont perdu beaucoup de leur empire. Que la cause en soit à l'invincible autorité de la logique ou à l'indifférence de la foule, abstenons-nous de le rechercher; mieux vaut accepter de confiance la première hypothèse.

Le mouvement, aussi, ne s'est fait sentir que dans une zone peu étendue. Hors de France, la Belgique a seule montré, chez ses artistes, un grand empressement à s'enrôler sous la bannière du naturalisme; mais les influences de l'espèce ne sont pas isolées dans notre histoire artistique.

Le romantisme, qui eut parmi les peintres flamands des adeptes fort nombreux, ne fut de même qu'une importation française. Nous ne sachions point que le réalisme ait fait sentir son action en Angleterre, car le préraphaélisme n'a rien de commun avec lui; l'Allemagne n'en a, de même, éprouvé qu'un reflet relativement très affaibli.

Chose digne de remarque aussi, la presse, si activement mêlée au mouvement que nous avons étudié dans ces pages, s'est trouvée encourir des cri-

[1] Liv. XXXV, chap. XXXVII, 1.

Digitized by Google

tiques en tout point semblables à celles que l'on adresse à l'école qu'elle a si complaisamment contribué à glorifier.

Un des écrivains qui honorent le plus le journalisme français a pu, tout en rendant hommage à l'action souvent salutaire de la presse, se montrer pour elle d'une extrême sévérité, et faire porter à ses représentants une part de responsabilité considérable en ce qui concerne le jugement frivole des masses et les suffrages de la foule, trop facilement accordés à des indignes. Nous ne citons que cette seule phrase qui se rattache directement à notre sujet : « Un homme qui ne sait l'a b c ni de l'art, ni de la peinture, ni de la musique, ni de la langue française, s'institue critique dramatique, critique musical, critique artistique; il dogmatise, il rend des jugements, il lance des oracles; il distribue l'éloge ou le blâme, il sabre en cinq minutes une œuvre qui a coûté des années de travail à un auteur laborieux, et il trouve aussitôt des sots pour le croire sur parole [1]. »

La constatation même d'un tel état de choses nous parait révéler à elle seule un progrès, car c'est dans l'opinion de la presse que l'art contemporain puise ses encouragements les plus recherchés.

Gardons-nous de généraliser, mais ne faisons pas plus de cas qu'il ne faut de l'autorité de la critique. Que de fois, en effet, une appréciation émise sous l'empire des mille influences qui guident une plume, a pu donner le change sur la signification d'une œuvre, faire illusion à un auteur encore hésitant, l'encourager dans une voie pernicieuse!

Pour le public c'est chose fort grave. Dispensatrice de l'éloge et du blâme, la critique le laisse indécis, frappe de ridicule des suffrages souvent légitimés par l'expression d'un sentiment habilement traduit, et sollicite ses éloges pour des à peu près d'un goût douteux. On a pu voir ainsi des maladresses indéniables élevées presque au rang de qualités et, trop souvent, un savoir réel, ou, dans tous les cas, supérieur, déprécié jusqu'au jour, plus ou moins lointain, où l'œuvre de valeur reprenait ses droits par la force d'une indiscutable évidence. *Scripta manent,* les écrits restent, dit un vieil adage; n'y croyons pas trop en matière de critique d'art et, tout considéré, l'on serait porté à

[1] Charles Bigot, *Les classes dirigeantes.* Paris, 1875, p. 94.

Digitized by Google

se féliciter bien souvent que le contraire fût vrai, autant pour l'auteur que pour qui le lit.

« Ainsi donc, pourra-t-on nous dire, le réalisme n'a point lui-même mis en relief des qualités brillantes, des œuvres de grand style? » Qu'on veuille remarquer que nous n'avons exposé dans ces pages que les tendances du réalisme, ses prétentions si l'on préfère. Nous n'avions pas à citer des noms.

Autant que quiconque nous avons été charmé, sans nous préoccuper de l'école dont elles se réclamaient, par des œuvres dont la simplicité rehaussait la force d'expression, le véritable sentiment artistique; mais nous disons qu'à toutes les grandes époques de l'art des qualités du même ordre nous sont apparues, et que, tout envisagé, c'est sans droit ni pouvoir que l'école réaliste prétendrait altérer les conditions requises pour créer une œuvre d'art digne de ce nom, moins encore porter atteinte à l'admiration que les siècles ont justement vouée aux plus nobles créations de l'esprit humain.

Digitized by Google

15

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 093 293 280

Digitized by Google